УДК 519.172.1:.6/519.245/533.5

Т.Г. СМЕЛАЯ

ВЫБОР РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕТОДОМ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Из-за исключительной сложности уравнения Больцмана в задачах динамики разреженного газа, для его решения приходится использовать численные методы. При этом одним из ключевых моментов является дискретизация расчетной области. Целью настоящей статьи является выбор наиболее рациональной расчетной сетки статистического метода пробных частиц (МПЧ) решения уравнения Больцмана. С помощью информационно-аналитического метода проанализированы все достоинства и недостатки различных типов расчетных сеток (РС) с точки зрения их применимости к задачам моделирования течений разреженного газа МПЧ. Сделан вывод, что при использовании этого метода наиболее приемлемы адаптивные декартовы прямоугольные сетки, характеризующиеся локальным изменением размеров ячеек в отдельных областях. Удобнее всего организовать такие РС с помощью иерархических блочных структур, для которых мелкая равномерная сетка находится внутри более грубой равномерной РС. Кратность разбиения корневых ячеек может быть различной и зависит от параметров локального режима течения, например от местных длин свободного пробега молекул. Таким РС присущи основные преимущества структурированных и неструктурированных сеток. Для МПЧ особенно важно, что они сочетают в себе высокоэффективный доступ ко всем элементам сетки, возможность векторизации алгоритма для многомерных задач и её локального сгущения. Результаты работы будут использованы при построении рабочих алгоритмов моделирования траекторий движения молекул МПЧ, что позволит более эффективно осуществлять экспертизу и сопровождение отдельных проектов Национальной космической программы Украины.

Через виняткову складність рівняння Больцмана в задачах динаміки розрідженого газу, для його розв'язку доводиться використовувати чисельні методи. При цьому одним із ключових моментів є дискретизація розрахункової області. Метою цієї статті є вибір найбільш раціональної розрахункової сітки статистичного методу пробних часток (МПЧ) розв'язку рівняння Больцмана. За допомогою інформаційно-аналітичного методу проаналізовано всі переваги та недоліки різних типів розрахункових сіток (РС) з точки зору їх застосування до задач моделювання течій розрідженого газу МПЧ. Зроблено висновок, що при використанні цього методу найбільш прийнятні адаптивні декартові прямокутні сітки, що характеризуються локальною зміною розмірів чарунок в окремих областях. Найбільш перспективно організувати такі РС за допомогою ієрархічних блокових структур, для яких дрібна рівномірна сітка перебуває усередині більш грубої рівномірної РС. Кратність розбивання кореневих чарунок може бути різною й залежить від параметрів локального режиму течії, наприклад від місцевих довжин вільного пробігу молекул. Таким РС властиві головні переваги структурованих і неструктурованих сіток. Для МПЧ найбільш важливо, що вони поєднують у собі високоефективний доступ до всіх елементів сітки, можливість векторизації алгоритму для багатомірних задач та її локального згущення. Результати роботи будуть використані при побудові робочих алгоритмів моделювання траєкторій руху молекул МПЧ, що дозволить більш ефективно здійснювати експертизу й супровід окремих проектів Національної космічної програми України.

Numerical methods have to use for solution of the Boltzmann equation for problems of the rarefied gas dynamics due to its exceptional complexity. In so doing discretization of the calculated region is one of the key moments. The aim of this paper is to choose the most rational calculation mesh of the statistical test particles method (TPM) for solution of the Boltzmann equation. All advantages and disadvantages of different types of calculated meshes (CMs) are analyzed using an information and analytical method as regards their implementation for problems of the MTP rarefied gas flow simulation. It may be inferred that Cartesian adaptive rectangle meshes characterizing by local variations in mesh sizes in separate regions are most reasonable with this method. Use of hierarchy block systems, where a fine uniform mesh resides into a cruder uniform CM, is most promising for such CMs. The multiplicity of root cells division can be various and dependent on parameters of a local flow regime, for example, on local lengths of a molecular free path. Such CMs have the basic advantages of structurizated and nonstructurized meshes. Of prime importance for the TPM are a high-efficient access to all mesh elements and the possibility of vectorization of an algorithm for multidimensional problems and its local concentration. The research results will be used for construction of operational algorithms for simulation of motion trajectories of TPM molecules allowing a more efficient expertise and support for certain projects of the National Space Program of Ukraine.

Решение интегро-дифференциального уравнения Больцмана – основного уравнения кинетической теории разреженных газов – является ключевым моментом при моделировании течений разреженного газа. Функция распределения, для которой записано это уравнение, зависит от семи переменных – пространственных координат, компонентов скорости и времени, а стоящий в правой части уравнения интеграл столкновений является пятикратным. Из-за исключительной сложности этого уравнения получение его точного решения возможно лишь в некоторых частных случаях. По этой причине при решении практических задач газовой динамики приходится использовать численные методы.

Наиболее развитыми численными методами решения уравнения Больцмана являются методы Монте-Карло [1, 2]. Эти методы базируются на статистическом подходе, в котором каждое отдельное событие носит случайный характер, а искомое решение получается путем осреднения большого числа таких событий.

Один из методов Монте-Карло – метод пробных частиц (МПЧ). Он является аналогом известного метода в теории переноса нейтронов и основан на методике В. И. Власова случайных блужданий пробных молекул среди полевых [3 – 11]. МПЧ применим для решения фундаментальных и прикладных задач высотной аэродинамики космических аппаратов и дает возможность ответить на целый ряд проблемных вопросов. С его помощью можно решать задачи дозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики, причем этот метод позволяет охватить как область свободномолекулярного течения, так и переходную область, вплоть до сплошносредной. Как и остальным методам решения кинетических уравнений, МПЧ свойственны определенные трудности, связанные с особенностью вычислений при наличии ярко выраженной неоднородности полей течений (присутствие больших градиентов газодинамических параметров вблизи обтекаемых преград, формирующихся при малых числах Кнудсена ударных волн, контактных разрывов, пограничных слоев и других эффектов).

При моделировании МПЧ объем физического пространства разбивается на малые ячейки. С границ расчетной области производится розыгрыш траекторий пробных молекул, т. е. векторов их начальных скоростей. В процессе слежения за блужданиями молекул в рассматриваемом объеме накапливаются суммарные характеристики пребывания молекул в расчетных ячейках. Особенности и некоторые тонкости алгоритма МПЧ более подробно рассмотрены в [12 – 13].

Для получения решения МПЧ строится соответствующий итерационный процесс по числам Кнудсена. В качестве начального берется свободномолекулярное поле параметров, а далее число Кнудсена уменьшается до достижения требуемого режима обтекания. Фактически такая схема соответствует методу решения уравнения Больцмана путем разложения его правой части в ряд по числу Кнудсена.

В свою очередь, при каждом фиксированном числе Кнудсена решение получается путем проведения нескольких последовательных расчетных итераций. На последующей итерации в качестве исходных параметров используются результаты предыдущей. Задача решается методом установления с оценкой значений параметров на двух последовательных итерациях.

Для накопления необходимой статистики в расчетных ячейках при каждом шаге проводится большое количество испытаний (розыгрышей пробных молекул), которое зависит от геометрии расчетной области, размера ячеек используемой расчетной сетки (РС) и изменяется в пределах $N \sim 10^5 \div 10^7$. Специфика МПЧ заключается в том, что процесс блуждания каждой пробной молекулы в ячейках поля носит хаотичный характер. Траекторию движения молекулы после розыгрыша, а также характер событий в расчетных ячейках области (столкновения с другими молекулами, соударения с поверхностью тела или свободные пролеты ячеек) невозможно заранее предугадать. Поэтому, число ячеек, задействованных в блужданиях молекулы, может быть достаточно большим и во много раз превышать число ячеек расчетной области.

Учитывая вышеизложенные особенности МПЧ, можно сделать вывод, что расчетное время может быть велико даже для одной итерации. Целью настоящей работы является выбор оптимальной РС для численного моделирования течений разреженного газа МПЧ на основе анализа различных видов расчетных сеток. Основными требованиями к РС являются минимизация расчетного времени за счет сокращения количества расчетных ячеек без потери качества результата и максимальная экономия времени расчета для одной ячейки. Это можно осуществить за счет:

– специальной организации структуры РС, позволяющей легко и быстро переходить от одной ячейки к другой при движении молекулы в пределах расчетной области;

– использования достаточно мелких ячеек в зонах с физическими особенностями, т. е. наличие сгущений РС там, где возможно появление больших градиентов параметров, и укрупнения ячеек в остальных областях.

При использовании ячеек переменного размера возникает проблема выбора критерия, определяющего размер ячейки. Таким критерием должен стать параметр, который легко получить в процессе счета и можно связать с физическими величинами, имеющими значительные градиенты в пределах расчетной области. Для МПЧ удобнее всего в качестве такого параметра выбрать длину свободного пробега молекул, однозначно определяющую локальный режим течения. Кроме этого, желательно максимально точно аппроксимировать границы расчетной области и сохранить возможность применения эффективных алгоритмов обработки входных и выходных данных, включая ввод/вывод, визуализацию и т. п. Удовлетворить всем этим требованиям одновременно достаточно сложно, поэтому выбор РС требует некоторого компромисса.

Процесс построения дискретизирующей расчетную область РС является одним из ключевых моментов проведения численного эксперимента. Рациональным выбором РС можно значительно упростить решение поставленной задачи. Построение РС тесно связано с остальными этапами численного моделирования: подготовкой исходных данных, решением модельных уравнений, анализом полученных результатов. Эти этапы моделирования часто обладают обратной связью: например, на основе анализа полученных результатов возможно внесение корректировок в модель расчета и/или в процесс построения РС и т. п. Таким образом, процесс моделирования является, в общем случае, итерационным.

Рассмотрим основные виды сеток. В зависимости от способа организации и доступа к параметрам сетки можно разбить на несколько глобальных типов [14]: структурированные, неструктурированные и гибридные, т. е. сочетающие оба способа организации.

Для структурированных (или регулярных) сеток характерно наличие упорядоченной по определенным правилам структуры и возможности выделения сеточных направлений. Эти направления можно привязать к какой-либо в общем случае неортогональной криволинейной системе координат, что дает возможность однозначно охарактеризовать геометрическую структуру набором индексов в узловых точках. Это важное свойство позволяет существенно экономить компьютерные ресурсы.

Такие сетки строятся преимущественно при помощи прямых методов, которые условно можно разбить на две тесно связанные группы: методы на основе шаблонов и методы отображения (изопараметрические) [15].

Методы на основе шаблонов [16 – 20] подразумевают разбиение областей заданного вида (прямоугольник, треугольник, параллелепипед, шар, цилиндр, и т.д.) с использованием определенного шаблона, задающего принцип размещения узлов и устанавливающего связи между ними. Сетка при этом строится практически «мгновенно», при минимальной затрате ресурсов и с минимальным риском возможной ошибки.

Методы шаблонов применимы только для областей определенной геометрической конфигурации, позволяющей осуществить качественную дискретизацию расчетной области, поэтому ни о какой универсальности здесь не может быть и речи. Для этого класса сеток может наблюдаться снижение точности расчетов на границе с телом и в областях с большими градиентами расчетных параметров.

Методы отображения [16, 21 – 23] применяются в тех случаях, когда возможно построение взаимооднозначного отображения между заданной областью произвольной формы и какой-либо областью простой геометрической формы. При этом должны удовлетворяться следующие требования: соблюдение однозначности отображения и гладкости линий сетки для обеспечения непрерывности производных, достаточной густоты сетки в областях с ожидаемыми большими градиентами параметров, а также ограничение на скошенность ячеек во избежание чрезмерной ошибки аппроксимации [24]. Для упрощения задачи чаще всего используют вычислительные области прямоугольного вида. Зачастую наибольшую трудность может представлять поиск преобразования координат, отображающего декартову ортогональную систему координат на неортогональную (или ортогональную) систему координат общего вида. Такое отображение должно преобразовывать прямоугольную область с равномерным размещением узлов в вычислительном пространстве в расчетную область физического пространства, имеющую сложную геометрическую форму и РС со сгущениями узлов в областях с большими градиентами параметров набегающего потока. На рис. 1 [24] приведен пример такой криволинейной физической области между ударной волной и телом сферической формы с наложенной на неё криволинейной неортогональной сеткой. В этом примере поверхность тела выбрана в качестве одной из границ расчетной области, что облегчает постановку граничных условий на поверхности тела.

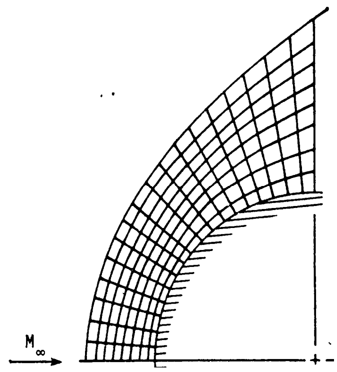

Рис. 1

Труднее всего найти подходящее отображение для трехмерного случая. В этом случае в основном применяются алгебраические или дифференциальные методы. С точки зрения вычислительной эффективности наиболее предпочтительными из них являются алгебраические методы [24 – 34]. Они позволяют обеспечить условие локальной ортогональности сетки в заданных областях. Кроме того, перестройка сетки алгебраическими методами осуществляется быстрее, и их нередко используют для построения начальной сетки. Основная идея построения вычислительной сетки алгебраическими методами состоит в интерполяции координат границы области для определения внутренних узлов сетки. При отображении области с криволинейной границей, заданной набором точек, на расчетную область прямоугольного вида, предварительно граница исходной области должна быть аппроксимирована подходящей кривой. Для этой цели лучше всего подходят напряженные сплайны, которые посредством параметра натяжения позволяют управлять формой кривой [35]. Контроль над размещением узлов сетки можно осуществлять с помощью уже известных функций преобразования. Соответствующие преобразования позволяют адаптировать РС к требованиям задачи: изменять форму этой области, угол наклона сеточных линий (поверхностей), добиваться их локальной ортогональности или сгущения в наперед заданных областях.

Несомненное преимущество алгебраических методов состоит в том, что они являются прямыми и метрические коэффициенты можно вычислять аналитически. В то же время, требуется проявить изобретательность, чтобы получить сетку с адекватным размещением узлов [24].

Дифференциальные методы используют свойства решений уравнений, в качестве которых часто применяют эллиптические уравнения с частными производными Лапласа или Пуассона. Эти уравнения замечательны тем, что позволяют получать однозначные преобразования с гладкими и непрерывными линиями сетки. К тому же, границы сложной формы легко обрабатываются. Конечно, эти методы имеют свои недостатки. Несмотря на то, что существуют уже готовые методики выбора параметров для обеспечения приближенного контроля размещения узлов [36 – 38], задание параметров, управляющих размещением узлов сетки во внутренней части, является непростой задачей, да и границы области могут изменяться со временем. В последнем случае сетка должна перестраиваться после каждого шага по времени, что может повлечь значительное увеличение затрат машинного времени.

Для построения расчетных сеток дифференциальными методами можно предложить неограниченное число схем их построения. Приемлема любая система уравнений, решение которой дает подходящую сетку. Например, в [39] для построения сетки вокруг некоторого тела приводиться схема, использующая уравнения в частных производных гиперболического типа. Внешняя граница физической расчетной области при этом заранее не указывается, поскольку сетка строится в направлении от внутренней границы, совпадающей с поверхностью обтекаемого тела.

Неплохие результаты в этом случае дает применение методов дуг и объемов, с помощью которых строятся ортогональные сетки [39]. В качестве параметра, контролирующего сетку в физической области, можно использовать площадь её ячейки. Гладкую сетку удается построить только при удачно подобранном параметре. И наоборот, его неудачный выбор может привести к изломам или распространению по сетке искаженной информации о положении граничных узлов. К тому же, на такой сетке отрицательно отражаются имеющиеся на границе разрывы данных. С другой стороны, при этом сетка строится быстро и является ортогональной. В ка-

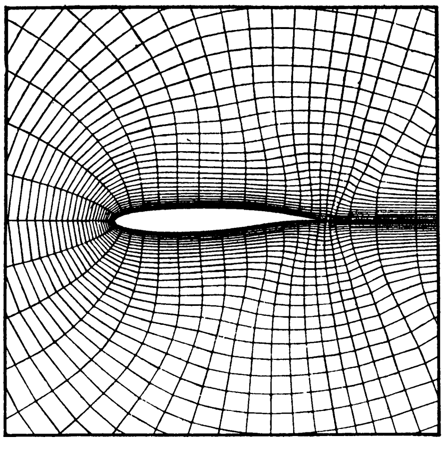

Рис. 2

честве примера приведен рис. 2 из [24], на котором показана РС, построенная вокруг типичного профиля. Здесь сгущение сетки вблизи тела позволяет разрешить вязкий пристенный слой.

Рассмотренные методы характерны тем, что процедура построения сеток предшествует численному решению уравнений в частных производных. В результате сетка может не учитывать особенности конкретной задачи. Минимизировать погрешности решения, достигнув высокого разрешения в областях, имеющих особенности решения, помогают адаптивные сетки [40]. Они строятся в процессе решения задачи. В качестве параметров, определяющих форму таких сеток, могут выступать скорость «движения» узлов сетки и расстояние между ними в физическом пространстве. В соответствии с учетом особенностей задачи какой-либо из этих двух параметров выбирается определяющим, а другой вычисляется в процессе решения [24].

Таким образом, главными преимуществами прямых методов являются их надежность и скорость работы. Благодаря специфике организации геометрических данных ячеек и наличию системы индексов, соответствующих сеточным направлениям, регулярные сетки позволяют быстро и просто находить адрес соседней ячейки в заданном направлении и за счет этого позволяют уменьшить продолжительность расчета и необходимый объём оперативной памяти ЭВМ.

По той же причине структурированные сетки позволяют векторизировать программы вдоль сеточных направлений и использовать вдоль каждой из координатных осей независимо друг от друга любые одномерные алгоритмы. Это обстоятельство немаловажно, так как оно позволяет распараллелить алгоритмы по сеточным направлениям. Кроме того, регулярным сеткам свойственен также высокий порядок аппроксимации для методов сквозного счета, чего трудно достичь на неструктурированных сетках.

В то же время, сетки, построенные по шаблонам, не позволяют получить достаточно мелкие ячейки в областях с физическими особенностями. Кроме этого, для явных схем, использующих регулярные РС, существует проблема малых ячеек на границах с телом, накладывающая ограничения на шаг интегрирования и требующая для разрешения устойчивые, консервативные разностные схемы.

Некоторые проблемы можно было бы решить, применяя методы отображения и используя криволинейные сетки. Однако эти методы также имеют ряд существенных недостатков: применение для расчетной области сложной геометрической формы процедуры построения криволинейной регулярной сетки приведет к существенному увеличению затрат труда и ресурсов ЭВМ, к искажениям сетки, а возможно, и к возникновению особенностей вплоть до появления вырожденных ячеек при отображении. Это может существенно снизить качество результатов и привести к неустойчивости или отсутствию сходимости при неадекватном выборе размещения узлов расчетной сетки. Кроме этого, для методов отображения характерно снижение точности схемы на границах с телом в случае сложной геометрии, т. к. задача построения данного типа РС в общем случае не является тривиальной.

Проблема построения более мелких ячеек в областях с физическими особенностями легко разрешается в случае применения неструктурированных сеток [41 – 49]. Характерной особенностью таких сеток является произвольное расположение узлов в физической области. Произвольность следует понимать в том смысле, что отсутствуют сеточные направления и невозможно упорядочить узлы сетки, привязав её к какой-либо системе координат. Узлы сетки объединяются в общем случае в многогранники (3-х мерный случай) или в многоугольники (плоский случай) произвольной формы. Как правило, на плоскости используют треугольные ячейки, реже – четырехугольные, в пространстве – тетраэдры и призмы.

В отличие от структурированных, неструктурированные сетки требуют хранения и переработки информации о каждой ячейке: её ребрах, гранях (ориентация, длина и т. п.), а также о её соседних ячейках. Эту функцию выполняет список связных графов, который устанавливает способ объединения заданного множества узлов в отдельные элементы и их организацию.

Поскольку перед построением нерегулярной сетки нельзя предвидеть ее будущую структуру, то нельзя гарантировать и ее качества. Часто для его улучшения необходимо прибегать к помощи методов оптимизации [50 – 52]. Этой возможностью обычно не пренебрегают, поскольку затрачиваемое на оптимизацию время, как правило, существенно меньше времени, затрачиваемого на построение.

Для создания сеток нерегулярного типа популярно использование итерационных методов [53]. В зависимости от особенностей задачи (способа задания начальных и граничных условий, формы расчетной области и предъявляемых требований к организации РС) можно выбрать один из них: граничной коррекции, на основе критерия Делоне, метод исчерпывания.

Самыми быстрыми из итерационных методов являются методы граничной коррекции [17 , 54 – 59], и это, за исключением сравнительной простоты реализации, практически их единственное достоинство. Этим методам присущ ряд существенных недостатков: повышенные требования к входным данным; невозможность использования для дискретизации областей с границей, заданной при помощи триангуляции; ненадежность (полученные сетки необходимо проверять на правильность структуры); априори низкое качество элементов сеток вблизи границы (необходим этап оптимизации); низкая «чувствительность» алгоритма (при недостаточно малом шаге триангуляции некоторые особенности области могут быть потеряны). Тем не менее, алгоритм граничной коррекции может быть успешно применен для дискретизации сложных областей, включающих в себя ограничения вида внутренних поверхностей и ребер.

Исходными данными для алгоритмов на основе критерия Делоне [56, 60, 61] должен быть некий набор точек, которые станут узлами будущей триангуляции. Очевидным достоинством такого подхода является точный контроль над размерами элементов сетки, которые определяются плотностью размещения узлов. Увеличение плотности в зонах с особенностями автоматически приводит к локальному сгущению сетки. При этом в определенном смысле триангуляция Делоне для заданного набора точек является оптимальной. Основным недостатком этого метода являются трудности, возникающие при переходе к трехмерным задачам, и крайне высокая чувствительность алгоритма к точности машинных вычислений. Попытки решить эти проблемы приводят к существенному увеличению расчетного времени.

Еще один хорошо известный метод – метод исчерпывания [52, 62 – 65]. Сетки, построенные с его помощью, как правило, обладают неплохим качеством, а последующая оптимизация положения узлов дополнительно его улучшает. Методы исчерпывания, в отличие от методов на основе критерия Делоне, наиболее эффективны в случае изначальной триангуляции границы.

Кроме итерационных алгоритмов, при формировании неструктурированной сетки могут использоваться и другие алгоритмы, например рекурсивные (последовательного разбиения, деления и включения и т.п.). Идея метода состоит в разделении области на части меньшей величины, построении сетки в каждой из частей и объединении полученных ячеек или блоков. При этом в конечном итоге можно получить сетку однородной структуры либо со структурой в виде блоков [66]. В зависимости от числа применяемых рекурсий результатом может быть многоблочная или же иерархически блочная организация сетки. При этом организация как самих блоков, так и ячеек сетки внутри них, может быть и структурированной. Тем не менее, даже если вся сетка локально структурирована, она все равно не может считаться структурированной в глобальном масштабе расчетной области. Такой вид сеток применим для случая геометрически сложных расчетных областей, а также для задач с разрывными решениями, в которых расчетная область характеризуется наличием разномасштабных элементов сложной неоднородной структуры.

Сетки из разных блоков могут стыковаться точно по поверхностям раздела физической области на зоны или пересекаться между собой [67]. В случае точного совпадения блоков при переходе от одной зоны к другой сохраняется консервативность разностной схемы решения уравнений и не требуется интерполяция между соседними блоками. При этом требование точного совпадения границ блоков может накладывать дополнительные условия при построении сеток (например, границы зон должны быть фиксированы и не могут изменяться произвольным образом). Для блоков, имеющих пересечения, эти условия могут нарушаться, но при переходе от одного блока к другому консервативность схемы не гарантируется, а в пересекающихся областях требуется интерполяция искомых функций (параметров).

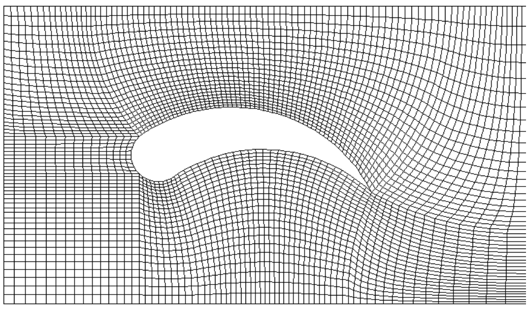

Рис. 3

При любом из двух подходов необходимы: анализ сгенерированной сетки на отсутствие самопересечений сеточных линий (в каждом блоке), а также выделение областей пересечения (для пересекающихся зон) или контроль над их отсутствием (в случае точного совпадения границ блоков). Существуют готовые алгоритмы, которые определяют области пересечения и интерполируют значения расчетных параметров в данных областях.

Пример применения многоблочной структуры регулярных сеток при точном совпадении границ блоков для сложной области приведен на рис. 3 [68]. Изображенная на рисунке полная сетка строится из отдельных четырехугольных сеток-подобластей с применением метода механической аналогии. Границы подобластей представляют собой отрезки прямых и дуг окружностей.

Построение сетки, состоящей из блоков, фактически осуществляется в два этапа [66]. Сначала физическая область разбивается на несколько зон или блоков. При этом границы блоков могут не соответствовать границам физической области. На следующем этапе для каждого блока строится оптимальная сетка в соответствии с его граничными условиями.

Многоблочные сеточные структуры в общем случае могут быть гибридными [69], что позволяет сочетать достоинства и снижать влияние недостатков, присущих каждому типу сеток. Например, гибридная сетка для обтекания набора профилей может быть построена следующим способом: область в окрестности каждого профиля покрывается ортогональной регулярной сеткой, а области между профилями и дальнее поле – неструктурированной [24]. Вычислительный алгоритм должен при этом содержать процедуру переключения расчетных схем для различных типов сеток и, если необходимо, процедуру переноса вычислительной информации с одного типа сетки на другой.

При использовании иерархических блочных структур необходимо, чтобы на каждом этапе разбиения полученные подобласти (блоки) не были разъединены и в то же время не включали одна другую полностью или частично [70]. Систематический рекурсивный процесс разбивки обеспечивает простое и эффективное накопление, восстановление и обработку данных.

Примером классической иерархической блочной структуры данных являются древовидные структуры, например квадро- и октодеревья [71 , 72]. Благодаря естественной иерархической структуре и способу её организации все древовидные структуры сочетают в себе значительную экономию объемов памяти с эффективностью доступа к нужной информации в ячейках сетки. Идеология квадродеревьев успешно применяется для компактной и удобной организации больших баз любых пространственных данных [73 – 76]. Немаловажным достоинством квадро- и октодеревьев является также наличие доступных исходных текстов программ и алгоритмов для реализации этих структур данных и работы с ними [67].

Одним из главных недостатков всех видов деревьев является достаточно сложный алгоритм обхода [77]. Кроме того, области сложной конфигурации требуют большого количества вложений. При этом почти невозможно сравнить два изображения, которые отличаются, например, лишь поворотом (из-за кардинального различия организации структуры его сетки).

Несмотря на это, разновидности древовидных структур хорошо подходят для моделирования непрерывных сред и полей значений. Так, для стационарных процессов можно применять воксельные модели сеток [78 – 80], хранящие значения данных для каждого единичного объёма пространства, а для нестационарных процессов – их четырехмерную разновидность – доксел.

Основное преимущество использования любых нерегулярных сеток по сравнению с регулярнымими заключается в большей гибкости при дискретизации области течения сложной формы. Процесс их построения для таких областей зачастую происходит в несколько раз быстрее, однако время решения конкретных задач на нерегулярных сетках (в связи с особенностями организации хранения данных) может быть значительно больше, чем на регулярных.

Вышесказанное характерно для численного решения задач газовой динамики с помощью МПЧ. Процесс слежения за траекториями пробных частиц требует определения номеров и параметров ячеек, в которые последовательно попадает пробная молекула при своём движении. Для нерегулярной сетки поиск ячейки, граничащей с рабочей в заданном направлении, займет гораздо больше времени, чем для регулярной, что делает её применение в МПЧ неэффективным. Этот же вывод относится и к гибридным сеткам (нерегулярным, например, в окрестности области уплотнения и регулярным в остальной расчетной области), поскольку такие сетки также лишены структурированности, а значит, и свойственных ей преимуществ.

Следует отметить, что на выбор тех или иных способов построения сеток существенное влияние оказывают ограничения, накладываемые используемыми методами. Так, во многих методах визуализации для отображения поверхностей необходимо разбивать их на треугольники, а разностные схемы часто основаны на ортогональных четырехугольных сетках. В конечно-элементном анализе при использовании симплициальных сеток, как правило, требуется соблюдать ограничения на форму и размеры элементов, а при решеии некоторых задач дополнительно могут возникать ограничения на топологию РС, касающиеся, например, количества элементов, инцидентных одному и тому же узлу, или конфигурации РС вблизи границ и угловых точек.

При расчетах МПЧ главной задачей является максимальная минимизация расчетного времени. Её может дать РС, максимально сохраняющая свойство структурированности во всей области. В случае построения криволинейных регулярных сеток в физической области задачи с помощью метода отображения можно одновременно добиться решения сразу двух основных проблем – хорошей адаптации сетки к внешней и внутренней границам области и сгущения сетки в местах с большими градиентами параметров (например, рис. 1, 2). При этом сохраняются основные преимущества структурированных сеток – простота и компактность организации данных. Однако существенным недостатком криволинейных сеток является то, что необходимость отображения области физического пространства (с криволинейными координатами) на вычислительную область (с декартовыми прямоугольными координатами) в процессе решения задачи может существенно усложнять расчеты и увеличивать временные затраты. Кроме того, появляется дополнительный источник погрешности счета при преобразованиях систем координат.

Расчет газодинамических параметров МПЧ в окрестности преграды проще всего выполнять на ортогональных четырехугольных сетках. Такие сетки позволяют легко определять координаты центра и размер ячейки, в которую попадет молекула после перемещения. Поскольку форма внешней границы физической области для задач обтекания преград не принципиальна, для трехмерной задачи её имеет смысл выбрать в виде прямоугольного параллелепипеда, для двумерной – в виде тонкого прямоугольного параллелепипеда (плоская задача) или цилиндрического сегмента с малым углом полураствора (осесимметричная задача).

Самой простой прямоугольной структурированной сеткой является сетка с равномерными шагами разбиения по координатным осям. Такая сетка не имеет локального сгущения, поэтому получить на ней решение приемлемой точности зачастую невозможно (уменьшение размеров расчетных ячеек для достижения необходимой точности приводит к существенному увеличению их общего количества и, как следствие, к катастрофическому росту расчётного времени). Применение более высокоскоростной вычислительной техники решает возникшую проблему лишь частично. Добиться локального сгущения сетки в областях с большими градиентами параметров можно путем использования процедуры динамической адаптации [36, 81 – 83].

Существует несколько стратегий адаптации: перемещение узлов сетки, локальное дробление – слияние ячеек и полная регенерация РС [40]. При этом могут варьироваться только координаты узлов, сохраняя топологию сетки. В случае изменения топологии возможно разбиение или укрупнение некоторых элементов, изменение конфигурации связей между узлами, введение дополнительных узлов на границах и внутри элементов. Полная регенерация РС заключается в построении новой сетки с использованием информации, полученной на старой сетке, и переинтерполяцией решения. Каждый из перечисленных методов построения сеток рассчитан на определенную модель представления расчетной области [84].

Рассмотрим вышеперечисленные стратегии адаптации применительно к обтеканию преграды в прямоугольной расчетной области. Стратегия полной регенерации применяется при выборе шагов разбиения начальной равномерной сетки. Она может успешно применяться в комбинации с остальными стратегиями для повышения их эффективности.

При использовании регулируемых шагов РС в зонах с большими градиентами параметров (стратегия перемещения узлов сетки) для уменьшения временных затрат зафиксируем число расчетных ячеек в каждом из направлений разбиения. Новая РС получается из равномерной с помощью перемещения узлов. Таким образом повышается густота РС в областях локализации особенностей решения за счет её разрежения в остальных областях. Такой подход был применен в работе [85], когда строилась регулярная прямоугольная сетка с неравномерными шагами по осям (рис. 4). Фактически, вдоль каждого сеточного направления использовались несколько размеров шагов: меньшие – для зон с большими градиентами параметров, большие – для остальных областей. Этот простой метод позволяет значительно повысить точность расчетов, не допуская увеличения числа ячеек.

Стратегия локального дробления – слияния ячеек РС сводится к включению в сетку дополнительных узлов в зонах с большими градиентами параметров при одновременном удалении (или без него) лишних узлов в областях без особенностей. Эта процедура может быть применена к «нулевой» РС с равномерным разбиением. На ней могут быть вычислены градиенты, используемые для построения адаптивной РС. Применение такого подхода позволяет еще больше повысить точность вычисления параметров без существенного увеличения расчетного времени. Стратегия дробления–слияния фактически приводит к блочным структурам.

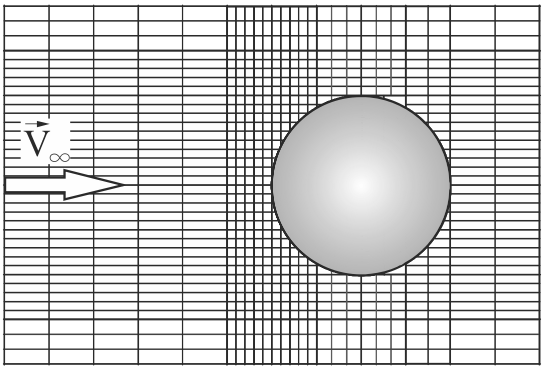

Рис. 4

Рассмотрим структуру из регулярных сеток, регулярно разбитую на точно стыкующиеся по границам блоки. Достоинством такого подхода является простота получения требуемого разбиения ячеек РС в проблемных областях.

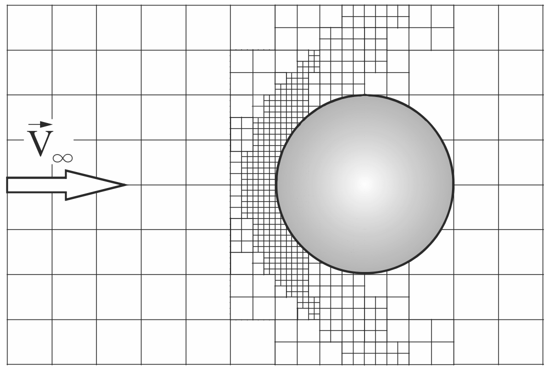

Рис. 5

Недостатком могут быть трудности, связанные с определением границ блоков. Кроме того, может усложняться поиск соседней ячейки в требуемом направлении, так как в глобальном масштабе могут теряться сеточные направления, что неизбежно приведет к увеличению расчетного времени.

Частным случаем блочных структур можно считать иерархические блочные структуры («деревья» с несколькими вложениями), когда мелкие сетки находятся внутри более грубых. Основная идея такой РС – локальное изменение размера ячеек в отдельных областях – полностью соответствует основным требованиям, предъявляемым к РС в МПЧ (рис. 5). Одно из главных достоинств «деревьев» состоит в компактной организации элементов сетки, что позволяет обеспечить высокоэффективный доступ к данным и их быструю обработку. При этом можно воспользоваться множеством уже готовых алгоритмов обхода ячеек и манипулирования деревьями различных форм. К недостаткам относится усложнение алгоритма по сравнению с регулярной сеткой. Кроме этого, максимальную степень вложенности блоков может ограничивать привязка к языку программирования и тем самым делать неэффективными квадро- и октодеревья. Выходом может стать использование их анало-

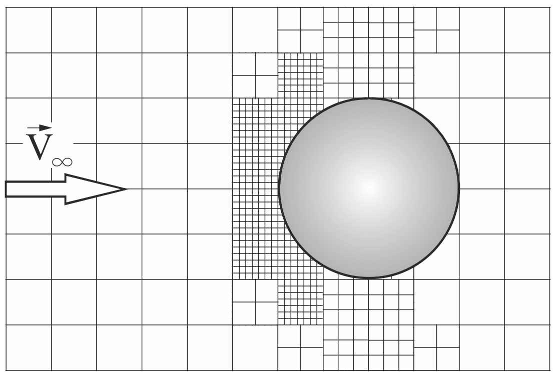

Рис. 6

гов, для которых регулируют величину ячейки не степенью вложенности, а кратностью разбиения корневых ячеек, поставив её в зависимость от местных градиентов параметров или от местных длин свободного пробега молекул на «нулевой» сетке. Полученная таким образом сетка будет локально-равномерной с различной плотностью разбиения корневых ячеек и единственным уровнем вложения (рис. 6).

Иерархическую блочную структуру с единичным уровнем иерархической глубины можно рассматривать как разновидность организованной специальным образом многоблочной структуры. Она сочетает в себе достоинства этих двух подходов, нивелируя некоторые алгоритмические недостатки. В частности, поскольку границы блоков совпадают с границами корневых ячеек, автоматизируется определение границ блоков и отпадает необходимость проверки их точного совпадения. Поскольку уровень иерархической глубины РС минимален, такая сетка строится достаточно быстро и, кроме того, алгоритм обхода остается достаточно простым. При этом благодаря наличию системы двойной индексации ячеек сохраняется высокоэффективный доступ к соседним ячейкам, а также реализуется основная идея – возможность использования более мелких ячеек только в проблемных зонах расчетной области.

При использовании блочной организации сетки в газодинамических задачах обтекания преграды появляется проблема одновременного сохранения структуры сетки и выполнения условия непроницаемости поверхности преграды. Эта проблема преодолима при аналитическом задании геометрии обтекаемого тела. В этом случае вопрос о столкновении движущейся молекулы с поверхностью тела можно решить, вводя условие непроницаемости и схему отражения от поверхности преграды. Тогда нет необходимости задавать адаптированную к поверхности обтекаемого тела внутреннюю границу физической области, а полученная сетка полностью сохраняет свою структуру.

Таким образом, для решения задач газовой динамики с помощью статистического МПЧ наиболее экономными по затратам машинного времени являются декартовы прямоугольные регулярные сетки с иерархически-блочной организацией. Величина расчетной ячейки при этом регулируется кратностью разбиения корневых ячеек начальной равномерной РС в зависимости от определяющих локальный режим течения местных длин свободного пробега.

1. Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов / *В. Н. Гусев, И. В. Егоров, А. И. Ерофеев, В. П. Провоторов* // Изв. РАН. – 1999. – № 2. – С. 129 – 134.
2. *Егоров И. В.* Сопоставление моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе метода Монте-Карло и уравнений Навье – Стокса / *И. В. Егоров, А. И. Ерофеев* // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – № 1. – С. 133 – 145.
3. *Haviland I. K.* Application of the Monte-Carlo method to heat transfer in a rarefied gas / *I. K. Haviland, M. L. Lavin* // Phys. Fluids. – 1962. – V. 5, № 11. – P. 1399 – 1405.
4. *Хэвиленд Дж. К.* Решение двух задач о молекулярном течении методом Монте-Карло / *Дж. К. Хэвиленд* // Вычислительные методы в динамике разреженных газов. – М. : Мир, 1969. – С. 7 – 115.
5. *Григорьев Ю. Н.* Численные методы механики сплошной среды / *Ю. Н. Григорьев, М. С. Иванов, Н. М. Харитонова* // ВЦ СО АН СССР. – 1971. – Т. 2, № 4. – С. 101 – 107.
6. *Власов В. И.* Консервативный вариант метода пробных молекул (Монте-Карло) / *В. И. Власов* // Численные и аналитические методы в динамике разреженных газов : VIII Всесоюзная конф. по динамике разр. газов : труды. – М., 1986. – С. 81 – 85.
7. *Власов В. И.* Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов / *В. И. Власов* // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 5. – С. 1016 – 1018.
8. *Власов В. И.* Расчет методом Монте-Карло потока тепла между параллельными пластинами в разреженном газе / *В. И. Власов* // Ученые записки ЦАГИ. – 1970. – Т. 1, № 4. – С. 46 – 51.
9. *Власов В. И.* Расчет аэродинамических характеристик плоской пластины бесконечного размаха в гиперзвуковом потоке разреженного газа / *В. И. Власов* // Ученые записки ЦАГИ. – 1971. – Т. II, № 6. – С. 116 – 120.
10. *Власов В. И.* Расчет обтекания пластины под углом атаки потоком разреженного газа / *В. И. Власов* // Ученые записки ЦАГИ. – 1973. – Т. IV, № 1. – С. 17 – 24.
11. *Власов В. И.* Расчет течения разреженного газа около пластины под углом атаки / *В. И. Власов* // Ученые записки ЦАГИ. – 1975. – Т. VI, № 2. – С. 48 – 56.

12. *Басс В. П.* Молекулярная газовая динамика и ее приложения в ракетно-космической технике / *В. П. Басс*. – Киев : Наук. думка, 2008. – 272 с.
13. *Басс В. П.* Об одном алгоритме реализации метода Монте-Карло для решения задач динамики разреженного газа / *В. П. Басс, Л. Л. Печерица* // Техническая механика. – 2006. – № 1. – С. 67 – 79.
14. *Дудникова Г. И.* О моделях частиц на неструктурированных сетках / *Г. И. Дудникова, Д. В. Романов, М. П. Федорук* // Вычислительные технологии. – Новосибирск : Учреждение Российской академии наук Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, 1998. – Т. 3, № 6. – С. 30 – 46.
15. *Галанин М. П.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / *М. П. Галанин, И. А. Щеглов*. – М., 2006. – 32 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 10)
16. *Aldroubi A.* Wavelets on Irregular Grids with Arbitrary Dilation Matrices, and Frames Atoms for L2 (M.d) / *A. Aldroubi, C. Cabrelli, U. Molter* // Appl. Comput. Harmonic Anal. – 2004. – V. 17. – P. 119 – 140.
17. *Borouchaki H.* Fast Delaunay Triangulation In Three Dimensions / *H. Borouchaki, S. Lo* // Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering. – 1995. – V. 128. – P. 153 – 167.
18. *Joe B.* Construction Of Three-Dimensional Delaunay Triangulations Using Local Transformations / *B. Joe* // Computer Aided Geometric Design. – 1991. – V. 8. – P. 123 – 142.
19. *Rivara C. M.* Cost analysis of the longest-side refinement algorithm for triangulations / *C. M. Rivara, M. Vemere* // Engineering with Computers. – 1996. – № 3 – 4. – P. 224 – 234.
20. *Skopina M.* Multiresolution Analysis of Periodic Functions / *M. Skopina* // East Journal on Approximations. – 1997. – V. 3, № 2. – P. 203 – 224.
21. *Азаренок Б. Н.* О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений / *Б. Н. Азаренок* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – Т. 49, № 5. – С. 826 – 839.
22. *Вагер Б. Г.* Сплайны при решении прикладных задач метеорологии и гидрологии / *Б. Г. Вагер, Н. К. Серков*. – Л. : Гидрометеоиздат, 1987. – 160 с.
23. *Демьянович Ю.* Локальный базис всплесков на неравномерной сетке / *Ю. Демьянович* // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2006. – Т. 334. – С. 84 – 110.
24. *Андерсон Д.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен : в 2-х т. / *Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер*. – М. : Мир, 1990. – 728 с.
25. *Thompson J. F.* Numerical grid generation. Foundations and applications / *J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin*. – North Holland, 1985. – 483 p.
26. *Bramkamp F.* Development of a flow solver employing local adaptation bazed on multiscale analysis on B-spline grids / *F. Bramkamp, J. Ballmann, S. Muller* // 8th Annual Conf. of the CFD Society, 11 to 13, June, 2000, Montreal, Canada : proceedings.
27. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей : в 2 т. / *К. Флетчер*. – М. : Мир, 1991. – 1056 с.
28. *Smith R. E.* Algebraic Grid Generation / *R. E. Smith* // Applied Mathematics and Computation – Elsevier Science Publishing Company, 1982. – V. 10 – 11. – P. 137 – 170.
29. *Eiseman P. R.* A multi-surface method of coordinate generation / *P. R. Eiseman* // J. of Comp. Phys. – 1979. – V. 33, № 1. – P. 118 – 150.
30. *Eiseman P. R.* Coordinate generation with precise controls over mesh properties / *P. R. Eiseman* // J. of Comp. Phys. – 1982. – V. 47, № 3. – P. 331 – 351.
31. *Eriksson L. E.* Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation / *L. E. Eriksson* // AIAA J.– 1982. – V. 20, № 10. – P. 1313 – 1320.
32. *Fedosenko N.* Application of exact solutions of some elliptic equations for generation of two- and multidimentional analytical grids / *N. Fedosenko, E. Sokolov* // ALGORITMY 2002 : Conference of Scientific Computing : proceedings. – P. 253 – 259.
33. *Соколов Е. И.* Об одном методе построения эллиптических сеток, задаваемых явными аналитическими выражениями / *Е. И. Соколов, Н. Б. Федосенко* // Матем. моделирование. – 2003. – Т. 15, № 6. – С. 101 – 106.
34. *Smith R. E.* Analytic and Approximate Boundary Fitted Coordinate Systems for Fluid Flow Simulation / *R. E. Smith, B. L. Weigel* // 18-th Aerospace Sciences Meeting, 14-16 Jan., 1980, Pasadena, California. – 1980.
35. *Eiseman P. K.* Mesh Generation Using Algebraic Techniques / *P. K. Eiseman, R. E. Smith* // Numerical Grid Generation Techniques. – NASA Conference Publication, 1980. – P. 73 – 120.
36. *Middlecoff J. F.* Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations / *J. F. Middlecoff, P. D. Thomas* // AIAA Paper. – 1980. – V. 18, № 6. – P. 652 – 656.
37. *Thompson J. F.* Use of Numerically Generated Body-Fitted Coordinate Systems for Solution of the Navier-Stokes Equations / *J. F. Thompson, F. C. Thames, C. W. Mastin, S. P. Shanks* // AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut : proceedings. – 1975. – P. 68 – 80.
38. *Thompson J. F.* Numerical Solution of Flow Problems Using Body-Fitted Coordinate Systems / *J. F. Thompson* // Computational Fluid Dynamics. – Washington : Hemisphere Publishing Corp., 1980. – 98 p.
39. *Steger J. L.* Use of Hyperbolic Partial Differential Equations to Generate Body Fitted Coordinates / *J. L. Steger, R. L. Sorenson* // Numerical Grid Generation Techniques. –1980. – P. 463 – 478.
40. Неструктурированные адаптивные сетки для задач математической физики (обзор) / *Л. В. Круглякова, А. В. Неледова, В. Ф. Тишкин, А. Ю. Филатов* // Матем. моделирование. – 1998. – Т. 10, № 3. – С. 93 – 116.
41. *Barth T. J.* Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier – Stokes equations / *T. J. Barth* // Computational Fluid Dynamics. – 1994. – № 4.
42. *Войнович П. А.* Моделирование разрывных течений газа на неструктурированных сетках. 1. Построение квазимонотонной схемы повышенного порядка аппроксимации / *П. А. Войнович, Д. М. Шаров* // Мат. моделир. – 1993. – Т. 5, № 7. – С. 86 – 100.

43. Разностные схемы на нерегулярных сетках / *А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский*. – Минск, 1996. – 273 с.
44. *Thompson J. F.* A survey of dynamically adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations / *J. F. Thompson* / Appl. Numer. Math. – 1985. – № 1. – P. 3 – 28.
45. *Томпсон Дж. Ф.* Методы расчета сеток в вычислительной аэродинамике / *Дж. Ф. Томпсон* // Аэрокосмическая техника.– 1985. – Т. 3, № 8. – С. 141 – 171.
46. *Venkatakrishnan V.* Perspective on unstructured grid flow solvers / *V. Venkatakrishnan* // AIAA J. – 1996. – V. 34, № 3. – P. 553 – 547.
47. *Powell K. G.* Adaptive-mesh algorithms for computational fluid dynamics / *K. G. Powell, P. L Roe* // Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics. – Springer-Verlag, 1993. – P. 303 – 337.
48. *Pironneau O.* Advances for the simulation of compressible viscous flows on unstructured meshes / *O. Pironneau* // Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics. – Springer-Verlag, 1993. – P. 33 – 57.
49. *Thompson J. F.* A reflection on grid generation in the 90s: trends, needs, and influences / *J. F. Thompson* // Numerical Grid Generation in Computational Fluid Simulations. – Mississippi, 1996 – P. 1029 – 1110.
50. *Freitag L. A.* A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques / *L. A. Freitag, C. Ollivier-Gooch* // Meshing Roundtable : 5th International Conference, October, 1996, Sandia National Laboratories : proceedings. – 1996. – P. 87 – 106.
51. *George P. L.* Tet Meshing : Construction, Optimization and Adaptation / *P. L. George* // 8th International Meshing Roundtable : proceedings. – 1999. – P. 133 – 141.
52. *Rassineux A.* Generation and Optimization of Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique / *A. Rassineux* // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – Wiley, 1998. – V. 41. – P. 651 – 674.
53. *Галанин М. П.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей : итерационные методы / *М. П. Галанин, И. А. Щеглов*. – М., 2006. – 32 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 9)
54. *Корнеев В. Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности / *В. Г. Корнеев*. – Л. : Изд. Ленингр. ун-та, 1977. – 206 с.
55. *Shimada K.* Bubble Mesh: Automated Triangular Meshing of Non-manifold Geometry by Sphere Packing / *K. Shimada, D. C. Gossard* // 3rd ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, 17-19 May, 1995, Salt Lake City, UT, USA : proceedings. – New York : ACM Press, 1995. – P. 409 – 419.
56. *Baker T. J.* Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions Using a Constrained Delaunay Triangulation / *T. J. Baker* // Engineering With Computers. – 1989. – № 5. – P. 161 – 175.
57. *Buratynski E. K.* A Three-Dimensional Unstructured Mesh Generator for Arbitrary Internal Boundaries / *E. K. Buratynski* // Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics. – Swansea : Pineridge Press, 1988. – P. 621 – 631.
58. *Rebay S.* Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm / *S. Rebay* // Journal Of Computational Physics. – 1993. – V. 106. – P. 125 – 138.
59. *Shimada K.* Anisotropic Triangular Meshing of Parametric Surfaces via Close Packing of Ellipsoidal Bubbles / *K. Shimada, A. Yamada, T. Itoh* // 6th International Meshing Roundtable : proceedings. – USA : Sandia Corporation, 1997. – P. 75 – 390.
60. *Скворцов А. В.* Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / *А. В. Скворцов* // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 14 – 39.
61. *Weatherill N. P.* Efficient three-dimensional Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constrains / *N. P Weatherill, O. Hassan* // Int. J. Numer. – Meth. Eng. – 1994. – V. 37, № 12. – P. 2005 – 2039.
62. *Lohner R.* Generation Of Three-Dimensional Unstructured Grids By The Advancing Front Method / *R. Lohner, P. Parikh* // International Journal of Numerical Methods in Fluids. – 1988. – Vol. 8. – P. 1135 – 1149.
63. *Lo S. H.* Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces / *S. H. Lo* // Computers and Structures. – 1991. – V. 39, № 5. – P. 493 – 500.
64. *Lo S. H.* Volume Discretization into Tetrahedra-II. 3D Triangulation by Advancing Front Approach / *S. H. Lo* // Computers and Structures. – 1991. – V. 39, № 5. – P. 501 – 511.
65. *Owen S.* A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology : proceedings / *S. Owen* // Meshing Roundtable : 7th International, Oct, 1998, Dearborn : proceedings. – Dearborn, 1998. – P. 239 – 269.
66. *Rubbert P. E.* Patched coordinate systems / *P. E. Rubbert, K. D. Lee* // Numerical Grid Generation / ed. by J. F. Thompson. – 1982. – P. 235 – 252.
67. *Лабусов А. Н.* Генерация сетки [Электронный ресурс] / *А. Н. Лабусов*. – Режим доступа к документу : http://www.spbcas.ru/cfd/techn/Grids.htm.
68. *Игнатьев А. А.* Построение регулярных сеток с помощью механической аналогии / *А. А Игнатьев* // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 2. – С. 101 – 105.
69. *Noak R. W.* A three-dimensional hybrid grid generation technique / *R. W. Noak, J. P. Steinbrenner* // Computational Fluid Dynamics : 12-th AIAA Conference : materials. – San-Diego, 1995. – P. 413 – 423.
70. *Benek J. A.* Extended chimera grid embedding scheme with application to viscous flows / *J. A. Benek, T. L. Donegan* // Computational Fluid Dynamics : 8th AIAA Conference, 9-11 June, 1987, Honolulu : materials. – New York : AIAA, 1987. – P. 272 – 282.
71. *Samet H.* Implementing Ray Tracing with Octrees and Neighbor Finding. / *H. Samet* // Computer and Graphics. – 1989. – V. 13, № 4. – P. 445 – 460.
72. *Samet H.* The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures / *H. Samet* // ACM Comput. Surveys. – 1984. – V. 16, № 2. – P. 187 – 260.

73. *Samet H.* Computing Geometric Properties of Images Represented by Linear Quadtrees / *H. Samet, M. Tamminen* // IEEE Transaction on Patter Analysis and Machine Intelligenc. – 1985. – V. 7, № 2. – P. 229 – 240.
74. *Samet H.* Neighbor Finding Techniques for Images Represented Quadtrees / *H. Samet* // Computer Graphics and Image processing. – 1982. – V. 17, № 1. – P. 37 – 57.
75. *Burroughs P. A*. Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment / *P. A. Burroughs*. – Oxford : Clarendon Press, 1994. – 193 p.
76. *Samet H.* The Design and Analysis of Spatial Data Structures / *H. Samet*. – 1990. – 499 p.
77. *Carlbom I.* A Hierarchical Data Structure for Representing the Spatial Decomposition of 3D Objects / *I. Carlbom, I. Chakravarty and D. Vanderschel* // Frontiers in Computer Graphics. – New York : Springer-Verlag, 1985. – P. 2 – 12.
78. *Kaufman A. E.* Volume Graphics. Sidebar : Fundamentals of Voxelization / *Arie E. Kaufman, Daniel Cohen-Or, Roni Yagel* // IEEE Computer. – 1993. – V. 26, № 7. – P. 51 – 64.
79. *Игнатенко А*. Методы представления дискретных трехмерных данных [Электронный ресурс] / *А. Игнатенко* // Компьютерная графика и мультимедиа. – 2003. – Вып. 1. – Режим доступа к документу : http://cgm.computergraphics.ru/content/view/22.
80. 3D Pixel / Voxel [Электронный ресурс]. – Режим доступа к информации : http://www.bilderzucht.de/blog/3d-pixel-voxel/.
81. *Лисейкин В. Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток / *В. Д. Лисейкин* // ЖВМиМФ. – 1996. – Т. 36, № 1. – С. 3 – 41.
82. Feedback, Adaptivity and A-Posterior Estimates in Finite Elements: Aims, Theory and Experience / *E. R. Arantes, E. Oliveira, I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. P. Gado, eds*. // International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computation, June, 1984, Lisbon, Portugal : proceedings. – Lisbon, 1984.
83. *Rivara M.* A 3D refinement algorithm suitable for adaptive and multi-grid techniques / *M. Rivara, C. Levi*n // J. Comp. and Appl. Math. – 1992. – № 8. – P. 281 – 290.
84. *Field D. A.* The legacy of automatic mesh generation from solid modeling / *D. A. Field* // Computer-Aided Geometric Design. – 1995. – V. 12, № 7. – P. 651 – 673.
85. *Басс В. П.* Гиперзвуковое обтекание теплоизолированного цилиндра разреженным газом / *В. П. Басс, Л. Л. Печерица* // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2006. – Т. 1, вип. 10. – С. 50 – 60.

Институт технической механики
НАН Украины и ГКА Украины,
Днепропетровск

Получено 23.02.2013,
в окончательном варианте 11.03.2013