

УДК 534.8

О НОВОМ ПОДХОДЕ ПРИ РАСЧЕТЕ И ПРОЕКТИРОВАНИИ АКУСТИЧЕСКИХ КОНЦЕНТРАТОРОВ

В. Г. АБАКУМОВ, К. А. ТРАПЕЗОН

*Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев**Получено 21.12.2005*

В статье рассмотрен алгоритм аналитического расчета и пути проектирования акустических концентраторов, профили которых определяются функцией специального вида, содержащей произвольную постоянную. В качестве обоснования преимуществ применения предложенного алгоритма приведена схема построения акустического концентратора продольных колебаний.

У статті розглянуто алгоритм аналітичного розрахунку та шляхи проектування концентраторів, профілі яких визначаються функцією спеціального вигляду, що містить довільну сталу. В якості обґрунтування переваг застосування запропонованого алгоритму наведено схему побудови акустичного концентратора поздовжніх коливань.

The paper deals with an algorithm of analytical calculation and ways of designing the acoustic concentrators, which profiles are determined by the function of special type that contains the arbitrary constant. To prove the benefits of applying the offered algorithm, the design scheme for the acoustic concentrator of longitudinal vibrations is presented.

ВВЕДЕНИЕ

Акустические колебательные системы технологического назначения, работа которых основана на явлении резонанса, как правило, имеют в своем составе упругие элементы в виде стержней, балок или пластинок. Основное их назначение – усилить амплитуду перемещений, вспомогательное – согласовать частоту источника колебаний с рабочей частотой системы в целом. В то же время, такие системы обладают ограниченной мощностью колебаний и поэтому необходимость концентрации акустической энергии в зоне ее потребления очевидна. На практике чаще всего в качестве концентраторов используют стержни переменного сечения, работающие в режиме продольных колебаний. Они находят широкое применение и являются неотъемлемой составляющей ультразвукового оборудования различного назначения (систем для очистки деталей, ультразвуковой сварки, исследовательских установок для проведения испытаний, связанных с циклической прочностью конструкционных материалов при различных условиях). Исходя из этого, возникает вопрос о рациональном конструировании подобных элементов акустических систем.

Основоположниками теории проектирования концентраторов акустической энергии являются в США У. П. Мэзон, Р. Ф. Уик, а в СССР – М. Г. Лозинский и Л. Д. Розенберг, которые в качестве рабочей формы концентраторов использовали профиль с экспоненциальным законом изме-

нения поперечного сечения [1]. В дальнейшем по мере развития этой отрасли были предложены и изучены иные разновидности профилей с точки зрения получения максимального усиления колебаний и одновременного обеспечения возможности ограничения максимальных циклических напряжений, которые возникают в работающем концентраторе. Итоговой публикацией по этой проблеме явилась статья [2], в которой рассмотрены различные конфигурации концентраторов. В работе [3] предложены акустические концентраторы продольных колебаний специальной формы – так называемые ампульный и ампульный в сочетании с призматическим. Из анализа работ [2, 3] можно заключить, что наибольшим усилением обладает равноступенчатый призматический концентратор, коэффициент усиления которого составляет $M = F/F_0$ (F, F_0 – площади торцевых сечений стержня). В то же время, такая схема характеризуется недопустимо высоким уровнем циклических напряжений в месте сочленения “ступеней” концентратора. Общеизвестно, что этот фактор при интенсивной эксплуатации таких концентраторов приводит к их разрушению вследствие усталости [4]. Рассматривая другие публикации, посвященные вопросам проектирования и разработки концентраторов акустической энергии, можно сделать вывод, что в последние 20–30 лет рассматривались преимущественно предложения [2, 3] с точки зрения поиска оптимальных соотношений их геометрических параметров.

Новым шагом в рассматриваемой области ста-

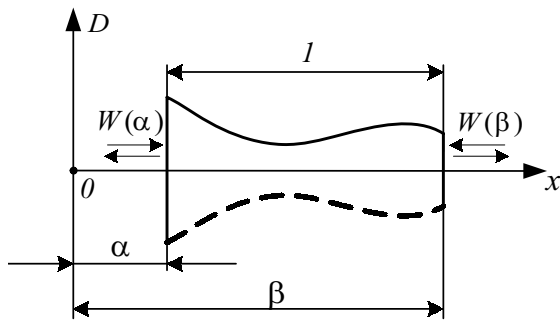


Рис. 1. Произвольный профиль концентратора

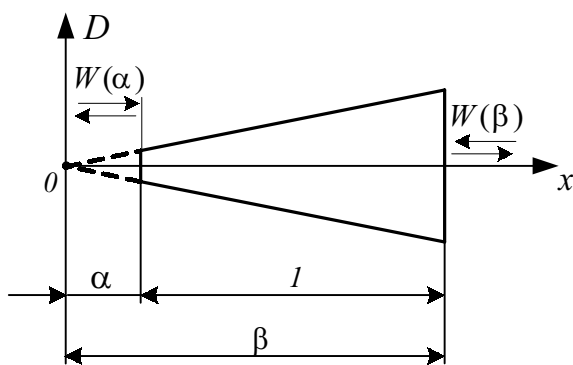


Рис. 2. Схема к расчету конусного концентратора

ла работа [5], где наряду с известными рассматриваются концентраторы новых профилей, для которых характерно большее усиление, по сравнению со ступенчатыми, при более благоприятном распределении напряжений (узлы перемещений не совпадают с пучностями напряжений). В данной работе ставится цель расширить и дополнить результаты, полученные в [5].

При разработке новых конструкций концентраторов используется метод симметрий, основанный на идее групповых подходов к решению дифференциальных уравнений [6, 7]. Благодаря этому появилась возможность получения замкнутых решений соответствующих уравнений с переменными коэффициентами, которые могут также содержать свободно выбираемую существенную постоянную. Изменяя ее значение, можно исследовать свойства и поведение реального объекта – акустического концентратора, профиль которого выражается через данный переменный коэффициент дифференциального уравнения.

1. ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Сосредоточим наше внимание на концентраторе с плавным изменением поперечного сечения, оставляя в стороне составные концентраторы. Тогда дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня переменного сечения имеет вид [8]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial X} \ln F \frac{\partial w}{\partial X} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0, \quad (1)$$

где $w(X, t)$ – перемещение какого-либо поперечного сечения при колебаниях; $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны в стержне; E – модуль Юнга; ρ – плотность материала; $F(x)$ – площадь поперечного сечения стержня. Уравнение (1) справедливо при условии, что плоские сечения при колебаниях остаются плоскими и поперечные размеры стержня достаточно малы по сравнению с длиной (так называемый тонкий стержень), т. е. здесь не учитываются поперечные деформации.

Полагая, согласно методу разделения переменных $w = W(X) \cos(\omega t)$, т. е. рассматривая гармонические колебания и введя вместо координаты X относительную координату $x = X/l$ (l – длина стержня), получим вместо (1) уравнение форм колебаний стержня:

$$W'' + 2 \frac{D'}{D} W' + k^2 W = 0. \quad (2)$$

Здесь $D(x) = \sqrt{F(x)}$ – параметр, определяющий форму поперечного сечения; $k = l\omega/c$ – собственное значение; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота; f – частота колебаний стержня. Штрих обозначает производную по x . Граничные условия для стержня переменного сечения со свободными концами при $x = \alpha$ и $x = \beta$ имеют вид

$$W'(x = \alpha) = W'(x = \beta) = 0, \quad \beta - \alpha = 1. \quad (3)$$

2. НЕКОТОРЫЕ ИЗВЕСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим решение задачи при некоторых значениях функции $D(x)$ (рис. 1), которая входит в уравнение (2). Поскольку чаще всего акустические концентраторы изготавливаются как тела вращения, с практической точки зрения она имеет смысл диаметра стержня.

2.1. Конусный стержень $D(x) = D_0x$ (рис. 2)

Решение уравнения (2) и его производная имеют вид

$$W(x) = \frac{1}{x}(A \sin kx + B \cos kx),$$

$$W'(x) = \frac{1}{x^2}(A(kx \cos kx - \sin kx) - B(kx \sin kx + \cos kx)). \quad (4)$$

С учетом условий (3) приходим к уравнению частот

$$\operatorname{tg} k = \frac{k}{1 + \alpha\beta k^2} \quad (5)$$

и уравнению форм колебаний

$$W(x) = \frac{A}{x} \left[\sin kx + \frac{k\alpha \cos(k\alpha) - \sin(k\alpha)}{k\alpha \sin(k\alpha) + \cos(k\alpha)} \cos(kx) \right].$$

Коэффициент усиления концентратора конусной формы можно вычислить по выражению

$$M = \frac{W(\alpha)}{W(\beta)} = \frac{k\beta \sin(k\beta) + \cos(k\beta)}{k\alpha \sin(k\alpha) + \cos(k\alpha)} = \sqrt{\frac{(k\beta)^2 + 1}{(k\alpha)^2 + 1}}.$$

2.2. Параболический стержень $D(x) = D_0x^2$ (рис. 3)

Решение уравнения (2) и его производная имеют вид

$$W(x) = \frac{1}{x} Z_1'(x) = \frac{1}{x^3} [A(kx \cos kx - \sin kx) - B(kx \sin kx + \cos kx)],$$

$$W'(x) = -\frac{1}{x} (k^2 Z_1(x) + \frac{3}{x} Z_1'(x)), \quad (6)$$

где $Z_1(x) = (A \sin kx + B \cos kx)/x$ - решение (4) для конуса.

С учетом граничных условий (3) получим уравнение частот

$$\operatorname{tg} k = \frac{3k}{k^2\alpha\beta + 3\frac{3-k^2}{3+k^2\alpha\beta}}. \quad (7)$$

При заданном параметре $\alpha\beta$ из уравнения (7) можно найти основной корень k и вычислить усиление колебаний параболы, используя соотношения (6):

$$M = \frac{W(\alpha)}{W(\beta)} = \sqrt{\frac{9k^2\beta^2 + (k^2\beta^2 - 3)^2}{9k^2\alpha^2 + (k^2\alpha^2 - 3)^2}}. \quad (8)$$

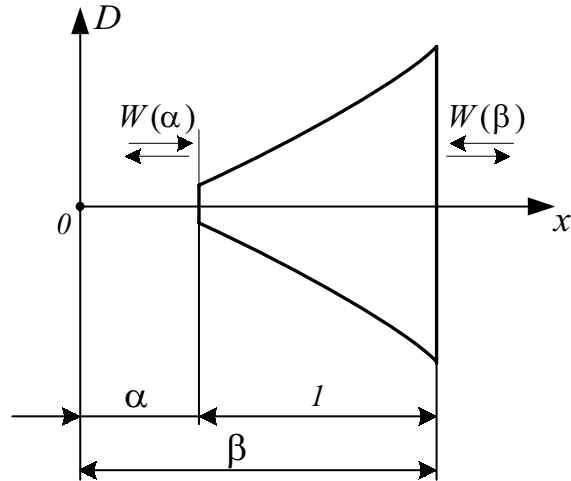


Рис. 3. Профиль концентратора вида $D(x) = x^2$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИИ $D(x)$ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА

Рассмотрим функцию $D(x) = D_0x^2/(x^5 + C)$, содержащую произвольную постоянную C . Эта зависимость рассмотрена в работе [9] на основе использования идей метода симметрии, развитого в [7]. Следуя указанным публикациям, решение уравнения (2) и его производную запишем в следующем виде:

$$W(x) = x^4 Z'(x) + \frac{k^2(x^5 + C)}{5} Z(x), \quad (9)$$

$$W'(x) = \frac{k^2(x^5 + C)}{5} Z'(x), \quad (10)$$

где

$$Z(x) = \frac{1}{x^3} [A(kx \cos kx - \sin kx) - B(kx \sin kx + \cos kx)] -$$

решение (6) для параболы.

Поскольку, как следует из формулы (10), производная $W'(x)$ с точностью до множителя равна производной $Z'(x)$ для параболы, то, согласно граничным условиям (3), частотное уравнение в виде (7) будет оставаться справедливым и для случая $D(x) = D_0x^2/(x^5 + C)$.

Отсюда можно сделать вывод, что собственные частоты стержней (концентраторов) равной длины, профиль которых соответствует такой функции $D(x)$ при заданных α и β :

- 1) согласно формуле (7) не зависят от величины коэффициента C ;

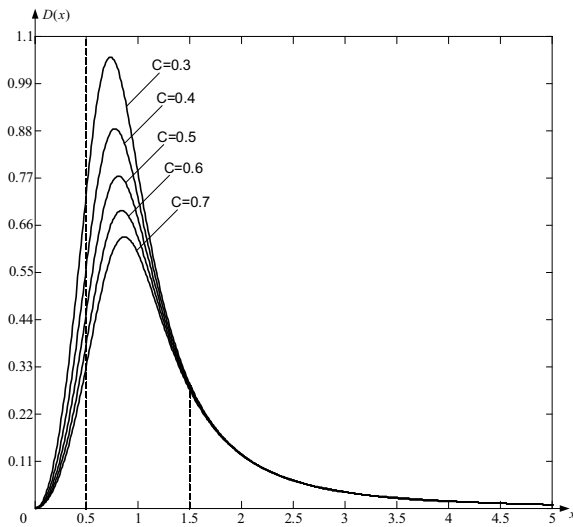


Рис. 4. Варианты распределения функции $D(x)$ при различных C

2) полностью совпадают с частотами для параболы при тех же α и β .

Этот факт, имеющий важное самостоятельное значение, облегчает проведение анализа и при необходимости позволяет пользоваться результатами, вытекающими из соотношений (7) и (8) для параболы.

В частности, если рассмотреть случай, когда $D(\beta) > D(\alpha)$, то усиление колебаний для функции $D(x) = D_0 x^2 / (x^5 + C)$ можно исследовать согласно выражению

$$M = \frac{W(\alpha)}{W(\beta)} = \frac{\alpha^5 + C}{\beta^5 + C} \frac{Z(\alpha)}{Z(\beta)}, \quad (11)$$

или с учетом уравнения (6)

$$M = M_n \frac{\delta}{\delta_n}. \quad (12)$$

Здесь выражениями

$$\delta = \frac{\alpha^5 + C}{\beta^5 + C} \frac{\beta^2}{\alpha^2}; \quad \delta_n = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (13)$$

задаются отношения граничных диаметров исследуемого и параболического концентраторов соответственно; M_n – коэффициент усиления параболического концентратора согласно формуле (8).

Варьируя величину α , из семейства подобных кривых можно выбрать те, для которых $D(\alpha) > D(\beta)$. Следовательно, в этом случае необходимо пользоваться видоизмененными соотношениями

ми (11)–(13) в виде

$$M = \frac{W(\beta)}{W(\alpha)} = \frac{\beta^5 + C}{\alpha^5 + C} \frac{Z(\beta)}{Z(\alpha)} = \delta \frac{\delta_n}{M_n}, \quad (14)$$

$$\delta = \frac{D(\alpha)}{D(\beta)} = \frac{\beta^5 + C}{\alpha^5 + C} \frac{\alpha^2}{\beta^2}. \quad (15)$$

Характер изменения функции $D(x) = D_0 x^2 / (x^5 + C)$ при различных C представлен на рис. 4.

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исходя из требуемых размеров проектируемого акустического концентратора и его усиления, с помощью выражений (11)–(15) непосредственно строится схема выбора конфигурации концентратора, описываемого функцией вида $D(x) = D_0 x^2 / (x^5 + C)$, из бесконечного семейства кривых. В частности, для определения усиления (коэффициент M) необходимо располагать соответствующими значениями величин M_n и δ_n согласно формуле (14), а также частотами (k) при заданном α или $\beta = \alpha + 1$. Выбор величины δ , исходя из выражения (15), определяется выбором постоянной C , значения которой в свою очередь зависят от тех или иных практических соображений или условий.

В таблице приведены собственные значения k (решения уравнения (7)) и величины параметров α , β , δ_n , M_n . Из нее можно заключить, что концентратор параболической формы недостаточно эффективен, так как его максимальное усиление даже при $\delta_n = \infty$ (что соответствует $\alpha = 0$; $\beta = 1$) ограничено сравнительно невысоким значением усиления $M_n = 11.605$. Более того, примерное равенство $M_n \approx \delta_n$ выполняется лишь при $\delta_n \leq 2.25$, после чего M_n неуклонно снижается, так что при $\delta_n = 36$ получаем $M_n \approx \delta_n / 4$ и т. д.

Поскольку значения M_n расположены в достаточно узком диапазоне (от 1 до 11.605), а соответствующие им значения δ_n – от 1 до ∞ , то, согласно соотношению (14), высокие значения M можно получить, если δ_n будут достаточно большими.

Количественную оценку параметра M легко провести с помощью рис. 4, например, при $\alpha = 0.5$. Ему соответствуют $M_n = 6.225$, $\delta_n = 9$, $\delta_n / M_n = 1.446$. Для различных значений постоянной $C = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ при $x = 0.5$ и $x = 1.5$ определяется δ (соответственно получаем $\delta = 2.65, 2.06, 1.7, 1.442, 1.2605$). Далее по формуле (14) вычисляем M , значения которых в 1.446 раза превосходят величину δ ($M = 3.82, 2.97, 2.44, 2.08, 1.82$ соответственно). На основании данного примера приходим к выводу о необходимости уменьшения значений α (увеличения δ_n), как и указывалось выше.

Таблица. Значения отдельных параметров концентратора параболической формы

α	β	k	M_n	δ_n	δ_n/M_n
0	1	5.76346	11.605	∞	∞
0.01	1.01	5.706395	11.599	10201	879.507
0.02	1.02	5.6505	11.58	$2.601 \cdot 10^3$	224.604
0.03	1.03	5.595595	11.55	$1.1787 \cdot 10^3$	102.057
0.031	1.031	5.5902	11.547	$1.1061 \cdot 10^3$	95.793
0.04	1.04	5.5418	11.509	676	58.734
0.042	1.042	5.531166	11.5	615.512	53.522
0.05	1.05	5.489045	11.458	441	38.487
0.053	1.053	5.473417	11.441	394.73443	34.501
0.1	1.1	5.24033	11.069	121	10.932
0.111	1.111	5.188915	10.957	100.18026	9.143
0.2	1.2	4.816185	9.842	36	3.658
0.25	1.25	4.6396	9.143	25	2.734
0.3	1.3	4.4852	8.458	18.7777	2.22
0.333	1.333	4.394	8.026	16.02403	1.996
0.35	1.35	4.3504	7.813	14.87755	1.904
0.4	1.4	4.233	7.225	12.25	1.696
0.5	1.5	4.0414	6.225	9	1.446
0.667	1.667	3.8141	5.01	6.24625	1.247
0.7	1.7	3.7792	4.822	5.89796	1.223
1	2	3.5558	3.626	4	1.103
2	3	3.29305	2.205	2.25	1.02
2.4	3.4	3.2544	1.982	2	1.013
4	5	3.18863	1.557	1.5625	1.003
5	6	3.173112	1.437	1.44	1.002

Рассмотрим практическую схему построения акустических концентраторов и в качестве ее иллюстрации приведем некоторые примеры анализа эффективности концентраторов с точки зрения усиления колебаний при $\alpha=0.1$ и $\alpha=0.2$.

При $\alpha=0.1$ получим $M=10.932\delta$ (см. таблицу и соотношение (14)). Если требуемое отношение присоединительных размеров акустического концентратора δ равно 2, то его усиление будет соответственно $M=21.864$. При других значениях параметра $\delta=1, 4, 8 \dots$ получим следующие значения усиления: $M=10.932, 43.723, 87.456 \dots$ (т.е. $M \gg \delta^2$, что, например, значительно больше значения коэффициента усиления ступенчатого концентратора). Профиль концентратора строится после определения коэффициента C по формуле

$$C = \alpha^2 \beta^2 \frac{(\beta^3 - \alpha^3 \delta)}{\beta^2 \delta - \alpha^2}, \quad (16)$$

следующей из соотношения (15), если $D(\alpha) > D(\beta)$.

При заданных значениях $\alpha=0.1$ и $\delta=2$ находим $C=6.673 \cdot 10^{-3}$. При других величинах $\delta=1,$

$4, 8 \dots$ получаем соответственно $C=0.013, 3.324 \cdot 10^{-3}, 1.655 \cdot 10^{-3} \dots$ Профили акустических концентраторов, соответствующие выражению $D(x) = D_0 x^2 / (x^5 + C)$ при найденных C , приведены на рис. 5. Учитывая осевую симметрию концентратора, на этом и последующих рисунках мы ограничимся изображением только верхней половины его профиля.

Рассмотрим случаи $\delta=1, 2, 4, 6, 8$ при $\alpha=0.2$. Здесь усиление определяется выражением $M=3.658\delta$ (см. таблицу и соотношение (14)), откуда получаем $M=3.658, 7.316, 14.632, 21.948, 29.264$. Таким образом, $M \gg \delta$, что, например, значительно больше значения коэффициента усиления экспоненциального концентратора. Используя соотношение (16), рассчитываем коэффициенты C , ($C=0.071, 0.035, 0.017, 0.011, 8.349 \cdot 10^{-3}$). Профили акустических концентраторов, соответствующие этим значениям, приведены на рис. 6.

Распределения амплитуд перемещений $W(x)$ и напряжений $\sigma = EW'(x)$ (где E – модуль Юнга) вычисляются согласно формулам (8) и (9) при

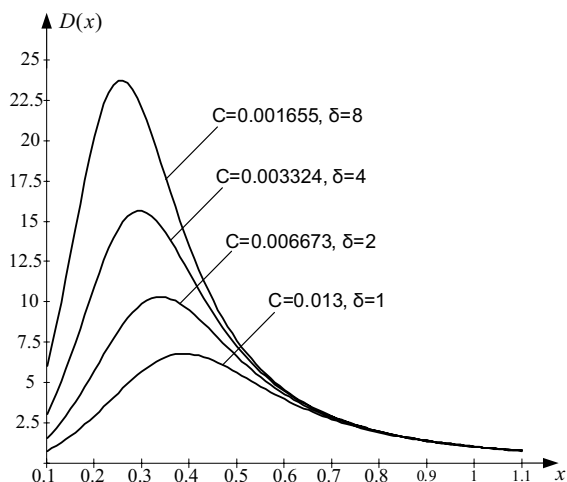


Рис. 5. Профили предлагаемых концентраторов при $\delta = 1, 2, 4, 8$ ($\alpha = 0.1$)

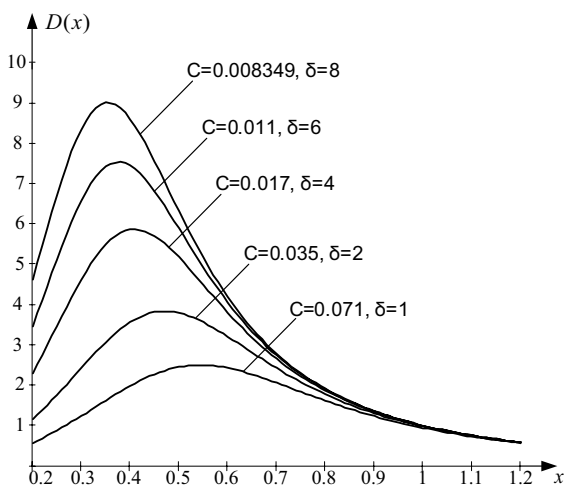


Рис. 6. Профили предлагаемых концентраторов при $\delta = 1, 2, 4, 6, 8$ ($\alpha = 0.2$)

$$x = \alpha \div (\alpha + 1).$$

Для случая $\alpha = 0.1$ ($\delta = 1, 2, 4, 8$) поведение $W(x)$ и $\sigma(x) = EW'(x)$ при $k = 5.24033$ представлено на рис. 7 и 8. Для случая $\alpha = 0.2$ при $k = 4.816185$ графики $W(x)$ и $\sigma(x) = EW'(x)$ представлены на рис. 9 и 10 ($\delta = 1, 2, 4, 6, 8$).

Согласно рис. 7–10, максимум напряжений, который расположен примерно на расстоянии $0.2l$ от тонкого конца, не совпадает с узлами – они находятся на расстоянии от $0.3l$ до $0.5l$ (в зависимости от δ), отсчитываемом от массивного конца акустического концентратора. Это обстоятельство позволяет без опасений использовать узловое сечения рассмотренных акустических концентраторов для

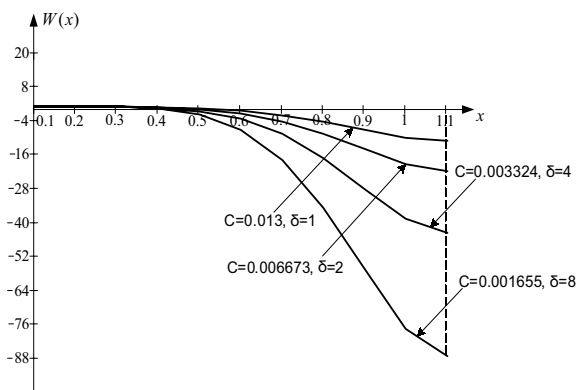


Рис. 7. Изменение перемещений $W(x)$ при $\alpha = 0.1$

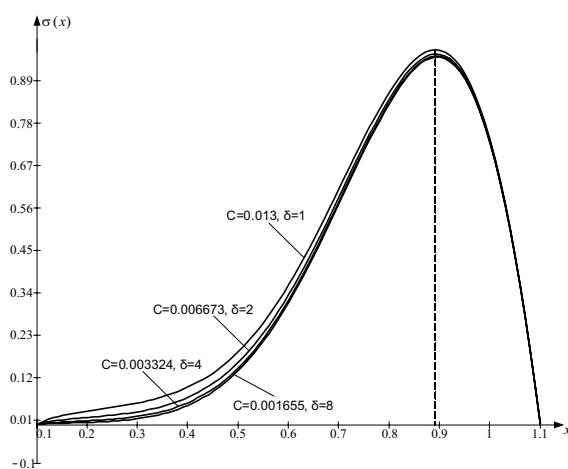


Рис. 8. Изменение напряжений $\sigma(x)$ при $\alpha = 0.1$

их жесткого крепления на соответствующих неподвижных деталях ультразвуковой аппаратуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Установлено, что результаты решения задачи о колебаниях концентратора параболической формы могут использоваться при анализе концентраторов, профиль которых определяется функцией $D(x) = D_0 x^2 / (x^5 + C)$, где C – произвольная постоянная.
2. Показано, что собственные частоты таких концентраторов с длиной, определяемой границами $x = \alpha$ и $x = \alpha + 1$, полностью совпадают с частотами концентратора параболической формы такой же длины при тех же границах и не зависят от значений постоянной C .

3. Получено простое алгебраическое соотношение для расчета коэффициентов усиления концентраторов, задаваемых функцией $x^2/(x^5 + C)$, без непосредственного использования функции перемещений.
4. Исходя из присоединительных размеров, коэффициентов усиления, распределения смещений и напряжений, приведены практические примеры по выбору требуемых конфигураций концентраторов из рассмотренного семейства.

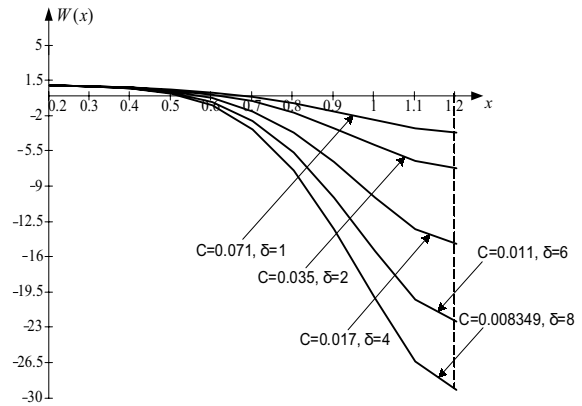


Рис. 9. Изменение перемещений $W(x)$ при $\alpha = 0.2$

1. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике.– М.: ИИЛ, 1957.– 726 с.
2. Писаревский М. М. Расчет переходных стержней для магнитострикционных вибраторов // Труды научно-технического совещания по изучению рассеяния энергии при колебаниях упругих тел.– Киев: Изд-во АН УССР, 1958.– С. 54–89.
3. Эйсер Э. Расчет резонансных колебательных систем // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона: том 1, часть Б.– М.: Мир, 1967.– С. 339–358.
4. Северденко В. П., Клубович В. В., Степаненко А. В. Обработка металлов давлением с ультразвуком.– Минск: Наука и техника, 1973.– 288 с.
5. Абакумов В. Г., Трапезон К. А. Некоторые новые результаты по исследованию эффективности акустических концентраторов // Электроника и связь.– 2004.– N 24.– С. 66–71.
6. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.– М.: Мир, 1989.– 639 с.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1978.– 402 с.
8. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1985.– 444 с.
9. Абакумов В. Г., Трапезон К. А. К анализу эффективности акустических концентраторов // Труды 12-ой Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов

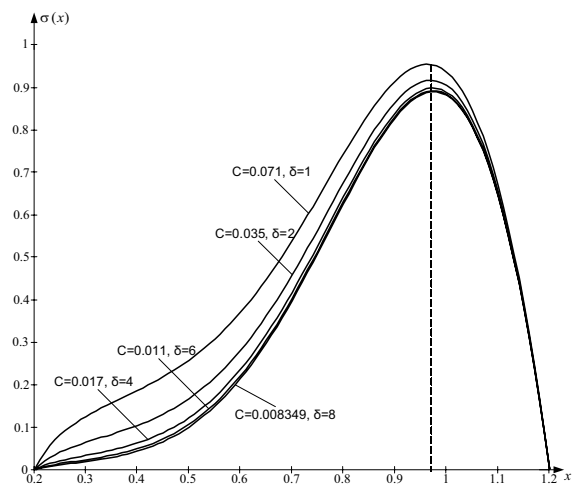


Рис. 10. Изменение напряжений $\sigma(x)$ при $\alpha = 0.2$

“Микроэлектроника и информатика 2005”.– М.: МИЭТ, 2005.– С. 153–157.