УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк, Л. Н. Чернецкая**

Об асимптотическом поведении решений нестационарных псевдолинейных систем

Рассматривается псевдолинейная система уравнений возмущенного движения. Для такого класса систем уравнений получены достаточные условия ограниченности и асимптотической устойчивости движения. В качестве примера рассмотрена линейная система с почти постоянными коэффициентами.

В данной работе исследуется задача об асимптотическом поведении решений псевдолинейных уравнений возмущенного движения. Эта задача является некоторым обобщением известной задачи об асимптотическом поведении решений систем дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами (см. [1–3]).

Постановка задачи. Рассмотрим псевдолинейную неавтономную систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t, x))x, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; A — $n\times n$-постоянная матрица, а $B(t, x)$ — $n\times n$-матрица, определенная в области $\mathbb{R}_+ \times S(\rho)$, $S(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < \rho\}$, $B(t, 0) \neq 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если $B(t, x) = B(t)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times S(\rho)$, то система (1) обращается в линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t))x, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

исследованию которой посвящены многие работы.

Далее будем предполагать, что матрица $B(t, x)$ удовлетворяет свойству “малости” в определенном смысле. Например, $B(t, x)$ такая, что

[H$_1$.] $\int\limits_0^\infty \|B(s, x)\|\, ds < +\infty$ в области значений $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times S(\rho)$;

[H$_2$.] $\|B(t, x)\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $x \in S(\rho)$;

[H$_3$.] $\|B(t, x)\| \leqslant \beta(t)$, $\int\limits_0^\infty \beta(s)\, ds < +\infty$, где $\beta(t)$ — непрерывная положительная функция на $[0, \infty)$.

Представляет интерес для приложений выяснение условий, при которых некоторые свойства решений системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad y(t_0) = y_0 = x_0, \tag{3}$$

сохраняются для решений системы (1).

Условия ограниченности и асимптотической устойчивости решений.

Теорема 1. *Если все решения системы* (3) *ограничены на* $[0, +\infty)$, *то все решения системы* (1) *также ограничены на* $[0, +\infty)$ *при выполнении условия* H_1.

Доказательство. Систему (1) представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t,x)x, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

и будем рассматривать слагаемое $B(t,x)x$ в области $\mathbb{R}_+ \times S(\rho)$ как возмущение. Тогда

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t U(t-s)B(s,x(s))x(s)\,ds, \tag{5}$$

где $y(t)$ — решение системы (3) с начальными условиями $y(0) = x(0) = x_0$; а $U(t)$ — решение матричного уравнения

$$\frac{dU}{dt} = AU, \qquad U(0) = E. \tag{6}$$

Здесь E — $n \times n$-единичная матрица. Поскольку все решения системы (3) ограничены на $[0,+\infty)$, из соотношения (5) получаем

$$\|x(t)\| \leqslant a_1 + a_1 \int\limits_0^t \|B(s,x(s))\|\|x(s)\|\,ds, \tag{7}$$

где $a_1 = \max\Big(\sup\limits_{t\geqslant 0}\|y(t)\|, \sup\limits_{t\geqslant 0}\|U(t)\|\Big)$. Учитывая условие H_1 и применяя к неравенству (7) лемму об интегральном неравенстве Гронуолла–Беллмана [1], получим

$$\|x(t)\| \leqslant a_1 \exp\left[a_1 \int\limits_0^t \|B(s,x(s))\|\,ds\right] \leqslant a_1 \exp\left[a_1 \int\limits_0^\infty \|B(s,x(s))\|\,ds\right] = D < \infty$$

при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times S(\rho)$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 условие H_1 заменить условием H_3, то ее утверждение сохраняется.

Следствие 1. *Если в системе* (1) $B(t,x) = B(t)$ *при всех* $x \in S(\rho)$ *и выполняются все условия теоремы 1, то все решения системы* (2) *ограничены на* $[0,\infty)$.

Теорема 2. *Если характеристический полином матрицы A асимптотически устойчив и выполняется условие H_2, то все решения системы* (1) *приближаются к состоянию равновесия $x = 0$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Поскольку характеристический полином матрицы A асимптотически устойчив, найдутся постоянные $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для решения $y(t)$ системы (3) верна оценка

$$\|y(t)\| \leqslant M\exp(-\alpha t), \qquad t \geqslant 0, \tag{8}$$

и так как $y(t) = U(t)x_0$, то

$$\|U(t)\| \leqslant b_1 \exp(-\alpha t), \tag{9}$$

где $b_1 > 0$. Поскольку $\|B(t,x)\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $x \in S(\rho)$ и $B(t,x)$ непрерывна по $t \geqslant 0$, существует $b_2 > 0$ такое, что

$$\|B(t,x)\| \leqslant b_2 \qquad \text{при всех} \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times S(\rho).$$

Выберем величину b_1 так, что $b_1 b_2 < \alpha$. Далее, из уравнения (5) получим

$$\|x(t)\| \leqslant M \exp(-\alpha t) + b_1 b_2 \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|x(s)\|\, ds$$

или

$$\|x(t)\| \exp(\alpha t) \leqslant M + b_1 b_2 \int\limits_0^t e^{\alpha s} \|x(s)\|\, ds.$$

Отсюда следует, что

$$\|x(t)\| \exp(\alpha t) \leqslant M \exp(b_1 b_2)t$$

и, окончательно,

$$\|x(t)\| \leqslant M \exp[(b_1 b_2 - \alpha)t].$$

Поскольку $b_1 b_2 < \alpha$, $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Если в теореме 2 условие H_2 заменить условием H_3, то ее утверждение сохраняется.

Следствие 2. *Если в системе* (1) $B(t,x) = B(t)$ *при всех* $x \in S(\rho)$ *и выполняются все условия теоремы 2, то все решения системы* (2) *стремятся к состоянию равновесия* $x = 0$ *при* $t \to +\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) существуют постоянные $M > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что*

$$\|\exp(At)\| \leqslant M \exp(-\alpha t) \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant 0;$$

2) существуют $\varepsilon \in (0, \alpha/M)$ *и* $t_1 \geqslant t_0 > 0$, *для которых*

$$\|B(t,x)\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_1 \qquad \text{и} \qquad x \in S(\rho).$$

Тогда все решения системы (1) *стремятся к состоянию равновесия* $x = 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $U(t)$ — фундаментальная матрица системы (3). Вследствие того, что

$$\frac{dU(t)}{dt} \equiv [A + B(t,x)]U(t),$$

а $\exp[A(t-s)]$ является матрицей Коши для системы (3), имеем

$$U(t) = \exp[A(t-t_1)]U(t_1) + \int\limits_{t_1}^t \exp[A(t-s)]B(s,x(s))U(s)\, ds. \tag{10}$$

Отсюда, согласно условию 1 теоремы 3, получим

$$\|U(t)\| \leqslant \exp(-\alpha t)c + \int\limits_{t_1}^{t} \exp(-\alpha t)M\|B(s,x(s))\| \exp(\alpha s)\|U(s)\|\,ds, \tag{11}$$

где $c = M\|U(t_1)\|\exp(\alpha t_1)$. Преобразуем неравенство (11), используя обозначения

$$u(t) = \|U(t)\|\exp(\alpha t), \qquad v(t) = M\|B(t,x(t))\|,$$

к следующему:

$$u(t) \leqslant c + \int\limits_{t_1}^{t} v(s)u(s)\,ds. \tag{12}$$

Поскольку $u(t)$ и $v(t)$ — неотрицательные непрерывные функции и $c > 0$, к неравенству (12) применима теорема Гронуолла–Беллмана [1], что приводит к оценке

$$u(t) \leqslant c\exp\left[\int\limits_{t_1}^{t} v(s)\,ds\right], \qquad t \geqslant t_1.$$

Согласно условию 2 теоремы 3, выберем ε и t_1 так, что $\|B(t,x)\| \leqslant \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_1$ и $x \in S(\rho)$. При этом

$$v(t) \leqslant M\varepsilon, \qquad \int\limits_{t_1}^{t} v(s)\,ds \leqslant M\varepsilon(t - t_1)$$

и

$$\exp\left[\int\limits_{t_1}^{t} v(s)ds\right] \leqslant K\exp(M\varepsilon t), \tag{13}$$

где $K = \exp(-M\varepsilon t_1)$. Поскольку $M\varepsilon - \alpha < 0$, $\beta = \alpha - M\varepsilon > 0$ и, следовательно,

$$\|U(t)\| = u(t)\exp(-\alpha t) \leqslant Kc\exp(-\beta t).$$

Отсюда следует, что $\|U(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ для системы (1). Теорема 3 доказана.

Следствие 3 (см. [5]). *Если в системе* (1) $B(t,x) = B(t)$ *при всех* $t \geqslant 0$ *и* $x \in S(\rho)$ *и выполняются все условия теоремы 3, то все решения системы* (2) *стремятся к состоянию равновесия* $x = 0$ *при* $t \to \infty$, *т. е. система* (2) *асимптотически устойчива.*

Практическое применение теорем 2, 3 предполагает наличие оценки величины $M > 0$, фигурирующей в неравенстве

$$\|U(t)\| \leqslant M\exp(-\alpha t). \tag{14}$$

Укажем один из способов такой оценки, используя следующее утверждение.

Лемма 1 (см. [6], с. 131). *Пусть* λ_i *— собственные значения матрицы* A *и* $\alpha_0 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$. *Тогда*

$$\|\exp(At)\| \leqslant \exp(\alpha_0 t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2t\|A\|)^k}{k!} \tag{15}$$

при всех $t \geqslant 0$.

Далее оценку (15) представим в виде

$$\|\exp(At)\| \leqslant \psi(t) \exp[(\alpha_0 + \alpha)t], \tag{16}$$

где $\psi(t) = \varphi(t)\exp(-\alpha t)$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2t\|A\|)^k}{k!}$. Пусть $\alpha_0 < 0$. Выберем $\alpha > 0$ так, что $\alpha_0 + \alpha < 0$. При этом $\psi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и функция $\psi(t)$ имеет максимальное значение при $t \in [0, \omega)$. Это значение функции $\psi(t)$ можно взять в качестве оценки величины $M > 0$ в неравенстве (14).

Следствие 4. *Пусть для системы* (1) *выполняются следующие условия:*

1) существует $\delta > 0$ *такое, что характеристический полином матрицы* $A + \delta E$ *асимптотически устойчив;*

2) существует величина $\varepsilon \in (0, \delta/2d)$, *для которой* $\|B(t,x)\| \leqslant \varepsilon$ *при достаточно больших значениях* t *и при всех* $x \in S(\rho)$, *где* d *— максимальное значение функции* $f(t) = \varphi(t)\exp\left(-\frac{\delta}{2}t\right)$ *на* $[0, \infty)$.

Тогда все решения системы (1) *стремятся к состоянию равновесия* $x = 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Установим вначале связь между собственными значениями характеристического полинома $Q(\lambda)$ матрицы $A + \delta E$ и собственными значениями характеристического полинома $P(\rho)$ матрицы A. Поскольку $Q(\lambda) = \det(\lambda E - A - \delta E) = \det[(\lambda - \delta)E - A]$ и $P(\rho) = \det(\rho E - A)$, $P(\lambda - \rho) = Q(\lambda)$. Отсюда следует, что если λ_j — собственные значения матрицы $A + \delta E$, то $\rho_j = \lambda_j - \delta$ — собственные значения матрицы A.

Поскольку действительные части γ_i собственных значений матрицы $A + \delta E$ удовлетворяют условиям $\gamma_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для $\operatorname{Re} \alpha_i$ матрицы A имеют место неравенства $\operatorname{Re} \alpha_i < -\delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Согласно лемме 1, имеем

$$\|\exp(At)\| \leqslant \psi(t)\exp(\alpha_0 t), \qquad t \geqslant 0. \tag{17}$$

Неравенство (17) перепишем в виде

$$\|\exp(At)\| \leqslant f(t) \exp\left[\left(\alpha_0 + \frac{\delta}{2}\right)t\right], \tag{18}$$

где $f(t) = \psi(t)\exp\left(-\frac{\delta}{2}t\right)$. Из того, что $\alpha_0 + \delta < 0$, следует, что $\alpha_0 + \delta/2 < -\delta/2$. Поэтому

$$\|\exp(At)\| \leqslant d \exp\left(-\frac{\delta}{2}t\right), \qquad t \geqslant 0, \tag{19}$$

где d — максимальное собственное значение функции $f(t)$ на $[0, \infty)$. Применяя оценку (19) в доказательстве теоремы 3, получаем утверждение следствия 4.

Следствие 5 (см. [5]). *Если в условиях следствия 4 $B(t, x) = B(t)$ при всех $t \geqslant 0$ и $x \in S(\rho)$, то все решения системы* (2) *стремятся к состоянию $x = 0$ при $t \to \infty$.*

Заключительные замечания. В работах [1–3] исследована проблема устойчивости движения систем с почти постоянными коэффициентами. Метод интегральных неравенств является эффективным средством анализа устойчивости движения такого рода систем. Достаточные условия ограниченности и устойчивости, приведенные в данной работе, как и следствия 1–5, навеяны известными результатами работ [1–5].

Более грубые (но и более простые) оценки постоянной M в неравенстве (14) могут быть получены на основе неравенства

$$\|\exp(At)\| \leqslant \exp(R_0 t), \tag{20}$$

где $R_0 = R(t_0)$ — одно из чисел, удовлетворяющих условиям (10.6) из [6, с. 128].

Более тонкие оценки постоянной M могут быть получены, если учесть, что (см. [7])

$$\exp(At) = \sum_{j \in S} \exp(\lambda_j t) P_j + \sum_{j \in O} \exp(\lambda_j t) P_j + \sum_{j \in U} \exp(\lambda_j t) P_j,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A; $P_1, \ldots, P_n$ — проекторы, удовлетворяющие условиям $P_i P_j = P_i$, если $i = j$, и $P_i P_j = 0$ в остальных случаях; S — множество λ_j с отрицательной вещественной частью собственных значений; O — множество чисто мнимых λ_j; U — множество λ_j с положительной вещественной частью собственных значений.

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. – 215 с.
2. *Rama Mohana Rao M.* Ordinary differential equations. theory and applications. – New Delhi-Madras: Affiliated East-West Press, 1980. – 266 p.
3. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – Киев: Наук. думка, 1989. – 270 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Ленинград; Москва: ОНТИ, 1935. – 386 с.
5. *Тонков Е. Л.* Устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Моск. ин-т хим. машиностроения, 1972. – 72 с.
6. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э. и др.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – Москва: Наука, 1966. – 576 с.
7. *Hoppensteadt F. C.* Analysis and simulation of chaotic systems. – Berlin: Springer, 1993. – 305 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины

Поступило в редакцию 30.05.2014

Академік НАН України **А. А. Мартинюк, Л. Н. Чернецька**

Про асимптотичну поведінку рішень нестаціонарних псевдолінійних систем

Розглядається псевдолінійна система рівнянь збуреного руху. Для цього класу систем рівнянь отримано достатні умови обмеженості та асимптотичної стійкості руху. Як приклад розглянуто лінійну систему з майже сталими коефіцієнтами.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk, L. N. Chernetskaya**

On the asymptotic behavior of the solutions of nonstationary pseudolinear systems

We consider a class of pseudolinear systems of equations of perturbed motion. The sufficient conditions of boundedness and stability via integral inequalities are derived. As an example, we considered a linear system of equations with almost constant coefficients.