

Достатні умови збіжності асимптотичного ряду В.О. Марченка для власних значень задачі Штурма–Ліувілля

За допомогою *FD-методу* знайдено достатні умови збіжності асимптотичного ряду В.О. Марченка для $\sqrt{\lambda_n}$, де λ_n — власне значення задачі Штурма–Ліувілля з поліноміальним потенціалом.

Розглядається задача Штурма–Ліувілля

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (1)$$

для якої треба знайти достатні умови збіжності асимптотичного ряду В.О. Марченка для $\sqrt{\lambda_n}$ у випадку поліноміального потенціалу

$$q(x) = \sum_{i=0}^r c_i x^i. \quad (2)$$

Застосуємо до цієї задачі *FD-метод* [1, 2]. Тоді будемо мати

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{2m} \lambda_n^{(j)} + R_n^{(2m)}, \quad R_n^{(2m)} = \sum_{j=2m+1}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \quad (3)$$

$$|R_n^{(2m)}| \leq \|q\|_{\infty} \frac{(r_n^{(0)})^{2m}}{1 - r_n^{(0)}} \alpha_{2m} = \|q\|_{\infty} \frac{(r_n^{(0)})^{2m}}{1 - r_n^{(0)}} 2 \frac{(4m-1)!!}{(4m+2)!!} \quad (4)$$

і наведена оцінка залишкового члена буде вірною за умови, що

$$|r_n^{(0)}| = \frac{4\|q\|_{\infty}}{\pi^2(2n-1)} < 1. \quad (5)$$

Алгоритм знаходження поправок до власних значень $\lambda_n^{(j+1)}$ і відповідних поправок до власних функцій $u_n^{(j+1)}(x)$ є таким:

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^1 q(x) u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x) dx,$$

$$u_n^{(j+1)}(x) = \int_0^1 g_n(x, \xi) \left(- \sum_{p=0}^j \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(\xi) + q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) \right) d\xi, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x),$$

де

$$g_n(x, \xi) = \left(\frac{(x - H(x - \xi)) \cos(n\pi x)}{\pi n} - \frac{\sin(n\pi x)}{2\pi^2 n^2} \right) \sin(n\pi \xi) + \\ + \frac{\sin(n\pi x)(\xi - H(\xi - x)) \cos(n\pi \xi)}{\pi n},$$

$H(z)$ — функція Хевісайда.

Оскільки інтегрування тут здійснюється аналітично, цей алгоритм може бути перетворений до такого вигляду, в якому використовуються тільки арифметичні операції (див. [3]).

Враховуючи залежність $\lambda_n^{(j)}$ від n , перепишемо (3) таким чином:

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}} + R_n^{(2m)}. \quad (6)$$

За аналогією з наслідком теореми 1.5.1 В. О. Марченка [4, с. 75] будемо шукати $\sqrt{\lambda_n}$ у вигляді

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} + \alpha_n^{(2m)}. \quad (7)$$

Знаходимо параметри виразу (7) з рівняння

$$(n\pi)^2 + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}} + R_n^{(2m)} = \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} + \alpha_n^{(2m)} \right]^2, \quad (8)$$

приврівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $n\pi$. Обчислимо праву частину (8). Матимемо

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \sum_{0 \leq j \leq \left[\frac{(r+2)m-1}{2} \right]} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j}} + \sum_{0 \leq s+j \leq (r+2)m-2} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} + \\ + \left[\sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2} \right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2, j \neq s} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} + \right. \\ \left. + 2\alpha_n^{(2m)} \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right] + [\alpha_n^{(2m)}]^2 \right]. \quad (9)$$

Порівняння з (6) приводить до такої системи:

$$\sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}} = \sum_{0 \leq j \leq \left[\frac{(r+2)m-1}{2} \right]} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j}} + \\ + \sum_{0 \leq s+j \leq (r+2)m-2, j \neq s} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
R_n^{(2m)} = & \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2, j \neq s} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} + \\
& + 2\alpha_n^{(2m)} \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right] + [\alpha_n^{(2m)}]^2. \tag{11}
\end{aligned}$$

З рівняння (10) однозначно знаходимо b_j , $j = 0, 1, \dots, (r+2)m-1$, а з квадратного рівняння (11) — $\alpha_n^{(2m)}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(2m)} = & - \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right] + \left(\left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right]^2 + \right. \\
& \left. + R_n^{(2m)} - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} \right)^{1/2} = \\
= & \left[R_n^{(2m)} - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{\substack{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2, \\ j \neq s}} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} \right] \times \\
& \times \left(n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} + \left[\left(n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right)^2 + R_n^{(2m)} - \right. \tag{12} \\
& \left. - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{\substack{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2, \\ j \neq s}} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} \right]^{1/2} \right)^{-1} = \\
= & \sqrt{\lambda_n} - \left(\lambda_n - R_n^{(2m)} + \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2, \\ j \neq s}} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Так, розв'язок рівняння (10) має вигляд такої рекурентної послідовності:

$$b_k = - \sum_{p=0}^{k-1} b_p b_{k-1-p} + a_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{13}$$

Будемо шукати розв'язок рекурентної послідовності (13) за допомогою методу твірних функцій. З цією метою введемо позначення

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j, \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \tag{14}$$

де $f(z)$ — невідома функція ($b_j, j = 0, 1, 2, \dots$, — шукані величини), а $g(z)$ — відома функція. Помножимо обидві частини (13) на z^k і просумуємо за k від 1 до ∞ , тоді одержимо рівняння

$$f(z) = -zf^2(z) + g(z),$$

розв'язком якого буде вираз

$$f(z) = \frac{2g(z)}{1 + \sqrt{1 + 4zg(z)}}. \quad (15)$$

Звідси маємо явну формулу для знаходження $b_j, j = 0, 1, 2, \dots$:

$$b_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{2g(z)}{1 + \sqrt{1 + 4zg(z)}} \right) \Big|_{z=0}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Зокрема, матимемо

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, & b_1 &= a_1 - a_0^2, & b_2 &= a_2 - 2a_1a_0 + 2a_0^3, \\ b_3 &= a_3 - 2a_2a_0 + 6a_1a_0^2 - a_1^2 - 5a_0^4, & & \dots \end{aligned}$$

Таким чином, можна сформулювати таке твердження.

Теорема. *Нехай виконується умова (5), тоді:*

1) має місце співвідношення (8), де складові правої частини визначаються формулами (12), (16);

2) вірне граничне співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right] = n\pi + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} = \sqrt{\lambda_n}. \quad (17)$$

Доведення потребує тільки (17). Введемо позначення

$$w_n = R_n^{(2m)} - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{(r+2)m-1 \leq s+j \leq 2(r+2)m-2} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}},$$

тоді

$$\alpha_n^{(2m)} = \sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n - w_n} \quad (18)$$

і з (7) випливає, що $\alpha_n^{(2m)}$ — дійсне число та

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w_n = \omega < \lambda_n.$$

Оскільки ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}$ є збіжним, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=(r+2)m-1}^{2(r+2)m-2} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} w_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(- \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]-1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{b_{\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]}}{(2n\pi)^{2\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Остання рівність разом з (18) доводить твердження 2, а отже, і всю теорему.

Зауваження 1. Наслідок на с. 75 роботи [4] у деяких випадках може бути уточнений. Так, нехай $q(x) = a(-1/2 + H(x - 1/2))$, $|a/(n\pi)| < 1$. Тоді будуть вірними співвідношення

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}}, \quad \sqrt{\lambda_n} = n\pi + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}, \quad (19)$$

де, згідно з [5],

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= a^2 \frac{2 \cos(\pi n) + 1}{4}, & a_2 &= -a^4 \frac{\cos(\pi n)}{48}, \\ a_3 &= -a^4 \frac{5 + 2 \cos(\pi n)}{4} + a^6 \frac{\cos(\pi n)}{3840}, & a_4 &= a^6 \frac{7 + 2 \cos(\pi n)}{48} - a^8 \frac{\cos(\pi n)}{645120}, \\ a_5 &= a^6 \frac{3(3 + 8 \cos(\pi n))}{4} - a^8 \frac{24 + 11 \cos(\pi n)}{3840} + a^{10} \frac{\cos(\pi n)}{362880}, & \dots, \\ b_0 &= 0, & b_1 &= a_1, & b_2 &= a_2, & b_3 &= -a^4 \frac{25 + 12 \cos(\pi n)}{48} + a^6 \frac{\cos(\pi n)}{3840}, \\ b_4 &= a^6 \frac{16 + 5 \cos(\pi n)}{96} - a^8 \frac{\cos(\pi n)}{645120}, & \dots \end{aligned}$$

Тут $q(x) \in L_2(0, 1)$, $q(x) \notin W_2^1(0, 1)$ і для того щоб функція $q(x)$ мала таку гладкість, згідно з наслідком [4, с. 75], необхідно і достатньо, щоб мала місце асимптотична рівність

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2n\pi} + \frac{\tilde{\alpha}_n}{(2n\pi)^2}, \quad (20)$$

де $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_n = 0$. Тоді як за умови $|a/(n\pi)| < 1$ буде мати місце не тільки (20), а й (19).

Зауваження 2. Достатня умова збіжності FD -методу (5) відносно її поведінки за порядковим номером власного значення n не залежить від гладкості потенціалу $q(x)$ так само, як і оцінки поведінки поправок до власних значень $\lambda_n^{(j)}$. Варто сподіватись, що при збільшенні гладкості потенціалу умова (5) буде послаблюватись. Засобами комп'ютерної алгебри показано [5], що при низькій гладкості потенціалу оцінки поправок до власних значень $\lambda_n^{(j)}$ є непокращуваними відносно порядку n . Так, коли $q(x) = \delta(x - 1/\sqrt{2})$, маємо $\lambda_n^{(j)} = O(1/n^{j-1})$, тоді як при кусково постійному потенціалі $\lambda_n^{(j)} = O(1/n^j)$, що й підтверджує наші сподівання.

1. Макаров В. Л. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34–39.

2. Макаров В. Л. *FD-метод – экспоненциальная скорость сходимости* // Обчисл. та прикл. математика. – 1997. – **82**. – С. 69–74.
3. Макаров В. Л., Романюк Н. М. Нові властивості *FD-методу* при його застосуваннях до задач Штурма–Ліувілля // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 26–31.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма–Ліувілля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1997. – 332 с.
5. Макаров В. Л., Романюк Н. М., Лазурчак І. І. Експериментально-аналітичне дослідження властивостей складових *FD-методу* при його застосуванні до задач Штурма–Ліувілля // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 3. – С. 145–170.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 26.06.2014

Академик НАН Украины **В. Л. Макаров**

**Достаточные условия сходимости асимптотического ряда
В. А. Марченко для собственных значений задачи
Штурма–Ліувілля**

*С помощью *FD-метода* найдены достаточные условия сходимости асимптотического ряда В. А. Марченко для $\sqrt{\lambda_n}$, где λ_n – собственное значение задачи Штурма–Ліувілля с полиномиальным потенциалом.*

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov**

**Sufficient conditions for the convergence of the V. A. Marchenko
asymptotic series for eigenvalues of the Sturm–Liouville problem**

We state sufficient conditions for the convergence of the V. A. Marchenko asymptotic series for $\sqrt{\lambda_n}$, where λ_n are the eigenvalues of the Sturm–Liouville problem with polynomial potential, by using the functional discrete method.