

Н. В. Никитина

## О близких к синхронным движениях заряженной частицы в электромагнитной волне

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

*Приводятся условия существования близких к синхронным движений заряженной частицы в электромагнитной волне. Рассмотрен эффект образования сгустка ионизированной плазмы*

Рассматривается электродинамическая задача, которая связана с общей задачей синхронизации динамических систем [1], а именно, движение заряженной частицы в стоячей электромагнитной волне. В обзоре, посвященном шаровым молниям (ШМ) [2], большое внимание уделено исследованиям П. Л. Капицы [3]. Приведем постановку задачи, согласно [2–4], о движении заряженной частицы в стоячей электромагнитной волне. Перечислим три основные предположения рабочей гипотезы [3].

1. Во время свечения к ШМ непрерывно подводится энергия. Известно, что поглощение электромагнитной энергии колебаний происходит при резонансе, когда собственный период электромагнитных колебаний плазмы совпадает с периодом поглощения излучения.

2. Возможно, единственный способ подвода энергии — это поглощение приходящих извне интенсивных радиоволн. Источником радиоволн является колебательный процесс, происходящий в ионизированной атмосфере.

3. Местами, наиболее благоприятными для образования ШМ, будут те области, где радиоволны достигают наибольшей интенсивности. Поглощение электромагнитных колебаний ионным газом может происходить только в определенных поверхностях, параллельных земле. Этот процесс кратковременный.

В данной работе показано, что при определенном уровне диссипации система входит в состояние, близкое к синхронизму, и именно это состояние характерно для возникновения ШМ. Таким образом, в простейшей модели ШМ можно установить критерий синхронизма и объяснить механизм образования этого явления.

**Постановка задачи. Простейшая модель.** Сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, является силой Лоренца

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right),$$

где  $q$  — заряд частицы;  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция;  $\mathbf{v}$  — скорость частицы;  $c$  — скорость света [4]. В системе координат  $OXYZ$  проекции векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  имеют вид

$$\begin{aligned} E_X &= 0, & E_Y &= E_0 \cos \omega t \sin kX, & E_Z &= 0, \\ B_X &= 0, & B_Y &= 0, & B_Z &= -\frac{E_0}{c} \sin \omega t \cos kX, \end{aligned}$$

где  $\omega$  — частота колебаний;  $k$  — волновое число. Фазы электрических и магнитных полей смещены во времени на  $\pi/2$ , поэтому энергия в среднем за период равна нулю, что характерно для стоячей волны.

Уравнения движения частицы можно представить в виде

$$\begin{aligned}\ddot{X} + \frac{H}{M}\dot{X} + \frac{qE_0}{cM}\dot{Y} \sin \omega t \cos kX &= 0, \\ \ddot{Y} + \frac{H}{M}\dot{Y} - \frac{qE_0}{M} \cos \omega t \sin kX - \frac{qE_0}{cM}\dot{X} \cos \omega t \sin kX &= 0, \\ \ddot{Z} + \frac{H}{M}\dot{Z} &= 0,\end{aligned}$$

где  $H$  — коэффициент сопротивления;  $M$  — масса частицы. Заметим, что координата  $Z$  не входит в первые два уравнения.

Перейдем к безразмерным переменным  $x = kX$ ,  $y = kY$ ,  $\tau = \omega t$ , введем новую переменную  $z = \dot{y}$ . Учитывая, что  $\omega/k = c$ , уравнения движения частицы в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} - y = 0, \quad \frac{dy}{d\tau} + hy + Az \cos x \sin \tau &= 0, \\ \frac{dz}{d\tau} + hz - A \sin x \cos \tau - Ay \cos x \sin \tau &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $h = H/(M\omega)$ ,  $A = qE_0/(cM\omega)$ . Так как в уравнения (1) включена сила сопротивления, волна будет перемещаться параллельно плоскости  $xy$  в сторону устойчивой особой точки. Уравнения (1) можно рассматривать в качестве абстрактной трехмерной модели, которая описывает также движение заряженной частицы в электромагнитной волне.

Приведем систему (1) к виду автономной системы

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u, \\ \frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -hy + Avz \cos x, \quad \frac{dz}{d\tau} = -hz + Au \sin x - Avy \cos x,\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$u = \cos \tau, \quad v = -\sin \tau, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.\tag{3}$$

Введем малое отклонение  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  в системе (2) от частных решений  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  и составим уравнения в вариациях [5]

$$\begin{aligned}\frac{d\delta u}{d\tau} - \delta v = 0, \quad \frac{d\delta v}{d\tau} - \delta u = 0, \\ \frac{d\delta x}{d\tau} - \delta y = 0, \quad \frac{d\delta y}{d\tau} + h\delta y - A\bar{z} \cos \bar{x}\delta v + A\bar{v}\bar{z} \sin \bar{x}\delta x - A\bar{v} \cos \bar{x}\delta z = 0, \\ \frac{d\delta z}{d\tau} + h\delta z - A \sin \bar{x}\delta u + A\bar{y} \cos \bar{x}\delta v - A\bar{u} \cos \bar{x}\delta x - A\bar{v}\bar{y} \sin \bar{x}\delta x + A\bar{v} \cos \bar{x}\delta y = 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет вид

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^3 + 2\lambda^2 h + \lambda(h^2 + A^2 \bar{v}^2 \cos^2 \bar{x} + A\bar{v}\bar{z} \sin \bar{x}) - A^2 \bar{v}\bar{u} \cos^2 \bar{x} - A^2 \bar{v}^2 \bar{y} \sin \bar{x} \cos \bar{x} + Ah\bar{v}\bar{z} \sin \bar{x}) = 0. \quad (5)$$

Корни характеристического уравнения (5) разделяются. Имеют место два уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 1 &= 0, \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 h + \lambda(h^2 + A^2 \bar{v}^2 \cos^2 \bar{x} + A\bar{v}\bar{z} \sin \bar{x}) - A^2 \bar{v}\bar{u} \cos^2 \bar{x} - A^2 \bar{v}^2 \bar{y} \sin \bar{x} \cos \bar{x} + \\ &+ Ah\bar{v}\bar{z} \sin \bar{x} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  определяются решением (3). Два корня уравнения имеют вид  $\lambda_{1,2} = \pm i$  и соответствуют первым двум уравнениям системы (4), остальные находятся из второго уравнения (6).

Разделение корней характеристического уравнения (5) является предпосылкой того, что частица может совершать движение в состоянии, близком к синхронизации. Вид характеристического уравнения (5) аналогичен виду характеристического уравнения при периодическом воздействии на нелинейный осциллятор, который порождает предельный цикл [5]. Множитель  $(\lambda^2 + 1)$  в характеристическом уравнении диссипативной системы (5) можно рассматривать как внешний сигнал, что указывает на возможность возникновения движений близких, к синхронизации системы (1). Это качество при определенном значении параметров превратит траектории движения частиц в сгусток ионизированной плазмы.

Введем предположение о малости коэффициента  $A$ . Тогда на основе анализа характеристических показателей (ХП) точек траектории системы (1) можно установить порядок второго коэффициента  $h$  системы (1), который вызывает движение, близкое к синхронизованному. Качество ХП точек траектории должно ввести систему (1) в состояние, близкое к синхронизму. Процесс возникает на конечном отрезке времени.

**Консервативная система.** Движение частицы в стоячей электромагнитной волне определяется уравнениями

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u, \quad \frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = Avz \cos x, \quad \frac{dz}{d\tau} = Au \sin x - Avy \cos x. \quad (7)$$

Особая точка  $O(u = 0, v = 0, x = 0, y = 0, z = 0)$  имеет такие ХП:  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ . Покажем, что из трех нулевых корней два корня кратные. Характеристическая матрица линейной системы (7) распадается на три. Одна из них, соответствующая третьему и четвертому уравнениям системы (7), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (8)$$

При помощи элементарных преобразований характеристическая матрица (8) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Корни  $\lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_4 = 0$  являются кратными.

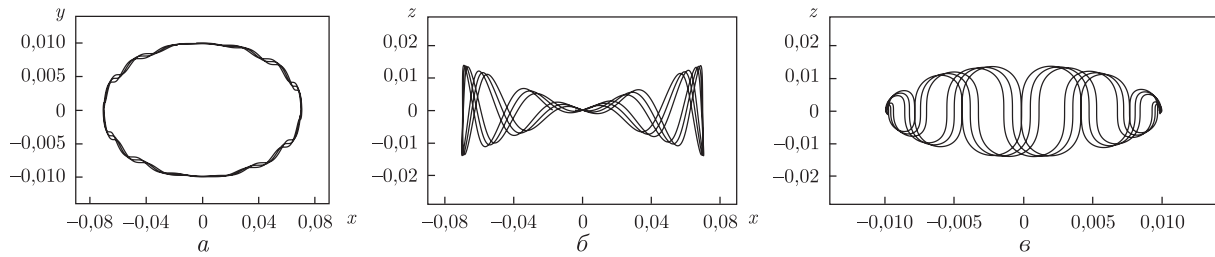


Рис. 1

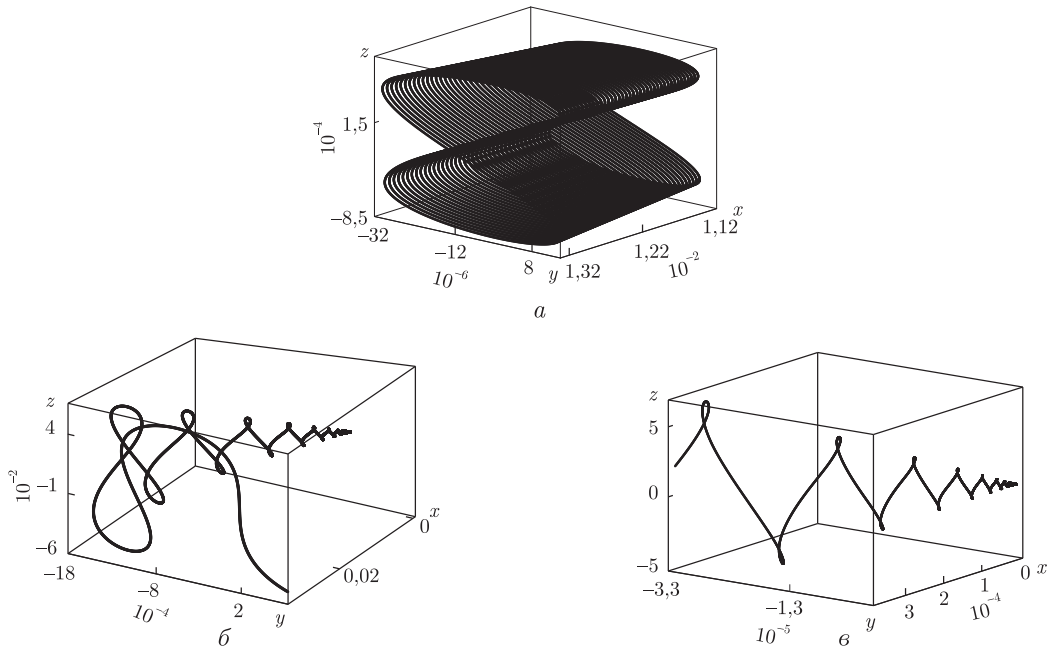


Рис. 2

Рассмотрим характеристическое уравнение системы в вариациях (5) при  $h = 0$ . Для определения  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  применим численное решение системы (7). ХП уравнения (5) разделяются на две группы: периодические  $\lambda_{1,2} = \pm i$  и седлофокусные  $\lambda_3 < 0$ ,  $\text{Re } \lambda_{4,5} > 0$ . Седловая величина при этом  $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$  для всех точек траектории.

Траектория не замыкается и не уходит, а бесконечно наматывается на орбиту (рис. 1, а, б, в, начальные возмущения лишь  $y(0) = 0,01$ ).

**Система с диссипацией.** Разделение ХП в характеристическом уравнении (5) позволяет предсказать существование почти синхронного режима колебаний при  $h \neq 0$  с частотой, равной единице (период колебаний  $T = 2\pi$ ). На рис. 2, а приведено пространственное изображение синхронизированных колебаний при  $h = 3$ ;  $A = 0,2$ ;  $x(0) = y(0) = 0,01$  на отрезке  $\tau \in (5, T \cdot 40)$ , где  $T = 2\pi$ . Синхронизация происходит на конечном промежутке времени, т.е. имеет место переходный процесс, который включает почти синхронизированные колебания. Траектория на отрезке  $\tau \in (5, T \cdot 40)$  имеет следующие ХП:  $\lambda_{1,2} = \pm i$  и узел-фокусные  $\lambda_3 > 0$ ,  $|\lambda_3| \ll 1$ ,  $\text{Re } \lambda_{4,5} < 0$ ,  $|\text{Re } \lambda_{4,5}| \gg 1$ , так, что  $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0$ ,  $|\sigma| \gg 1$ . Эффект образования сгустка ионизированной плазмы происходит благодаря сильному притяжению витков ( $\text{Re } \lambda_{4,5} < 0$ ,  $|\text{Re } \lambda_{4,5}| \gg 1$ ;  $|\sigma| \gg 1$ ).

При уменьшении диссипации ( $h = 0,3$ ) траектории заряженных частиц не представляют собой густок ионизированной плазмы. На рис. 2, б приведено движение при  $h = 0,3$ ;  $A = 0,2$ ;  $x(0) = y(0) = 0,01$  на отрезке  $\tau \in (5, T \cdot 40)$ , где  $T = 2\pi$ , на рис. 2, в — движение при  $h = 0,3$ ;  $A = 0,2$ ;  $x(0) = y(0) = 0,01$  на отрезке  $\tau \in (60, T \cdot 40)$ . Траектория имеет следующие ХП:  $\lambda_{1,2} = \pm i$  и узел-фокусные  $\lambda_3 > 0$ ,  $|\lambda_3| \ll 1$ ,  $\text{Re } \lambda_{4,5} < 0$ ,  $|\text{Re } \lambda_{4,5}| < 1$ , так, что  $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0$ ,  $|\sigma| < 1$ . В этом случае слабое притяжение в точках траектории не вызывает движение, близкое к синхронному, с частотой, равной  $\omega = 1$ .

Отметим некоторые особенности качественного анализа движения заряженной частицы в электромагнитной волне.

1. Характеристическое уравнение (5), которое включает частные решения системы (2), позволяет указать ХП любой точки на траектории движения частицы и рассмотреть механизм образования процесса синхронизации.

2. Множитель  $(\lambda^2 + 1)$  в характеристическом уравнении диссипативной системы (5) указывает на возможность синхронизации системы (1) с частотой  $\omega = 1$ .

3. В диссипативной модели ШМ поиск синхронного режима связан с нахождением значения параметра  $h$ , при котором движение двух объектов объединены в единую систему. Численное значение параметра  $h$  в движении, близком к синхронизации, на порядок выше значения параметра  $A$ .

1. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. — Москва: Наука, 1971. — 894 с.
2. Сигнер С. Природа шаровой молнии. — Москва: Мир, 1973. — 267 с.
3. Капица П. Л. О природе шаровой молнии // Докл. АН СССР. — 1955. — **101**, № 2. — С. 245–248.
4. Джэксон Дж. Классическая электродинамика. — Москва: Мир, 1965. — 702 с.
5. Никитина Н. В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. — Киев: Феникс, 2012. — 235 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 29.05.2014

**Н. В. Нікітіна**

### **Про рух, близький до синхронного зарядженої частинки в електромагнітній хвилі**

*Встановлено умови існування близьких до синхронних рухів зарядженої частинки в електромагнітній хвилі. Розглянуто ефект утворення згустка іонізованої плазми.*

**N. V. Nikitina**

### **About the motions close to synchronous ones of a charged particle in an electromagnetic wave**

*The conditions of existence of the motions close to synchronous ones of a charged particle in an electromagnetic wave are presented. The effect of formation of a cluster of the ionized plasma is considered.*