

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ТРЕЩИНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ

Исследуется влияние дополнительной сосредоточенной массы на изменение частотного спектра балки с трещиной. Открытая поперечная трещина моделируется упругим шарниром, жесткость которого находится с помощью конечно-элементной модели. Уравнение свободных колебаний балки с трещиной и дополнительной массой составляется с применением обобщенных функций и решается численно-аналитическим методом, предложенным Лазаряном. Показано, что наличие сосредоточенной массы на конструкции с трещиной более заметно изменяет частоты и формы ее колебаний. Это может быть использовано при диагностике конструкций.

Досліджується вплив додаткової зосередженої маси на зміну частотного спектра балки з тріщиною. Відкрита поперечна тріщина моделюється пружним шарніром, жорсткість якого знаходиться за допомогою скінченно-елементної моделі. Рівняння вільних коливань балки з тріщиною і додатковою масою складається із застосуванням узагальнених функцій і розв'язується чисельно-аналітичним методом, запропонованим Лазаряном. Показано, що наявність зосередженої маси на конструкції з тріщиною більш помітно змінює частоти і форми її коливань. Це може бути використано при діагностиці конструкцій.

We investigate the effect of additional concentrated mass to change the frequency spectrum of a beam with a crack. Open transverse crack is modeled elastic hinge stiffness of which is by using a finite element model. Equation of free vibrations of a beam with a crack and the additional weight of the use of generalized functions and solved numerically-analytical method proposed by Lazarian. It is shown that the presence of a concentrated mass on the design with a crack is more noticeable change frequencies and forms of vibrations. This can be used in the diagnosis of structures.

Усталостная трещина является одним из наиболее распространенных видов повреждений, возникающих в процессе эксплуатации машиностроительных и транспортных конструкций. Основное направление исследований по динамике конструкций с трещинами связано с идентификацией трещин и их локализацией по изменению частотного спектра конструкции по сравнению с цельной конструкцией. В работе [1] на основании экспериментальных исследований показано, что наличие в конструкции трещины и ее местоположение легче обнаружить путем прикрепления дополнительной сосредоточенной массы, за счет чего происходит существенный "сдвиг" частот.

В данной работе аналитически исследуется влияние дополнительной сосредоточенной массы на изменение частотного спектра балки с трещиной. Одной из математических моделей усталостной трещины есть представление ее в виде упругого шарнира [2]. На рис. 1 показано соединительное устройство между двумя сегментами стержня в виде упругого шарнира, состоящее из цилиндрического шарнира Ш и упругой связи, препятствующей повороту примыкающих к шарниру концов сегментов балки относительно друг друга. Жесткость упругого шарнира k_T равна величине момента $M_{Ш}$, который необходимо приложить соединительному устройству, чтобы угол поворота сегментов балки относительно друг друга был равен единице.

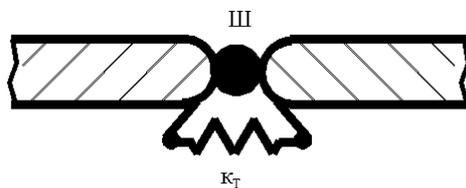


Рис. 1

1. В работе жесткость упругого шарнира k_T находится численно с помо-

© А.О. Брынза, 2013

щью конечно-элементной модели. Трещина моделируется поперечным разрезом определенной глубины. Изменение угла поворота сечений по обе стороны от трещины ($\Delta\theta$) в зависимости от глубины трещины, ввиду его малости, определяется как отношение разницы Δ_x горизонтальных перемещений верхних узлов конечно-элементной модели балки по обе стороны разреза к высоте поперечного сечения ($\Delta\theta = \Delta_x/b$). Тогда жесткость упругого шарнира $k_T = M_{ш}/\Delta\theta$.

В качестве примера рассматривается консольная балка длиной $l = 5$ м квадратного поперечного сечения $b = 0,2$ м, нагруженная моментом $M_{ш} = 1$ кНм. Разрез шириной $0,01$ м, разной относительной глубины (Γ), расположен в среднем сечении балки.

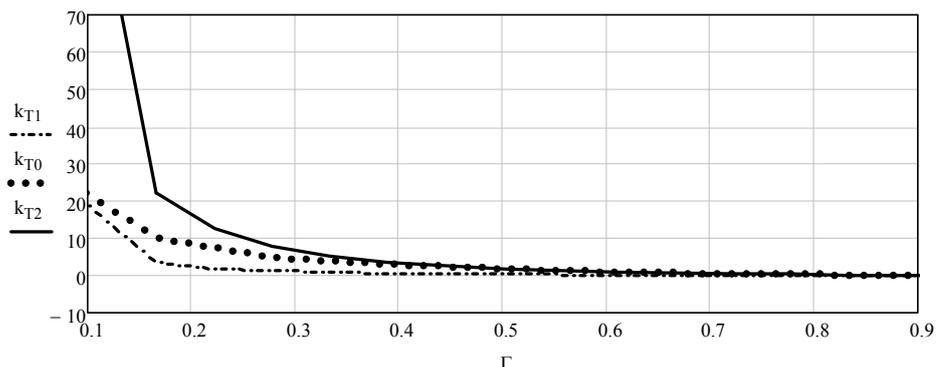


Рис. 2

На рис. 2 приведены графики изменения жесткостей упругого шарнира, деленных на изгибную жесткость балки (k_{Ti}/EI), в зависимости от глубины трещины (Γ), найденные с помощью конечно-элементной модели (k_{T0}) и взятые из работ [2, 3] (k_{T1} и k_{T2} соответственно). Как видно из графиков, они мало отличаются в среднем диапазоне относительных глубин. Необходимо отметить, что коэффициент жесткости упругого шарнира не зависит от положения трещины и способа закрепления концов балки.

Для проверки предложенной модели трещины были определены вертикальные перемещения крайнего сечения консольной балки (в мм) при различных глубинах трещины по конечно-элементной модели и с применением упругого шарнира. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

Прогибы крайнего сечения балки при различных глубинах трещины									
Типы моделей трещины	Относительная глубина трещины (Γ)								
	0	1/18	3/18	5/18	7/18	9/18	11/18	13/18	15/18
Конечно-элементная	0,46	0,46	0,464	0,474	0,491	0,523	0,584	0,734	1,29
Упругий шарнир	0,456	0,456	0,465	0,474	0,487	0,515	0,567	0,701	1,22

Из приведенных результатов видно, что расхождение перемещений, найденное по двум моделям, довольно незначительно. Таким образом, моделирование открытой трещины упругим шарниром вполне допустимо.

2. Рассмотрим свободные колебания балки, несущей сосредоточенную массу M , при наличии трещины. Пусть трещина находится в сечении $x = x_T$, а сосредоточенная масса – в сечении $x = x_M$. Дифференциальное уравнение форм собственных колебаний имеет следующий вид

$$[EI(x)X_k'''] - m(x)v_k^2 X_k = 0, \quad (1)$$

где EI – изгибная жесткость балки, $m(x) = m_0 + M\sigma_1(x - x_M)$, m_0 – погонная масса балки, а $\sigma_1(x - x_M)$ – импульсивная функция первого порядка, или δ -функция Дирака.

Заменим уравнение (1) следующей системой уравнений [4]

$$X_k'' = \frac{I_0}{I(x)} z, \quad EI_0 z_k'' = m(x)v_k^2 X_k, \quad (2)$$

где $z = -\frac{M(x)}{EI_0}$ – «масштабированный» изгибающий момент.

В общем случае перемещение $X_k(x)$ может быть представлено в виде

$$X_k(x) = X_k^* + \Delta X_k'(x_T)(x - x_T)\sigma_0(x - x_T), \quad (3)$$

где X_k^* – некоторая функция, имеющая непрерывную первую производную по x ; $\Delta X_k'(x_T) = X'(x_T + 0) - X'(x_T - 0)$ – взаимный угол поворота сечений слева и справа от трещины (упругого шарнира), а

$$\Delta X_k'(x - x_T)\sigma_0(x - x_T) = \begin{cases} \Delta X_k'(x - x_T) & \text{при } x > x_T \\ 0 & \text{при } x \leq x_T \end{cases} - \text{линейный}$$

сплайн.

Тогда $X_k(x)$ есть непрерывная в сечении $x = x_T$ функция. Дифференцируя соотношение (3) дважды по x , получаем

$$X_k'' = X_k^{*''} + \Delta X_k''(x_T)\sigma_1(x - x_T).$$

Подставляя это выражение в равенство (2), находим

$$\frac{I_0}{I(x)} = \frac{X_k^{*''}}{z} + \frac{1}{z} \Delta X_k''(x_T)\sigma_1(x - x_T).$$

При $x \neq x_T$ $I(x) = I_0$, поэтому $\frac{X_k^{*''}}{z} = 1$. В силу непрерывности z в точке $x = x_T$ и на основании фильтрующего свойства δ -функция Дирака

$$\frac{\sigma_1(x - x_T)}{z(x)} = \frac{\sigma_1(x - x_T)}{z(x_T)}.$$

Но $\frac{\Delta X_k'(x_T)}{z(x_T)} = \frac{EI_0}{k_T}$, где k_T – жесткость упругого шарнира, моделирующего трещину. Поэтому

$$EI(x) = EI_0 \left[1 + \frac{EI_0}{k_T} \sigma_1(x - x_T) \right]^{-1}. \quad (5)$$

Таким образом, изгибная жесткость $EI(x)$ равна EI_0 всюду, кроме сечения $x = x_T$. В этом сечении она имеет сосредоточенное включение определяемое выражением (5). На основании уравнения (2)

$$X_k'' = \frac{EI_0}{EI(x)} z = \left[1 + \frac{EI_0}{k_T} \sigma_1(x - x_T) \right] z,$$

или, в силу непрерывности z в сечении $x = x_T$

$$X_k'' = z + \frac{EI_0}{k_T} z(x_T) \sigma_1(x - x_T).$$

Дифференцируя дважды это соотношение и подставляя на основании второго уравнения (2) $z'' = \frac{V_k^2}{EI_0} (m_0 + M \sigma_1(x - x_M)) X_k(x)$, получаем дифференциальное уравнение форм свободных колебаний балки, несущей сосредоточенную массу, при наличии трещины

$$X_k^{IV} - \frac{m_0 V_k^2}{EI_0} X_k = \frac{M V_k^2}{EI_0} X_k(x_M) \sigma_1(x - x_M) + \frac{EI_0}{k_T} z(x_T) \sigma_3(x - x_T),$$

или

$$X_k^{IV} - k_k^4 X_k = \frac{M V_k^2}{EI_0} X_k(x_M) \sigma_1(x - x_M) + \Delta X_k'(x_T) \sigma_3(x - x_T), \quad (6)$$

где $k_k^4 = \frac{m_0 V_k^2}{EI_0}$, а $\sigma_3(x - x_T)$ – импульсивная функция третьего порядка.

Решение уравнения (6) находится с помощью преобразования Лапласа и имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
X_k(x) &= v(0)Y_1(k_k x) + v'(0)\frac{Y_2(k_k x)}{k_k} + v''(0)\frac{Y_3(k_k x)}{k_k^2} + v'''(0)\frac{Y_4(k_k x)}{k_k^3} + \\
&+ \frac{Mv_k^2}{EI_0}X_k(x_M)\frac{Y_4(k(x-x_M))}{k_k^3}\sigma_0(x-x_M) + \\
&+ \Delta X_k'(x_T)\frac{Y_2(k_k(x-x_T))}{k_k}\sigma_0(x-x_T) = v_0 Y_1(k_k x) + \\
&+ \theta_0 \frac{Y_2(k_k x)}{k_k} - \frac{M_0}{EI_0} \frac{Y_3(k_k x)}{k_k^2} - \frac{Q_0}{EI_0} \frac{Y_4(k_k x)}{k_k^3} + \\
&+ \frac{Mv_k^2}{EI_0}X_k(x_M)\frac{Y_4(k(x-x_M))}{k_k^3}\sigma_0(x-x_M) + \\
&+ \Delta X_k'(x_T)\frac{Y_2(k_k(x-x_T))}{k_k}\sigma_0(x-x_T).
\end{aligned}$$

Здесь $X_k(x_M)$, $\Delta X_k'(x_T) = -\frac{Mx(x_T)}{k_T} = \frac{EI_0 X_k''(x_T)}{k_T}$ – промежуточные параметры, выражающиеся через начальные параметры и некоторые функции влияния.

В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую балку. Будем полагать, что сосредоточенная масса находится справа от трещины ($x_T < x_M$). Исключив промежуточные параметры, получим выражение $X_k(x)$, которое будет иметь разрыв непрерывности I рода только при $x = x_T$

$$\begin{aligned}
X_k(x) &= \\
&= \theta_0 \left\{ \frac{Y_2(k_k x)}{k_k} + \frac{Mv_k^2}{EI_0} \left[\frac{Y_2(k_k x_M)}{k_k} + \frac{EI_0}{k_T} Y_4(k_k x_T) Y_2(k_k(x_M - x_T)) \right] \frac{Y_4(k_k(x - x_M))}{k_k^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{EI_0}{k_T} Y_4(k_k x_T) \frac{Y_2(k_k(x - x_T))}{k_k} \right\} - \\
&- Q_0 \left\{ \frac{Y_4(k_k x)}{EI_0 k_k^3} + \frac{Mv_k^2}{EI_0} \left[\frac{Y_4(k_k x_M)}{EI_0 k_k^3} + \frac{Y_2(k_k x_T)}{k_T \cdot k_k^2} Y_2(k_k(x_M - x_T)) \right] \frac{Y_4(k_k(x - x_M))}{k_k^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Y_2(k_k x_T)}{k_T k_k^2} Y_2(k_k(x - x_T)) \right\}.
\end{aligned}$$

Для составления характеристического уравнения используем граничные условия на правом конце балки $X_k(L) = X_k''(L) = 0$.

Для проверки приведенной математической модели балки с сосредоточенной массой, рассмотрим случай, когда погонная масса балки уменьшается на 5 порядков, т. е. принимается практически равной нулю, а изгибная жесткость балки остается без изменений. В этом случае балка с дополнительной массой превращается в систему с одной степенью свободы. Частота колебаний такой системы, когда дополнительная масса расположена на середине

длины, лишь на 0,2% отличается от решения, найденного для системы с одной степенью свободы.

Были рассмотрены свободные колебания шарнирно опертой балки длиной 10 м, с размерами поперечного сечения $0,1 \times 0,1 \text{ м}^2$ при наличии трещины с дополнительной сосредоточенной массой. В таблице 2 приведены частоты колебаний балки с трещиной различной относительной глубины при отсутствии сосредоточенной массы. Здесь $\ell_T = x_T / \ell$ – относительная координата трещины, а Γ – ее относительная глубина. В таблице 3 приведены низшие частоты балки с трещиной относительной глубины $\Gamma = 0,333$ и с дополнительной массой M , равной 10% от массы балки (m_ℓ), при различных положениях трещины и дополнительной массы. На рис. 3 приведены первые формы колебаний балки с трещиной ($\Gamma = 0,333$, $\ell_T = 0,5$) и дополнительной массой ($M = 0,1m_\ell$), приложенной со смещением от трещины ($\ell_M = 0,75$). Здесь X_1 – форма колебаний балки при отсутствии трещины и массы, X_2 – при отсутствии трещины, но с дополнительной массой, X_3 – при наличии трещины и отсутствии массы, X_4 – при наличии трещины и дополнительной массы.

Таблица 2

№ частот	Балка без трещины	Балка с трещиной								
		$\ell_T = 0,2$			$\ell_T = 0,35$			$\ell_T = 0,5$		
		Γ			Γ			Γ		
		0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7
1	14,24	14,23	14,12	13,79	14,21	13,95	13,26	14,2	13,88	13,04
2	56,98	55,96	54,84	52,28	56	55,2	54,08	56,98	56,98	56,98
3	128,2	127,8	125,4	120,1	128,2	128,1	127,9	127,8	125,1	118,7
4	227,9	227,6	226,1	222,9	227,2	222,9	213	227,9	227,9	227,9

Таблица 3

№ частот	Нет трещины, нет массы	Балка с трещиной ($\Gamma=0,333$) и дополнительной массой ($M=0,1m_\ell$)							
		Нет трещины, есть масса		Есть трещина, нет массы		Есть трещина, есть масса			
		$\ell_M=0,25$	$\ell_M=0,5$	$\ell_T=0,25$	$\ell_T=0,5$	$\ell_T=0,25$ $\ell_M=0,25$	$\ell_T=0,25$ $\ell_M=0,5$	$\ell_T=0,5$ $\ell_M=0,25$	$\ell_T=0,5$ $\ell_M=0,5$
1	14.24	13.57	13	14.2	14.2	13.59	12.98	13.62	13.05
2	57	52.34	56.97	56.78	57	51.86	56.78	51.67	56.93
3	128.2	123.6	118.5	127.9	126.2	124.2	117.9	123.4	208.4
4	227.9	227.9	227.6	227.9	227.9	241	227.9	227.9	232.7

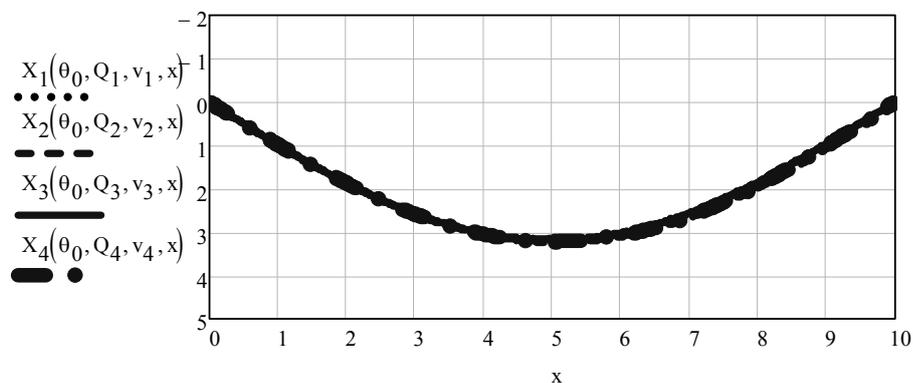


Рис. 3

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. При отсутствии сосредоточенной массы величина «сдвига» частот зависит от размера и местоположения трещины. При малых трещинах частоты изменяются незначительно. Если трещина находится в «пучности» колебаний, то соответствующая частота сдвигается на «максимальную» для данного размера дефекта величину. Нахождение трещины в «узле» колебаний не приводит к сдвигу соответствующей частоты.

2. Наличие дополнительной сосредоточенной массы на балке заметно «сдвигает» частоты. Однако при малых трещинах «сдвиг» частот происходит за счет влияния дополнительной массы. При средних и больших трещинах наличие небольшой дополнительной массы заметно «сдвигает» частоты собственных колебаний по сравнению с частотами колебаний балки с такой же дополнительной массой, но без трещины. Причем чем ближе расположена масса к трещине, тем больший наблюдается «сдвиг» частот. Формы колебаний при этом мало изменяются.

3. Приведенные результаты в целом согласуются с выводами, сделанными в работе [1].

1. Редченко В. П. Дослідження проблеми виявлення дефектів мостів методами вібродіагностики / В. П. Редченко, Ю. В. Крючков, Т. В. Редченко // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2011. – Вип. 39. – С. 168 – 172.
2. Бересневич В. И. Сопоставительный анализ математических моделей усталостной трещины / В. И. Бересневич // Вестник научно-технического развития, НТГ. – 2009. – № 12(28). – С. 12 – 18.
3. Vamnios Y. Identification of cracks in single and double-cracked beams using mechanical impedance / Y. Vamnios, E. Douka, A. Trochidis // Proc. X Intern. Congress on sound and vibration, 2003, Stockholm, Sweden. – Stockholm, 2003. – P. 1267 – 1274.
4. Hai-Ping Lin Dynamic design of beams using crack tuning / Hai-Ping Lin // Proc. XV Intern. congress on sound and vibration, 2008, Daejeon, Korea. – Daejeon, 2008. – P. 215 – 222.
5. Лазарян В. А. Обобщенные функции в задачах механики / В. А. Лазарян, С. И. Конашненко. – К. : Наукова думка, 1974. – 190 с.

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. академика В. Лазаряна, Днепропетровск.

Получено 3.07.12
в окончательном варианте 3.12.12