УДК 531.395

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПАДЕНИИ ШАРА, РАДИУС КОТОРОГО УБЫВАЕТ ПО ДРОБНО-ЛИНЕЙНОМУ ЗАКОНУ

В работе поставлена цель построения математической модели движения шара переменного радиуса и массы. Методом исследования выбран аналитический способ решения задачи Коши для нелинейного уравнения движения с переменными коэффициентами. Впервые в цилиндрических функциях построено замкнутое аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения вертикального падения сферического тела переменной массы при дробно-линейном убывании его радиуса во времени и квадратичном сопротивлении воздушной среды. Исследована асимптотика поведения решения.

В роботі поставлена мета побудови математичної моделі руху кулі змінного радіуса та маси. Методом дослідження обрано аналітичний спосіб розв’язання задачі Коші для нелінійного рівняння руху зі змінними коефіцієнтами. Вперше в циліндричних функціях побудовано замкнутий аналітичний розв’язок нелінійного диференціального рівняння вертикального падіння сферичного тіла змінної маси при дробово-лінійному убуванні його радіуса з часом та квадратичному опорі повітряного середовища. Досліджено асимптотику поведінки розв’язку.

The paper deals with building a mathematical model of motion of the sphere with variable radius and mass. The analytical method for solving the Cauchy problem for a nonlinear equation of motion with variable coefficients is the research method. For the first time a closed analytic solution of a nonlinear differential equation of a vertical fall of a spherical variable-mass body is built in cylindrical functions when its radius is reduced fractionally and linearly in time and quadratic resistance of the air environment. The asymptotic behavior of solutions is investigated.

Актуальность темы и цель исследования. Как известно, начало исследованию движения тел переменной массы положено в работах И.В. Мещерского [1] и К.Э. Циолковского [2]. В дальнейшем это научное направление развивались в связи с проектированием реактивной техники, где направленное удаление частиц движущегося тела создаёт реактивную силу. Наряду с этим в природе встречаются случаи, когда во время движения происходит не направленное, а всестороннее убывание массы тела. Так изменение массы может происходить при испарении движущихся капель в газовой среде, при полёте в атмосфере догорающих частиц твёрдых топлив, вследствие вытекания (откачивания или накачивания) жидкости, в результате химических преобразований, путём изменения элементов системы (наматывания нитей или канатов на барабаны). Моделирование движения частиц переменной массы проводят также при исследовании разгона испаряющихся капель жидкости конвективным потоком [3]. Во время всестороннего отделения массы от тела, да ещё с малой относительной скоростью, реактивная сила незначительна и её можно не учитывать при расчёте движения. Но изменение размеров тела влияет на сопротивление его полёту, что приводит к переменным коэффициентам в уравнении движения и усложняет теоретическое исследование.

При движении тела переменного размера появляется ряд особенностей. Процесс движения становится нестационарным. Поэтому при падении тела переменной массы теряет смысл понятие «скорость витания», величину которой определил Н. Е. Жуковский [4]. Траектория тела убывающей массы может обрываться вследствие полного сгорания или испарения движущегося тела, что исключено при полёте тела постоянной массы. Описание туманов тесно связанно с изучением эффекта зависания тела (частицы) [5]. Следует также упомянуть о наличии эффекта отражения лёгкого тела встречным потоком [6], а также о существовании экстремума скорости, характерного только при движении малой частицы переменной массы [7, 8]. Таким образом, даже при отсутствии реактивной силы изучение баллистики тела убывающей массы представляет научный интерес.

При моделировании движения тела используются различные законы изменения размера тела [9, 10], в том числе линейный, экспоненциальный и закон В. Срезневского. Известен также дробно-линейный закон, которому уделено меньше внимания. Его рассматривали В. А. Сапа и М. Н. Сагитов [11] в случае линейного аэродинамического сопротивления движению.

Уравнение вертикального падения тела и его аналитическое решение. Предполагаем, что изменение радиуса r падающего сферического тела описывается дробно-линейной функцией времени t:

$$r = \frac{r_0}{1+\gamma t}, \tag{1}$$

где $r_0 = r(0)$; γ – параметр, характеризующий интенсивность убывания радиуса и массы шара.

Ориентируясь на скорость полёта $\upsilon > 10$ м/с, примем квадратичную зависимость сил аэродинамического сопротивления R_c от скорости

$$R_c = C_\nu S \upsilon^2, \tag{2}$$

здесь C_ν – коэффициент сопротивления; S – площадь поперечного сечения сферического тела.

С учётом введенных предположений (1) и (2) падение однородного шара описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{z} + \frac{k}{r}\dot{z}^2 = g, \tag{3}$$

где $k = \frac{3}{4}\frac{C_\nu}{\rho}$ – сведённый коэффициент сопротивления; ρ – удельный вес тела; g – ускорение свободного падения; $\dot{z}(t) = \upsilon(t)$ – скорость центра тела; $z = z(t)$ – вертикальное перемещение центра тела по оси oz, направленной вниз; точка над символом означает производную по времени.

Уравнением (3) может моделироваться вертикальное движение испаряющихся капель огнетушащих веществ, физическая постановка таких задач изложена в [15].

Начальными условиями к (3) берём:

$$z(0) = 0; \quad \dot{z}(0) = \upsilon_3, \tag{4}$$

обозначив через υ_3 начальную скорость полёта.

Учитывая (1), преобразованием

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr}$$

представляем уравнение (3) в форме

$$\frac{d\upsilon}{dr} - k_0 \frac{\upsilon^2}{r^3} = -\frac{g_0}{r^2}, \tag{5}$$

где $k_0 = \frac{kr_0}{\gamma}$; $g_0 = \frac{gr_0}{\gamma}$.

Запишем далее уравнение (5) в виде

$$\upsilon_r' = f(r)\upsilon^2 + h(r), \tag{6}$$

где $f(r) = \frac{k_0}{r^3}$; $h(r) = -\frac{g_0}{r^2}$.

Уравнение (6) является общим уравнением Риккати [12]. Используя преобразование

$$\upsilon = \exp\left(-\int f(r)u(r)dr\right), \tag{7}$$

переводим (6) в линейное дифференциальное уравнение

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + 3r\frac{du}{dr} - \frac{k_0 g_0}{r^3}u = 0. \tag{8}$$

Дифференциальное уравнение (8) является уравнением типа Бесселя, общим решением которого является [13]:

$$u(r) = \frac{1}{r}\left[c_1 I_{2/3}(\xi) + c_2 K_{2/3}(\xi)\right]. \tag{9}$$

Здесь $\xi = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{k_0 g_0}}{r^{3/2}}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_{2/3}(\xi), K_{2/3}(\xi)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда порядка 2/3.

Обратное преобразование для нахождения решения уравнения Риккати имеет вид [12]

$$\upsilon = -\frac{u_r'}{uf(r)}. \tag{10}$$

Для нахождения производных используем формулы:

$$\frac{d}{d\xi}I_{2/3}(\xi) = I_{-1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi}I_{2/3}(\xi),$$

$$\frac{d}{d\xi}K_{2/3}(\xi) = -K_{1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi}K_{2/3}(\xi).$$

В итоге после ряда преобразований получаем первый интеграл уравнения (3)

$$\upsilon = \sqrt{\frac{rg_0}{k_0}} \cdot \frac{cI_{-1/3}(\xi) - K_{1/3}(\xi)}{cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi)}. \tag{11}$$

Здесь $c = c_1 c_2^{-1}$; $I_{1/3}(\xi), K_{1/3}(\xi)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса 1/3.

Решение (11) удовлетворяет второму начальному условию в (4), при

$$c = \frac{bK_{2/3}(\xi_0) + K_{1/3}(\xi_0)}{I_{-1/3}(\xi_0) - bI_{2/3}(\xi_0)}, \tag{12}$$

где $\xi_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_0 g_0}{r_0^3}}$; $b = \upsilon_0\sqrt{\frac{k_0}{r_0 g_0}}$.

Таким образом, используя таблицы функций Бесселя [13, 14] или вычисляя цилиндрические функции на компьютере, с помощью выражений (11) и (12) несложно определить скорость падения тела в любой момент времени.

Учитывая асимптотические представления функций Бесселя и Макдональда малого аргумента [13]:

$$K_{2/3}(\xi_0) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\xi_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}},\ K_{1/3}(\xi_0) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\xi_0}{2}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$I_{-1/3}(\xi_0) = \left(\frac{\xi_0}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} / \Gamma\left(\frac{2}{3}\right);\ I_{2/3}(\xi_0) = \left(\frac{\xi_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}} / \Gamma\left(\frac{5}{3}\right),$$

в которых $\Gamma(x)$ – гамма-функция, получаем асимптотику решения (11) при малом коэффициенте сопротивления движению k, когда $kg << r\gamma^2$. Она имеет вид:

$$\upsilon^*(t) = \upsilon_0 \frac{1 + 1{,}17767\xi_0^{4/3}}{1 + 1{,}17767\xi^{4/3} + \frac{k\upsilon_0}{2\gamma r_0}\left(\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{4/3} - 1\right)}. \tag{13}$$

При записи (13) учтено, что [14]

$$\Gamma(1/3) \approx 2{,}678939;\ \Gamma(5/3) \approx 0{,}902745.$$

Если, аналогично [15], не учитывать влияние гравитации на процесс движения, то для расчёта падения с большой начальной скоростью при малых t в (13) можно отбросить слагаемые, пропорциональные $\xi_0^{4/3}$ и $\xi^{4/3}$. Тогда:

$$\upsilon_*(t) = \frac{r_0}{kt(1 + 0{,}5\gamma t) + r_0 / \upsilon_0}. \tag{14}$$

Из физических соображений следует, что (14) является нижней оценкой скорости, т. е. $\upsilon(t) > \upsilon_*(t)$.

Проведём проверку точности асимптотических формул. Для этого примем $r_0 = 0{,}0002$ м; $k = 0{,}0000312$; $\gamma = 3$ с$^{-1}$; $\upsilon_0 = 100$ м/с. Результаты указаны в таблице 1.

Таблица 1

t, с	0,03	0,07	0,14	0,20	0,25
υ_p, м/с	67,36	45,69	28,04	20,51	16,57
υ^*, м/с	69,60	48,13	29,76	21,64	17,28
υ_*, м/с	67,16	45,32	27,45	19,78	15,72
$\upsilon_э$, м/с	67	43	30	21	18

Во второй строке таблицы 1 записаны рассчитанные по формуле (11) значения скорости, в третьей строке – значения скорости, полученные по асимптотической формуле (13), в четвёртой строке – значения скорости полученные по формуле (14), и, наконец, в последней строке – результаты, которые получили экспериментально авторы монографии [15]. Наблюдается хорошее соответствие теории эксперименту. Обе асимптотические формулы обладают высокой точностью. Для дальнейшего расчёта высоты падения, удобнее использовать формулу (14).

При определении высоты падения тела $z(t)$ вычисляем интеграл

$$z(t)=\int_0^t \upsilon(t)dt, \tag{15}$$

который не выражается через затабулированные специальные функции. Его можно находить численно на компьютере.

Интеграл

$$S(t)=\int_0^t \upsilon_*(t)dt$$

выражается через элементарные функции

$$S(t)=\frac{r_0}{\gamma ka}\ln\frac{\left|t+\frac{1}{\gamma}-a\right|\left|\frac{1}{\gamma}+a\right|}{\left|t+\frac{1}{\gamma}+a\right|\left|\frac{1}{\gamma}-a\right|}, \tag{16}$$

причём $a=\frac{1}{\gamma}\sqrt{1-\frac{2r_0\gamma}{k\upsilon_0}}$.

Учитывая выражение (16), получаем вместо (15) более удобную формулу для вычисления высоты падения тела

$$z=S(t)+\Phi(t). \tag{17}$$

Здесь второе слагаемое

$$\Phi(t)=\int_0^t\left[\upsilon(t)-\upsilon_*(t)\right]dt$$

значительно меньше первого и его легко оценить с помощью неравенства

$$\Phi(t)<t\left[\upsilon(t)-\upsilon_*(t)\right].$$

В приближённых расчётах методом трапеций можно принять

$$\Phi(t)\approx\frac{1}{2}t\left[\upsilon(t)-\upsilon_*(t)\right]. \tag{18}$$

Результаты расчёта пройденного телом пути представлены в таблице 2. При этом расчёте использовались прежние исходные данные.

Таблица 2

t, с	0,03	0,07	0,14	0,20	0,25
z_a , м	2,45	4,66	7,16	8,59	9,51
$z_ч$, м	2,45	4,66	7,15	8,58	9,49

Числа z_a во второй строке получены по формулам (16), (17) и (18), а числа $z_ч$ в третей строке – путём численного интегрирования квадратуры (15). Сравнение чисел, полученных разными способами, в таблице 2 показало, что приближённое аналитическое решение приемлемо для расчёта процесса падения тела, в частности в задачах автоматизированного пожаротушения, где интенсивное испарение капель жидких огнетушащих веществ обусловлено высокой температурой газовой среды, а падение осуществляется за короткий промежуток времени.

Выводы. Построена математическая модель движения шара переменного радиуса (массы). Специальной заменой переменных дифференциальное уравнение движения шара сведено к общему уравнению Риккати, решение которого представлено в цилиндрических функциях. Проведен асимптотический анализ решения для скорости, а также построено приближённое выражение для определения перемещения тела.

1. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы / *И. В. Мещерский*. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
2. *Циолковский К. Э.* Собрание сочинений. Т. 1, 2 / *К. Э. Циолковский*. – М. : Изд-во АН СССР, 1954. – 453 с.
3. *Тимошенко В. И.* Газовая динамика высокотемпературных технологических процессов / *В. И. Тимошенко*. – Днепропетровск : Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2003. – 460 с.
4. *Жуковский Н. Е.* Сочинения. Т. 3 / *Н. Е. Жуковский*. – М. : ОНТИ – НКТП, 1936. – 380 с.
5. *Ольшанский С. В.* Об эффекте зависания мелкой частицы переменной массы в воздушной среде / *С. В. Ольшанский* // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып. : Динамика и прочность машин. – Вып. 30. – Харьков : НТУ «ХПИ». – 2009. – С. 125 – 129.
6. *Кучеренко С. І.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті / *С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тіщенко*. – Харків : ХНТУСГ, 2007. – 304 с.
7. *Ольшанский В. П.* Об условиях экстремума скорости падения сферического тела переменного радиуса / *В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский* // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Вып. 26. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – С. 67 – 78.
8. *Ольшанский В. П.* О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы / *В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский* // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25 – 29.
9. *Ольшанский В. П.* Аналитические решения уравнения Мещерского, описывающие вертикальное движение шара убывающей массы / *В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский* // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 36 – 42.
10. *Ольшанский В. П.* Замкнутые решения уравнения Мещерского при различных законах уменьшения радиуса летящего шара / *В. П. Ольшанский, К. В. Аврамов, С. В. Ольшанский* // Механика твёрдого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 207 – 214.
11. *Сагитов М. Н.* Некоторые случаи движения вращающегося шара переменной массы, ось которого горизонтальна / *М. Н. Сагитов* // Из-ия АН Казахской ССР. Серия физ.-мат. наук. Математика и механика. – 1963. – Вып. 15. – С. 88 – 99.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / *Э. Камке*. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
13. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / *А. Абрамовиц, И. Стиган*. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
14. *Янке Е.* Специальные функции / *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш.* – М. : Наука, 1977. – 344 с.
15. *Севриков В. В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты / *В. В. Севриков, В. А. Карпенко, И. В. Севриков.* – Сев ГТУ, 1996. – 260 с.

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
Харьков

Получено 15.11.12,
в окончательном варианте 31.03.14