

І. П. Шацький, В. В. Перепічка

## Нестаціонарний скрут пружного стержня з в'язкопластичним зовнішнім опором

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Г. С. Кітом)

*Розглянуто задачу нестаціонарного скруту напівнескінченного пружного стержня, що взаємодіє із середовищем за моделлю в'язкопластичного тертя. Отримано точний аналітичний розв'язок поставленої задачі для довільного моменту часу від початку збурення. Проведено аналіз отриманих результатів для зрушеної частини стержня.*

Для численних прикладних задач динаміки конструкцій важливим є аналіз розсіювання енергії за рахунок фрикційного проковзування в контактi. Огляд досягнень з питань динаміки пружних стержнів при наявності сухого тертя на бічній поверхні наведено в роботах [1–3]. Характерним для цих результатів є використання класичної теорії стержнів та моделі фіксованого кулонівського тертя. У даній роботі досліджуємо задачу нестаціонарного скруту стержня з в'язкопластичним зовнішнім опором. Отримані результати узагальнюють випадки чисто сухого та чисто в'язкого тертя і можуть застосовуватися до розрахунку режимів ліквідації прихоплень бурильної колони способом крутильного удару [4].

Розглянемо поширення ударної хвилі скруту у напівнескінченному пружному стержні круглого (кільцевого) поперечного перерізу із зовнішнім радіусом  $R$ . На торці стержня в початковий момент часу прикладається крутний момент  $M$ , який залишається надалі сталим. Досліджуємо процес загасання хвилі, спричинений дотичною контактною взаємодією бічної поверхні стержня з жорсткою обоймою через тонкий в'язкопластичний прошарок.

У системі координат з початком у центрі ваги навантаженого торця і віссю  $OX$ , направленою вздовж стержня, крайова задача динамічного скруту має вигляд:

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \tau R \frac{\Pi}{J} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2}, \quad X > 0, \quad T > 0;$$

$$\varphi(X, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T}(X, 0) = 0, \quad X > 0;$$

$$GJ \frac{\partial \varphi}{\partial X}(0, T) = -M, \quad \varphi(\infty, T) = 0, \quad T > 0.$$

Тут  $\varphi(X, T)$  — кут закручування;  $G$  — модуль зсуву;  $\rho$  — густина матеріалу стержня;  $J$  — полярний момент інерції поперечного перерізу;  $\Pi$  — периметр частини контура, на якому діє сила в'язкопластичного тертя  $\tau$ .

Силу опору на бічній поверхні моделюємо паралельним з'єднанням за Фойхтом елементів Сен-Венана та Ньютона (так звана модель в'язкопластичної рідини Шведова–Бінгама [5]):

$$\tau = -\tau_c \operatorname{sgn} \frac{\partial \varphi}{\partial T} - \beta R \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T} \neq 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0, \quad |\tau| < \tau_c.$$

Тут  $\tau_c$  — порогове значення тертя;  $\beta$  — динамічна в'язкість.

Введемо безрозмірні координату і час  $x = X/L$ ,  $t = cT/L$ , де  $L = \sqrt{J/(R\Pi)}$  — характерний розмір поперечного перерізу;  $c = \sqrt{G/\rho}$  — швидкість поширення хвилі зсуву в матеріалі стержня.

Рівняння руху для стержня запишемо так:

$$\varphi'' + \frac{\tau}{G} = \ddot{\varphi}, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (1)$$

Тут штрих позначає частинну похідну за безрозмірною координатою, крапка — за безрозмірним часом.

Початкові умови:

$$\varphi(x, 0) = \dot{\varphi}(x, 0) = 0, \quad x > 0. \quad (2)$$

Крайові умови:

$$\varphi'(0, t) = -\frac{\tau_0}{G} H(t), \quad \varphi(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Тут  $\tau_0 = M/(\pi R^3)$ ;  $H(t)$  — функція Гевісайда.

У рамках прийнятих припущень, передбачаючи знак швидкості  $\dot{\varphi}$  і швидкість поширення збурення, в'язкопластичну силу тертя подаємо у вигляді

$$\begin{cases} \tau = -\tau_c H(t-x) - 2BG\dot{\varphi}, & \dot{\varphi} > 0, \\ \dot{\varphi} = 0, & |\tau| < \tau_c, \end{cases} \quad (4)$$

де  $B = \beta R/(2L\sqrt{G\rho})$  — безрозмірний параметр в'язкості.

Для розв'язання поставленої задачі скористаємось перетворенням Лапласа за часом. Операційний еквівалент задачі (1)–(4) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_L}{dx^2} - (s^2 + 2Bs)\varphi_L &= \frac{\tau_c}{G} e^{-sx} \frac{1}{s}; \\ \varphi_L'(0) &= -\frac{\tau_0}{G} \frac{1}{s}; \quad \varphi_L(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\varphi_L(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t) e^{-st} dt$ ;  $s$  — параметр перетворення Лапласа.

Розв'язком крайової задачі (5) для трансформанти буде:

$$\varphi_L(x) = \frac{\tau_0}{G} \left[ \left( 1 + \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right) \frac{1}{s\sqrt{(s+B)^2 - B^2}} e^{-x\sqrt{(s+B)^2 - B^2}} - \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \frac{e^{-sx}}{s^2} \right]. \quad (6)$$

Використовуючи безпосередню відповідність [6, 7]

$$\frac{e^{-x\sqrt{(s+B)^2 - B^2}}}{\sqrt{(s+B)^2 - B^2}} \div e^{-Bt} I_0 \left( B\sqrt{t^2 - x^2} \right) H(t-x),$$

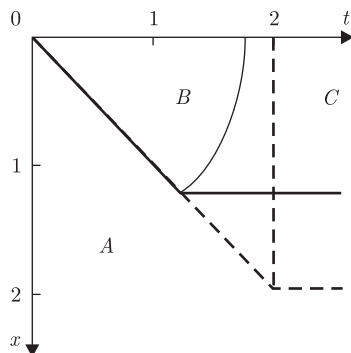


Рис. 1. Хвильова картина нестационарного збурення у скручуваному стержні

запишемо остаточний розв'язок вихідної задачі (1)–(4):

$$\varphi(x, t) = \frac{\tau_0}{G} \int_x^t \left[ \left( 1 + \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right) e^{-B\tau} I_0 \left( B\sqrt{\tau^2 - x^2} \right) - \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right] d\tau H(t - x), \quad (7)$$

$$\dot{\varphi}(x, t) = \frac{\tau_0}{G} \left[ \left( 1 + \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right) e^{-Bt} I_0 \left( B\sqrt{t^2 - x^2} \right) - \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right] H(t - x), \quad (8)$$

$$\varphi'(x, t) = -\frac{\tau_0}{G} \left[ \left( 1 + \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right) \left( e^{-Bx} + B^2 x \int_x^t e^{-B\tau} \frac{I_1 \left( B\sqrt{\tau^2 - x^2} \right)}{B\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \right) - \frac{\tau_c}{\tau_0} \frac{1}{2B} \right] \times \\ \times H(t - x). \quad (9)$$

Тут  $I_0(z)$ ,  $I_1(z)$  — модифіковані циліндричні функції Бесселя першого роду.

Покладаючи в поданнях (7)–(9)  $\tau_c = 0$ , отримали окремий випадок нестационарної задачі про скрут стержня у в'язкому середовищі.

При  $B = 0$  одержуємо розв'язок, що описує ударну хвилю скруту у стержні із зовнішнім сухим тертям (подібний до розв'язку задачі про поздовжній удар [1, 2]):

$$\varphi(x, t) = \frac{\tau_0}{G} \left[ t - x + \frac{\tau_c}{4\tau_0} (x^2 - t^2) \right] H(t - x),$$

$$\dot{\varphi}(x, t) = \frac{\tau_0}{G} \left[ 1 - \frac{\tau_c}{2\tau_0} t \right] H(t - x),$$

$$\varphi'(x, t) = -\frac{\tau_0}{G} \left[ 1 - \frac{\tau_c}{2\tau_0} x \right] H(t - x).$$

Перейдемо до аналізу отриманих результатів. Рис. 1 в координатно-часовій площині характеризує хвильову картину нестационарного збурення в стержні. Тут область  $A$  — передфронтна зона спокою;  $B$  — зона динамічного збурення в стержні;  $C$  — зона залишкових стаціонарних напружень. Штриховими лініями показано межі відповідних зон для випадку сухого тертя. Области  $A$  і  $B$  розділені характеристикою, що описує поведінку фронту хвилі і є лінією сильного розриву, тут мають місце стрибки швидкості і напружень. Розв'язок (7)–(9) справедливий в областях  $A$  і  $B$ , причому відсутність збурень у передфронтній області врахована множителем Гевісайда. У зоні  $C$  швидкість збурення стає від'ємною, тому

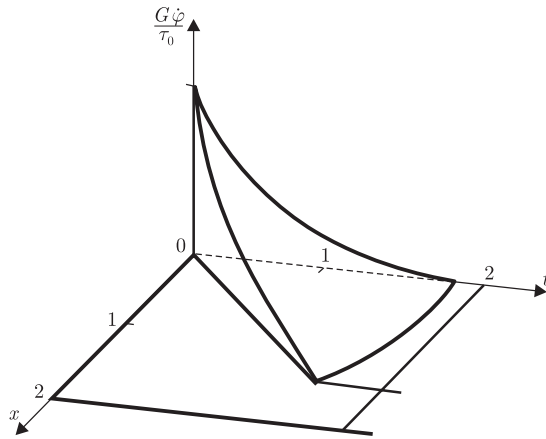


Рис. 2. Розподіл кутової швидкості провертання перерізів

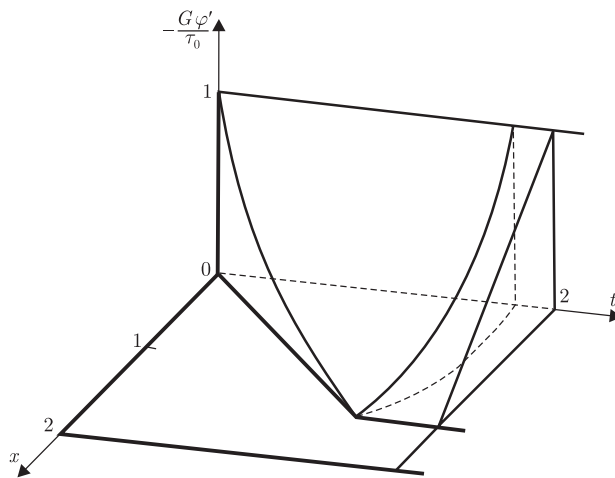


Рис. 3. Дотичні напруження на поверхні стержня

отримані формули тут слід відкинути як такі, що суперечать початковому припущенню про знак швидкості. Крива, що розділяє зони  $B$  і  $C$ , знаходиться чисельно з умови  $\dot{\varphi}(x, t) = 0$  і є лінією слабого розриву. Під час переходу через неї рух припиняється, на ній мають місце стрибки кутового прискорення, дотичних контактних напружень і градієнта напружень скруту. В області  $C$  переміщення і напруження не змінюються з часом і мають значення, зафіксовані на лінії зупинки. Дотичні контактні напруження визначається з рівнянь статички як половина від градієнта напружень скруту, обчислених на лінії слабого розриву.

На рис. 2–4 зображено нестационарні поля безрозмірних значень швидкості провертання, напружень скруту на поверхні стержня  $\tau_{x\varphi}|_{r=R} = G\varphi'$  і дотичних контактних напружень. При розрахунках прийнято  $\tau_0 = \tau_c$ ,  $B = 1$ . Із зростанням часу і координати вказані величини згасають, зокрема, на фронті — експоненціально (див. формули (7)–(9)). Вперше зупинка спостерігається на фронті хвилі на відстані  $L_* = \frac{L}{B} \ln\left(1 + \frac{2\tau_0}{\tau_c} B\right)$  від торця стержня. Зокрема, для малих  $B$  одержали оцінку для протяжності зрушеної ділянки:  $L_* \approx L \frac{2\tau_0}{\tau_c} \left(1 - B \frac{\tau_0}{\tau_c}\right)$ .

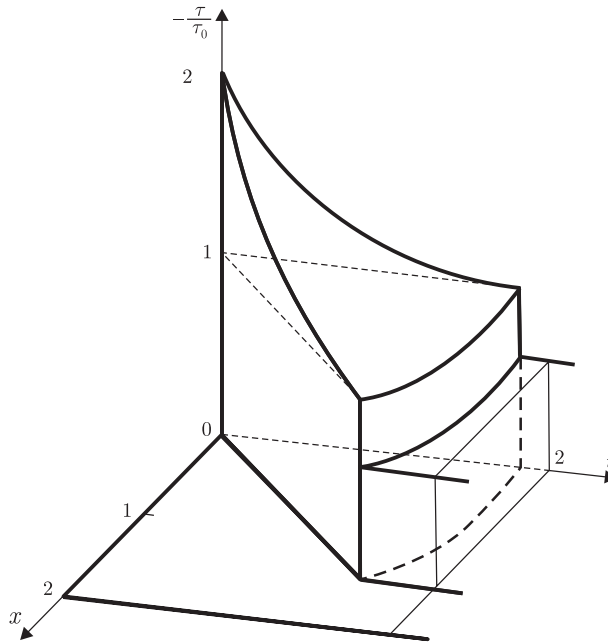


Рис. 4. Розподіл дотичного контактеного напруження

На відміну від випадку лише сухого тертя зупинка руху в досліджуваній системі відбувається не одночасно, а зі скінченною швидкістю, що перевищує, проте, швидкість поширення фронту хвилі скруту. Слід відзначити, що після зупинки руху в збуреній області стержня залишкові дотичні напруження в стержні і контактні напруження, а також поворот перерізів можуть бути виражені через довжину зрушеної ділянки таким чином:

$$\tau_{x\varphi}(x, \infty) = -\tau_0 \left(1 - \frac{L}{L_*} x\right), \quad \tau(x, \infty) = \frac{\tau_0}{L_*}, \quad \varphi(x, \infty) = \frac{\tau_0}{2G} \frac{L_*}{L} \left(1 - \frac{L}{L_*} x\right)^2.$$

Ці вирази збігаються з обчисленими з формул (7)–(9) значеннями на лінії зупинки.

Таким чином, при наявності в'язкопластичного зовнішнього опору в картині руху перерізів стержня переважає вплив сухого тертя, в'язкість вносить кількісні поправки у знайдений розв'язок.

На відміну від випадку сухого тертя, коли збурена частина стержня рухається як абсолютно тверде тіло і зупинка відбувається одночасно по усій довжині від торця до фронту хвилі, присутність в'язкої компоненти опору призводить до руху збуреної частини стержня як деформованої, а зупинка руху від фронту до торця відбувається зі швидкістю, більшою від швидкості хвилі зсуву.

1. *Никитин Л. В.* Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Усп. механики. – 1988. – **11**, № 4. – С. 53–106.
2. *Никитин Л. В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. – Москва: Моск. Лицей, 1998. – 272 с.
3. *Султанов К. С.* Численное решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним трением // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1991. – № 6. – С. 92–101.
4. *Улитин Г. М., Петтиж Ю. В.* Крутильные колебания буровых колонн при прихватах // Зб. наук. праць. Сер. Галузеве машинобудування, будівництво. – Полтава: ПолтНТУ, 2009. – Вип. 3(25). – Т. 2. – С. 214–218.

5. Рейнер М. Реология. – Москва: Наука, 1965. – 224 с.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 466 с.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – Москва: Наука, 1983. – 752 с.

Івано-Франківський відділ Інституту  
прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України

Надійшло до редакції 18.04.2014

**И. П. Шацкий, В. В. Перепичка**

### **Нестационарное кручение упругого стержня с вязкопластическим внешним сопротивлением**

*Рассмотрена задача нестационарного кручения полубесконечного упругого стержня, взаимодействующего со средой посредством вязкопластического трения. Получено точное аналитическое решение поставленной задачи для произвольного момента времени от начала возмущения. Проведен анализ полученных результатов для сдвинутой части стержня.*

**I. P. Shatsky, V. V. Perepichka**

### **Non-stationary twisting of an elastic bar with viscoplastic external resistance**

*The problem of non-stationary twisting of a semiendless elastic rod interacting with the medium is considered, using the model of viscoplastic friction. An exact analytical solution of the problem is obtained for an arbitrary moment of time from the beginning of a perturbation. The analysis of the obtained results for the moved part of the rod is performed.*