УДК 515.168.3

**Д. В. Болотов**

# Характеризация плоских слоений

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)*

*Показано, что $C^2$-слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии $M$, слои которого имеют конечно порожденную фундаментальную группу, является плоским тогда и только тогда, когда $M$ является $K(\pi,1)$-многообразием.*

Цель данной работы — доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть $M$ — замкнутое риманово многообразие с заданным $C^2$-слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. Предположим, что все слои имеют конечно порожденную фундаментальную группу. Тогда:*

*1) $\pi_1(M)$ — почти полициклическая группа;*

*2) $\mathcal{F}$ плоское тогда и только тогда, когда $M$ является $K(\pi,1)$-многообразием.*

*Замечание 1.* До сих пор неизвестно, существует ли полное риманово многообразие неотрицательной кривизны Риччи с бесконечно порожденной фундаментальной группой. Заметим также, что фундаментальная группа многообразия неотрицательной секционной кривизны всегда конечно порождена.

*Замечание 2.* Случай $n = 3$ был разобран автором в [1].

**Предварительные сведения.** В [2] автором была описана топологическая структура замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. В частности, было показано, что слоение неотрицательной кривизны Риччи является слоением почти без голономии и имеет место одна из следующих возможностей:

1. Слоение не имеет компактных слоев. В этом случае все слои всюду плотны и диффеоморфны некоторому открытому многообразию $L$, которое мы назовем типичным слоем, а многообразие является расслоением над окружностью. В этом случае имеем групповое расширение

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z}^k \to 0. \tag{1}$$

2. Многообразие можно разбить на конечное число блоков[1], где слоение выглядит достаточно просто. А именно, либо блок гомеоморфен прямому произведению $K \times I$ компактного слоя на отрезок, либо внутри блока все слои диффеоморфны некоторому типичному некомпактному слою $L$. В последнем случае фундаментальная группа блока $B$ является групповым расширением

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0. \tag{2}$$

При этом $k \geqslant 1$, и если $k = 1$, то $\operatorname{int} B$ является расслоением над окружностью со слоем $L$. В этом случае блок называется *собственным* блоком. Если же $k \geqslant 2$, то все внутренние слои всюду плотны в $B$ и блок называется *плотным.* Для любого $k$ имеет место гомеоморфизм

$$\widetilde{\operatorname{int} B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}. \tag{3}$$



[1]Блоком мы называем компактное подмногообразие с границей, состоящей из слоев.

М. Громовым было введено понятие асимптотической размерности $\operatorname{asdim} X$ метрического пространства $X$.

**Определение 1.** $\operatorname{asdim} X = n$, если для любого равномерно ограниченного открытого покрытия $\mathcal{V}$ существует равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{U}$ кратности $n+1$ такое, что $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ (любой элемент покрытия $\mathcal{V}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$), и не существует такого покрытия меньшей кратности.

Напомним некоторые свойства асимптотической размерности дискретных групп с метрикой слов (см. 3):

1) $\operatorname{asdim} \pi_1(M) \geqslant \dim M$, если $M$ является $K(\pi, 1)$-многообразием;

2) $\operatorname{asdim} H \leqslant \operatorname{asdim} G$ для любой подгруппы $H \subset G$;

3) $\operatorname{asdim} H = \operatorname{asdim} G$ для любой подгруппы $H \subset G$ конечного индекса;

4) $\operatorname{asdim} G \leqslant \operatorname{asdim} \operatorname{Ker} f + \operatorname{asdim} \operatorname{Im} f$.

**Определение 2.** Группа $G$ называется *полициклической*, если она содержит субнормальную серию (каждая подгруппа $G_{i+1}$ нормальна в $G_i$)

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_0 = G \tag{4}$$

такую, что каждая группа $G_i/G_{i+1}$ является циклической.

Известно (Хирш), что класс групп, для которых существует субнормальная серия $(*)$ такая, что каждая фактор-группа $G_i/G_{i+1}$ является или циклической, или конечной группой, совпадает с классом почти полициклических групп, т. е. групп, содержащих полициклическую подгруппу конечного индекса.

**Определение 3.** Числом Хирша $h(G)$ почти полициклической группы $G$ называется число бесконечных циклических факторов $G_i/G_{i+1}$ в $(*)$. Заметим, что это число не зависит от субнормальной серии $(*)$.

Для почти полициклической группы $G$ имеем (см. [3]):

1) $\operatorname{asdim} G = \operatorname{asdim} \operatorname{Ker} f + \operatorname{asdim} \operatorname{Im} f$;

2) $\operatorname{asdim} G = h(G)$, где $h(G)$ — число Хирша группы $G$.

Следующее утверждение было доказано автором в [4].

**Предложение 1.** *Пусть $B$ — блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи, и граница $\partial B$ имеет более одной компоненты связности. Тогда:*

*1) каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$;*

*2) число компонент связности границы $\partial B$ равно 2, а $B$ является $h$-кобордизмом.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Пусть $B$ — блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи. Если фундаментальная группа типичного слоя $L$ конечно порождена, то:*

*1) фундаментальная группа $\pi_1(B)$ является почти полициклической;*

*2) образ гомоморфизма $i_* \colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$, индуцированного включением граничного слоя $i \colon K \to B$, имеет индекс в $\pi_1(B)$, не превосходящий 2.*

**Доказательство.** Так как $\pi_1(L)$ конечно порождена, то она содержит нормальную нильпотентную подгруппу конечного индекса [5]. Из последовательности (2) следует, что $\pi_1(B)$ является почти полициклической группой. А. И. Мальцев доказал (см. [6]), что любая подгруппа почти полициклической группы, в частности $i_*\pi_1(K) \subset \pi_1(B)$, является пересечением подгрупп конечного индекса. Поэтому если индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ больше 1, то существует конечнолистное накрытие блока $B$, имеющее более одной компоненты связности границы. Тогда из предложения 1 немедленно следует, что индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ равен 2. Предложение доказано.

**Доказательство теоремы 1.** Из слоеной теоремы Картана–Адамара [7] следует, что плоское слоение может быть только на $K(\pi,1)$-многообразии.

Докажем теорему в другую сторону. Будем предполагать многообразие и слоение ориентируемым, переходя в случае необходимости к конечнолистному накрытию.

*Случай 1.* $\mathcal{F}$ не содержит компактных слоев. Тогда $\mathcal{F}$ слоение без голономии, по теореме Новикова (см. [8]) $M$ расслаивается над $S^1$, $\widetilde{M} \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$ и имеет место групповое расширение (1). Из [9] следует, что все слои изометричны риманову произведению $N \times E^k$, где $N$ компактно. Из теоремы Чигера–Громолла о расщеплении [10] следует, что $\mathcal{F}$ плоское тогда и только тогда, когда $M$ асферично.

*Случай 2.* Предположим, $\mathcal{F}$ содержит компактные слои. Тогда замыкание каждого слоя содержит компактный слой (см. [2, следствие 1]), и конечным числом компактных слоев мы можем разбить многообразие $M$ на блоки, каждый из которых либо гомеоморфен прямому произведению $K \times I$, где $K$ — компактный слой, либо является блоком без внутренних компактных слоев. В дальнейшем под блоком мы будем понимать лишь те блоки, которые входят в данное разбиение. Разобьем рассматриваемый случай на два.

*a.* Границы всех блоков имеют две компоненты связности.

В этом случае из предложения 1 следует, что все слои имеют изометричные универсальные накрытия. Более того, блоки являются $h$-кобордизмами, и $M$ можно представить как фактор многообразия $\overline{M}$ по свободному и дискретному действию группы $\mathbb{Z}$, где $\overline{M}$ является объединением бесконечного числа копий многообразия с краем, полученного в результате разрезания $M$ некоторым компактным слоем $K$. Понятно, что $\pi_1(\overline{M}) = \pi_1(K)$ и имеет место расширение

$$1 \to \pi_1(K) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Заметим, что $\pi_1(K)$ содержит свободную абелеву подгруппу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса (см. [5]). Из теоремы о расщеплении Чигера–Громолла следует, что если $k < \dim K$, то $k < \dim K - 1$. В этом случае число Хирша группы $\pi_1(M)$ меньше, чем $\dim M$. Вспомним, что число Хирша почти полициклической группы $\pi$ совпадает с асимптотической размерностью группы, которая, в свою очередь, не меньше размерности $K(\pi,1)$-многообразия. Поэтому если $M$ есть $K(\pi,1)$-многообразие, то компактные слои, а значит, по предложению 1, все слои, принадлежащие блокам без внутренних компактных слоев, являются плоскими. Из теоремы Нисимори (см. [11]), которая описывает поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией, а также из замкнутости множества компактных слоев (см. [12]) следует, что всякий некомпактный слой исключительного блока $K \times I$ принадлежит блоку $B' \subset K \times I$ без внутренних компактных слоев. По построению, существует трансверсаль, пересекающая все слои блока $K \times I$. Значит блок $B'$ дожен иметь два граничных слоя и обязан быть плоским согласно вышедоказанному.

*b.* Существует блок с одной компонентой связности границы.

В этом случае $M$ можно представить в виде объединения $M = A \bigcup B$, где $A \bigcap B$ — объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \bigcap B$ — единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \operatorname{int} B$ и $D = M \setminus \operatorname{int} A$ — блоки с одной компонентой связности границы. Из предложения 1 следует, что если $B$ является объединением конечного числа блоков, граница которых имеет две связные компоненты, то вложение $i\colon K \to B$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью, следовательно, вложения $\partial C \to A \bigcap B$ и $\partial D \to A \bigcap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Напомним следующую теорему.

**Теорема 2** [13.] *Если для некоторой группы $G$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi_1(A \bigcap B) \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & G \\
 & \pi_1(B) \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

*то однозначно определен гомоморфизм $\sigma\colon \pi_1(M) \to G$ такой, что $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, где $\phi_1$, $\phi_2$, а также $\psi_1\colon \pi_1(A) \to \pi_1(M)$, $\psi_2\colon \pi_1(B) \to \pi_1(M)$, $\psi_3\colon \pi_1(A \bigcap B) \to \pi_1(M)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями.*

Отметим, что линейно связные подмножества $A$, $B$ и $A \bigcap B$ в цитируемой теореме должны быть открытыми и линейно связными. Но это требование можно ослабить, потребовав, чтобы существовали открытые подмножества $U_A$, $U_B$ и $U_{A \bigcap B}$, содержащие $A$, $B$ и $A \bigcap B$ соответственно, для которых множества $A$, $B$ и $A \bigcap B$ являются сильными деформационными ретрактами. В нашем случае блоки $A$, $B$ и $A \bigcap B$ удовлетворяют этому требованию. Достаточно к границам блоков $A$, $B$ и $A \bigcap B$ добавить маленькие открытые воротники.

Предположим, гомоморфизмы $\phi_i$ сюръективны. Пусть $N$ — группа, порожденная $\operatorname{Ker}\phi_1 \bigcup \operatorname{Ker}\phi_2$. Положим $G = \pi_1(A \bigcap B)/N$, а $\rho_i$ — отображения факторизации.

Тогда имеем

$$\pi_1(A) \cong \pi_1(A \bigcap B)/\operatorname{Ker}\phi_1, \qquad \pi_1(B) \cong \pi_1(A \bigcap B)/\operatorname{Ker}\phi_2,$$
$$G \cong \pi_1(A)/(N/\operatorname{Ker}\phi_1) \cong \pi_1(B)/(N/\operatorname{Ker}\phi_2) \cong \pi_1(M).$$

Из предложения 2 следует, что группа $\pi_1(A)$ является почти полициклической. Так как подгруппа и образ почти полициклической группы является почти полициклической группой, то $\pi_1(M)$ — почти полициклическая группа. Из предположения, что $M$ является $K(\pi, 1)$-многообразием, следует, что $\operatorname{asdim}\pi_1(M) \geqslant n$. Вспомним, что для почти полициклической группы $G$ и гомоморфизма $f\colon G \to G'$ имеем $\operatorname{asdim} G = \operatorname{asdim}\operatorname{Ker} f + \operatorname{asdim}\operatorname{Im} f$. Напомним также, что фундаментальная группа замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса (см. [5]) и $\operatorname{asdim}\mathbb{Z}^k = k$ (см. [3]). Учитывая теорему о расщеплении Чигера–Громолла получаем, что для любого компактного слоя $K$ имеем $\operatorname{asdim}\pi_1(K) = n - 1$ и все компактные слои должны быть плоскими, а значит, $K(\pi, 1)$-многообразиями. А так как фундаментальная группа плоского многообразия не содержит кручения, то, учитывая предложение 2 и свойства асимптотической размерности, гомоморфизмы $\phi_i$ должны быть мономорфизмами, а значит, изоморфизмами. В частности, $\phi_1\colon \pi_1(A \bigcap B) \to \pi_1(A)$ — изоморфизм. Тогда для универсального накрытия $\widetilde{C} \to C$ существует классифицирующее отображение

$$h\colon C \to \partial C \sim A \bigcap B \sim B(\pi_1(A)),$$

а композиция $h \circ i$ является гомотопической эквивалентностью, где $i\colon \partial C \to C$ — вложение граничного слоя. Это означает, что индуцированный гомоморфизм

$$i_*\colon H_{n-1}(\partial C) \to H_{n-1}(C)$$

есть мономорфизм, что невозможно.

Таким образом, хотя бы один из гомоморфизмов $\phi_i$ не сюръективен и, согласно предложению 1, его образ является подгруппой индекса 2. Напомним, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна. Предположим, что $\phi_1$ не сюръективен. Тогда положим $G = \mathbb{Z}_2$, а $\rho_1$ определим как гомоморфизм факторизации

$$\rho_1\colon \pi_1(A) \to \pi_1(A)/\operatorname{Im}\phi_1 = \mathbb{Z}_2.$$

Если $\phi_2$ сюръективен, положим $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Так как $\rho_1 = \sigma \circ \psi_1$, то $\sigma\colon \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ нетривиален. Перейдем к соответствующему двулистному накрытию $\overline{M}$. Для простоты пусть $A$, $B$ и $A \bigcap B$ обозначают разбиение $\overline{M}$, аналогичное разбиению $M$. Нетрудно видеть, что $\phi_1$ и $\phi_2$ уже сюръективны и мы приходим к противоречию согласно сказанному выше.

Мы заключаем, что $\phi_2$ не сюръективен, и определим $\rho_2\colon \pi_1(A) \to \pi_1(A)/\mathrm{Im}\phi_1 = \mathbb{Z}_2$ как гомоморфизм факторизации, а $\rho_3 = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае двулистное накрытие $\overline{M}$, соответствующее ядру $\sigma\colon \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$, удовлетворяет рассмотренному случаю *2a*). А так как утверждение теоремы верно для $\overline{M}$, то оно верно и для $M$. Теорема доказана.

*Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за внимание к работе и полезные замечания.*


1. *Болотов Д. В.* Топология плоских слоений коразмерности один // Доп. НАН України. – 2013. – № 9. – С. 16–21.
2. *Болотов Д. В.* Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны // Мат. сб. – 2013. – **204**, № 5. – С. 3–24.
3. *Bell G., Dranishnikov A.* Asymptotic dimension // math.GT/0703766.
4. *Болотов Д. В.* О слоениях сфер // Доп. НАН України. – 2014. – № 8. – С. 7–13.
5. *Wilking B.* On fundamental groups of manifolds of nonnegative curvature // Diff. Geom. and its Appl. – 2000. – **13**, No 2. – P. 129–165.
6. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. – 1958. – **18**. – С. 49–60.
7. *Stuck G.* Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan–Hadamard // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1991. – **313**. – P. 519–522.
8. *Новиков С. П.* Топология слоений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1965. – **14**. – С. 249–278.
9. *Adams S., Freire A.* Nonnegatively curved leaves in foliations // J. Different. Geom. – 1991. – **34**, No 3. – P. 681–700.
10. *Cheeger J., Gromoll D.* The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature // J. Different. Geom. – 1971. – **6**. – P. 119–128.
11. *Nishimori T.* Compact leaves with abelian holonomy // Tohoku Math. J. – 1975. – **27**. – P. 259–272.
12. *Тамура И.* Топология слоений. – Москва: Мир, 1979. – 317 с.
13. *Масси У., Столлингс Д.* Алгебраическая топология. Введение. – Москва: Мир, 1977. – 344 с.


*Физико-технический институт низких температур НАН Украины им. Б. И. Веркина, Харьков*

*Поступило в редакцию 11.06.2014*

**Д. В. Болотов**

## Характеризація пласких шарувань

*Показано, що $C^2$-шарування ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкненому многовиді $M$, шари якого мають скінченно породжену фундаментальну групу, є пласким тоді і тільки тоді, коли $M$ є $K(\pi, 1)$-многовидом.*

**D. V. Bolotov**

## Characterization of flat foliations

*We show that a codimension one $C^2$-foliation of nonnegative Ricci curvature on a closed manifold $M$, whose leaves have finitely generated fundamental group, is flat if and only if $M$ is a $K(\pi, 1)$-manifold.*