Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко

Об интерполяционных и экстремальных свойствах периодических идеальных сплайнов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Доказано существование и экстремальное свойство периодического идеального сплайна, интерполирующего заданную функцию в среднем.

Пусть C^m ($m \in \mathbb{Z}_+$) обозначает пространство m раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $m = 0$) 2π-периодических функций; L_∞ — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной нормой $\|f\| = \|f\|_\infty$. Для $r \in \mathbb{N}$ через L^r_∞ будем обозначать пространство функций $f \in C$ таких, что функция $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_\infty$.

Для $r \in \mathbb{N}$ функцию $s(t) \in C^{r-1}$ назовем сплайном порядка r с узлами в точках

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} := t_0 + 2\pi, \tag{1}$$

если на каждом из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $s(t)$ совпадает с сужением на этот промежуток некоторого алгебраического многочлена степени не выше r.

Идеальным сплайном порядка r назовем сплайн $s(t)$ порядка r с узлами в точках (1), у которого $s^{(r)}(t) = (-1)^i\epsilon$, $\epsilon \in \{1, -1\}$, $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n$.

Для r, $n \in \mathbb{N}$ обозначим через Γ^r_n множество 2π–периодических идеальных сплайнов порядка r с не более чем n узлами.

Идеальные сплайны играют важную роль при точном решении многих экстремальных задач теории аппроксимации (см., например, [1, 2]).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть r, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируемые четные функции с компактными носителями $[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$, положительные на $(-\varepsilon_k, \varepsilon_k)$ и такие, что*

$$\int\limits_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} \varphi_k(x)\,dx = 1, \qquad k = 1, \ldots, 2m+1.$$

Пусть также числа $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2m+1} < 2\pi$ *таковы, что носители* $[x_k-\varepsilon_k, x_k+$ $+\varepsilon_k]$ *функций* $\varphi_k(x-x_k)$ *попарно не пересекаются и содержатся в* $[0, 2\pi)$, $k = 1, \dots, 2m+1$. *Тогда для любой функции* $f \in L^r_\infty$ *существуют число* ξ *и сплайн* $s(t) \in \xi\Gamma^r_{2m}$ *такие, что*

$$\int\limits_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} \varphi_k(x-x_k)s(x)\,dx = \int\limits_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} \varphi_k(x-x_k)f(x)\,dx, \qquad k = 1, \dots, 2m+1.$$

При этом

$$\|s^{(r)}\|_\infty = |\xi| \leqslant \|f^{(r)}\|_\infty. \tag{2}$$

Из теоремы 1, в частности, следует возможность обыкновенной и кратной интерполяции периодическими идеальными сплайнами.

Теорема 2. *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_l < 2\pi$, $k_1, \dots, k_l \leqslant r-1$ — *целые неотрицательные числа такие, что* $\sum\limits_{j=1}^{l} (k_j+1) = 2m+1$. *Тогда для любой функции* $f \in L^r_\infty$ *существуют число* ξ *и сплайн* $s(t) \in \xi\Gamma^r_{2m}$ *такие, что*

$$s^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \qquad j = 0, \dots, k_i; \qquad i = 1, \dots, l.$$

При этом выполняется экстремальное свойство (2).

В частности, если заданы числа $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_{2m+1} < 2\pi$ *и фукнция* $f \in L^r_\infty$, *то существуют число* ξ *и сплайн* $s(t) \in \xi\Gamma^r_{2m}$ *такие, что*

$$s(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, \dots, 2m+1.$$

При этом выполняется экстремальное свойство (2).

Теорема 2 дает периодический аналог результатов, которые в непериодическом случае были получены С. Карлиным [3, 4]. Методы доказательства, используемые нами, значительно проще тех, которые применял С. Карлин, и могут быть использованы для решения других задач.

Приведем основные этапы доказательства теоремы 1. Теорема 2 легко устанавливается с помощью теоремы 1.

Символом $*$ далее будем обозначать операцию свертки 2π-периодических функций. Пусть $f \in C$. Обозначим через $\nu(f)$ количество перемен знака f на периоде. Для $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ положим

$$A_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ijx}}{\operatorname{ch} \varepsilon j}.$$

Отметим некоторые свойства A_ε. Если $f \in C$, то $(A_\varepsilon * f)$ — аналитическая функция на вещественной прямой (см. [5, 6], а также [7, § 3]); $(A_\varepsilon * f)$ равномерно сходится к f при $\varepsilon \to 0$ на вещественной прямой; $\nu(A_\varepsilon * f) \leqslant \nu(f)$ (см., например, [8]); A_ε — четная функция; $\int\limits_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(x)\,dx = 1$. Всюду далее через $B_r(t)$, $r \in \mathbb{N}$, будем обозначать ядро Бернулли порядка r (см., например, [1, § 3.1]).

Положим $C_k := \int\limits_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) f(x)\, dx,\ k = 1, 2, \ldots, 2m+1$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\int\limits_0^{2\pi} \left| c + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right| dx \to \min \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{2m+1} c_k C_k = 1, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} c_k = 0. \tag{5}$$

Свертка с ядром A_ε нам нужна для того, чтобы подынтегральная функция была аналитической, а значит, минимизируемая функция была непрерывно дифференцируемой по параметрам c и c_k, $k = 1, \ldots, 2m+1$. Нетрудно доказать, что минимум в экстремальной задаче (3)–(5) существует.

Введем функцию Лагранжа:

$$L := \eta \int\limits_0^{2\pi} \left| c + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right| dx + \lambda \left(\sum_{k=1}^{2m+1} c_k C_k - 1 \right) + \mu \sum_{k=1}^{2m+1} c_k.$$

Согласно методу неопределенных множителей Лагранжа (см. например, [9, § 2]), существуют числа $\eta_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon \in \mathbb{R}$ такие, что $\eta_\varepsilon^2 + \lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \neq 0$ (мы можем, например, считать, что $\eta_\varepsilon^2 + \lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 = 1$), и $c^\varepsilon, c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \ldots, c_{2m+1}^\varepsilon \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенствам (4) и (5), такие, что

$$\eta_\varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn} \left[c^\varepsilon + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k^\varepsilon (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right] dx = 0$$

и для $j = 1, 2, \ldots, 2m+1$

$$\eta_\varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn} \left[c^\varepsilon + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k^\varepsilon (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right] (A_\varepsilon * B_r * \varphi_j)(x - x_j)\, dx + \lambda_\varepsilon C_j + \mu_\varepsilon = 0.$$

С помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ отсюда выводится, что существуют числа η, λ, μ, $\eta^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 1$ и функция $g(x)$, почти всюду отличная от нуля и такая, что $\nu(g) \leqslant 2m$, для которых $\eta \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn} g(x)\, dx = 0$, и для $k = 1, 2, \ldots, 2m+1$

$$\eta \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn} g(x) (B_r * \varphi_k)(x - x_k)\, dx + \lambda C_k + \mu = 0. \tag{6}$$

Предположение о том, что $\eta = 0$ или $\lambda = 0$ приводит к противоречию. Это значит, что для функции $h(x) := (\operatorname{sgn} g * B_r)(x)$ имеем $h^{(r)}(x) = \operatorname{sgn} g(x)$, а следовательно, $h(x) \in \Gamma_{2m}^r$.

Из (6) получаем, что для $k = 1, \ldots, 2m+1$

$$
\begin{aligned}
0 = \eta \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} g(x)(B_r * \varphi_k)(x - x_k)\, dx + \lambda C_k + \mu = \\
&= (-1)^r \eta (\operatorname{sgn} g * B_r * \varphi_k)(x_k) + \lambda C_k + \mu = (-1)^r \eta (\varphi_k * h)(x_k) + \lambda C_k + \mu = \\
&= (-1)^r \eta \int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) h(x)\, dx + \lambda C_k + \mu
\end{aligned}
$$

(последнее равенство верно в силу четности $\varphi_k(x)$).

Это значит, что идеальный сплайн $s(x) := -((-1)^r \eta h(x) + \mu)/\lambda$ является искомым интерполяционным сплайном.

Покажем, что $\|s^{(r)}\|_\infty \leqslant \|f^{(r)}\|_\infty$. Предположим противное. Пусть $\|s^{(r)}\|_\infty > \|f^{(r)}\|_\infty$. Положим $\delta(x) := s(x) - f(x)$. Тогда $\delta^{(r)}(x) = s^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)$ может менять знак только в узлах сплайна $s(x)$, а значит, $\nu(\delta^{(r)}) \leqslant 2m$. Так как $\int\limits_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k)\delta(x)\, dx = 0$, функция $\delta(x)$ не равна нулю тождественно ни на каком интревале из $[0; 2\pi)$ и $\varphi_k(x)$ — неотрицательная функция ($k = 1, \ldots, 2m+1$), то на каждом интервале $(x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k)$ функция $\delta(x)$ меняет знак. Поскольку носители функций $\varphi_k(x - x_k)$, $k = 1, \ldots, 2m+1$, попарно не пересекаются, то $\nu(\delta) \geqslant 2m+1$, что в силу периодичности функции δ приводит к противоречию. Теорема доказана.

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 423 с.
2. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
3. *Karlin S.* Some variational problems on certain Sobolev spaces and perfect splines // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, No 1. – P. 124–128.
4. *Karlin S.* Interpolation properties of generalized perfect splines and the solutions of certain extremal problems. I // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – **206**. – P. 25–66.
5. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **17**.
6. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
8. *Mairhuber J. C., Schoenberg I. J., Williamson R. E.* On variation diminishing transformations of the circle // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1959. – **8**, No 2. – P. 241–270.
9. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 209 с.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 02.06.2014

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко

Про інтерполяційні та екстремальні властивості ідеальних періодичних сплайнів

Доведено існування та екстремальну властивість періодичного ідеального сплайна, що інтерполює задану функцію в середньому.

V. F. Babenko, O. V. Kovalenko

On interpolational and extremal properties of periodic perfect splines

The existence and the extremal property of a periodic perfect spline, which interpolates the given function in mean, are proved.