УДК 622.73

В.Ф. ПОЖИДАЕВ, Н.С. ПРЯДКО

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОДУКТОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Изучено поведение и области применения весовой функции распределения по крупности, подчиняющейся двум законам распределения: модифицированному логарифмическому нормальному распределению Колмогорова и обобщенному закону распределения Вейбулла. Определена точка их стыковки и связь параметров обоих формул, регулирующих характер поведения кривой распределения на всей области существования.

Вивчено поводження й області застосування вагової функції розподілу за крупністю, що підкоряється двом законам розподілу: модифікованому логарифмічному нормальному розподілу Колмогорова й узагальненому закону розподілу Вейбулла. Визначено місце їхнього стикування й зв'язок параметрів обох формул, що регулюють характер поводження кривої розподілу на всій області існування.

The behavior and applications of the weighting function of distribution in size are studied according to the two distribution laws: Kolmogorov's modified logarithmic normal distribution and Vabull's generalized distribution. The point of their coincidence and parametric coupling for both of formulae controlling the behavior of the distribution curve along the whole existence region is determined.

Значительные трудности, а в ряде случаев невозможность определить опытным путем распределение зерен измельченного минерального сырья, особенно в мелких классах, явилось причиной многочисленных исследований. Поискам аналитических выражений способствовала замеченная, в казалось бы случайном процессе измельчения, устойчивость распределения зерен по классам крупности. Известно немало случаев, когда стремление к расширению диапазона применимости уравнений приводило к противоречивым суждениям о степени пригодности их к конкретным задачам. Нередко виной тому являлось применение уравнения к интервалу крупности, не исследованному и не рекомендованному автором [1].

Многие исследователи неоднократно обращались к фундаментальному результату А. Н. Колмогорова о предельном распределении [2]. Как известно, предельным законом при дроблении независимо от способа измельчения является логарифмически-нормальное распределение. Истинный закон распределения асимптотически приближается к предельному.

Исчисление средних характеристик смеси зерен всегда наталкивается на одно принципиальное затруднение: неопределенность значения самого термина. Так, для вычисления среднего диаметра смеси зерен в диапазоне крупности (a,b) существует очень большое число формул.

Задача исчисления среднего диаметра становится определенной и вполне разрешимой, если исходить из следующего определения средней величины: средней аргумента x по рассматриваемому определяющему свойству коллектива S мы назовем то одинаковое для всех членов коллектива значение аргумента $\overline{x}$, которое им можно придать, не изменяя определяющего свойства коллектива. То есть, средняя есть величина $\overline{x}$, характеризующая объективно уравненный коллектив $\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}$, но при этом имеющая такое же количественное выражение определяющего свойства.

Таким образом, каждое свойство коллектива зерен отражается своей особой средней. В зависимости от того, какое свойство мы стремимся отобразить в средней, нам приходится вычислять ее то одним, то другим способом. Из этого вытекает, что средний диаметр должен быть заранее рассчитан на отображение какого-либо свойства, которое мы и будем называть “определяющим”.

Для того чтобы определяющее свойство было отображено в среднем диаметре, нужно уметь выразить это свойство в виде функции $f(x)$, зависящей от диаметра частиц данного класса (a,b). Тогда если z означает средний размер частиц этого класса, то $\int_a^b f(x)dx = f(z)$. Решая полученное таким образом уравнение относительно z, получим надлежащую для данного конкретного случая формулу вычисления среднего диаметра.

Вопрос о том, какой характер имеет распределение частиц по размерам внутри узкого класса крупности, неотделим от вопроса об эквивалентном диаметре частиц этого класса. Обычно считается, что средний диаметр частиц узкого класса крупности есть среднее арифметическое его граничных диаметров. Это означает не что иное, как допущение того, что внутри этого класса справедливо равномерное распределение частиц по размерам. Не всегда такие предположения могут быть удовлетворительными. Можно достаточно точно решить задачу об отыскании эквивалентных диаметров и плотности распределения частиц узкого класса крупности. Будем считать известными величины a,b,γ, где a и b – граничные диаметры класса крупности (a,b), γ – выход этого класса.

Пусть $F(x)$ – кумулятивная характеристика по минусу. Будем ее также называть функцией распределения в весовых долях, которая описывает распределение во всем диапазоне крупности $(0,D)$, где D – крупность максимального куска. Обозначим далее через $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ соответственно истинную плотность и истинную функцию распределения случайной величины x. Между функциями $F(x)$ и $\Phi(x)$ существует взаимно однозначная связь [3]. Если известна $F(x)$, то известной является и $\Phi(x)$ во всем диапазоне крупности $(0,D)$.

Цель данной работы – отыскание достаточно простых и точных представлений функций φ и Φ, справедливых только внутри интервала (a,b).

Одной из актуальных задач измельчения минерального сырья является нахождение весовой функции распределения по крупности. Решение этой задачи осложняется тем, что в области крупных классов распределение по крупности традиционно описывается законом Вейбулла, а для мелких классов (особенно в окрестности нуля), как доказано Колмогоровым, работает логарифмический нормальный закон.

Рассмотрим весовую функцию распределения, связанную с логарифмическим нормальным распределением Колмогорова. Полученную функцию назовем модифицированным логарифмическим нормальным законом

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{\mu} - \sigma\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \ln\mu}{\sigma} - \sigma\right), \tag{1}$$

где μ – мода распределения, σ^2 – дисперсия $\ln\frac{x}{\mu}$.

Рассмотрим весовую функцию распределения Вейбулла. Традиционной записью является $F_2(x) = 1 - \alpha x^r$, где α, r – параметры.

Но существует также следующее эквивалентное представление:

$$F_2 = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\} \tag{2}$$

Исследуем свойства функции F_2. После замены $t = \left(\frac{x}{l}\right)^r$, где l – переменная, функция распределения имеет вид : $F_2 = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\}$, и ее производная $\left(F_2\right)'_x = e^{-t}\,\frac{r}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{r-1}$.

Найдем область, в которой $\left(F_2\right)''_x > 0$. Для этого прологарифмируем первую производную и найдем вторую производную функции:

$$\left(F_2\right)''_x = F_2 \cdot \frac{r}{x}\left(\frac{r-1}{r} - \left(\frac{x}{l}\right)^r\right).$$

Однако, $F_2 \geq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$, т. к. F_2 – функция распределения. Следовательно, F_2 не влияет на знак и при решении неравенства ее можно отбросить. Из вероятностного смысла функции распределения $r > 0$, $\alpha > 0$, $l > 0$, $x > 0$. Отсюда $\frac{r}{x} > 0$. В итоге получим:

$$\left(F_2\right)''_x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < l\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{3}$$

Таким образом, условие выпуклости вниз функции F_2 приводит к неравенству (3), которое определяет область его выполнения. Это условие необходимо иметь в виду для разграничения области действия закона распределения.

Поскольку функции F_1 и F_2 призваны описывать одну случайную величину – крупность – в разных областях ее изменения, необходимо выяснить связь параметров, регулирующих характер поведения кривой распределения до точки их стыковки и после. Используя проведенную выше замену $\left(\frac{x}{l}\right)^r = t$, получаем $\ln x = \ln l + \frac{1}{r}\ln t$ и подставляем это выражение в F_1

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \ln\mu}{\sigma} - \sigma\right) = \Phi\left(\frac{1}{r\sigma}\ln t + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{l}{\mu} - \sigma\right).$$

Перейдем к новой переменной t и в законе распределения Вейбулла (2):

$$F_2(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{l}\right)^r} = 1 - e^{-t}.$$

Обозначим через d значение x, которое разделяет области действия F_1 и F_2. Тогда, подставив $x = d$, найдем $\left(\frac{d}{l}\right)^r = \tau$ – точку разделения в новых координатах. Введем следующие обозначения: $\frac{1}{r\sigma} = a_1$, $\frac{1}{\sigma}\ln\frac{l}{\mu} - \sigma = a_0$ и запишем обобщенную функцию распределения:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t), \ 0 < t \le \tau \\ F_2(t), \ \tau \le t < +\infty \end{cases} = \begin{cases} \Phi(a_0 + a_1 \ln t), \ 0 < t \le \tau \\ 1 - e^{-t}, \quad \tau \le t < +\infty \end{cases}.$$

Очевидно, что в точке $t = \tau$ выполняется условие $\lim\limits_{t\to\tau-} F_1(t) = \lim\limits_{t\to\tau+} F_2(t)$ (или для обобщенной функции $\lim\limits_{t\to\tau-} F(t) = \lim\limits_{t\to\tau+} F(t)$) в силу непрерывности случайной величины x (следовательно, и t), тогда имеем:

$$\Phi(a_0 + a_1 \ln\tau) = 1 - e^{-\tau}, \quad a_0 + a_1 \ln\tau = \Phi^{-1}\left(1 - e^{-\tau}\right).$$

Если в некоторой точке $x = d$ плотность распределения $F'(x)$ терпит разрыв, это означает в общей непрерывной совокупности изменения размеров наличие такого класса частиц, весовая доля которых равна величине скачка функции плотности. Исходная совокупность, тем самым, разбивается на две статистически однородные совокупности, сама при этом не являясь статистически однородной. Поскольку мы имеем дело с однородной совокупностью, потребуем также равенство первых производных в точке $t = \tau$ (условие однородности): $\lim\limits_{t\to\tau-}(F_1)'_t = \lim\limits_{t\to\tau+}(F_2)'_t$ (или для обобщенной функции $\lim\limits_{t\to\tau-} F'_t = \lim\limits_{t\to\tau+} F'_t$). Найдем производные функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$ в точке $t = \tau$:

$$(F_1)'_{t=\tau} = \varphi(a_0 + a_1 \ln\tau)\frac{a_1}{\tau} = \frac{a_1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(a_0 + a_1\ln\tau)^2\right\} \text{ и } (F_2)'_{t=\tau} = e^{-\tau}.$$

Найдя производные функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$, можно определить производную обобщенной функции:

$$F'_t = \begin{cases} \frac{a_1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(a_0 + a_1\ln t)^2\right\}, 0 < t \le \tau \\ e^{-t}, \tau \le t \le +\infty \end{cases}.$$

Из условия однородности:

$$\frac{a_1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(a_0 + a_1\ln\tau)^2} = e^{-\tau}.$$

Прологарифмируем полученное выражение и преобразуем его: $\ln\frac{a_1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(a_0 + a_1\ln\tau)^2} = \ln e^{-\tau}$, откуда $\ln\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} - \ln\tau - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\ln\tau)^2 = -\tau$.

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{t\to\tau-}\left(F_1\right)''_{t=\tau} = \lim\limits_{t\to\tau+}\left(F_2\right)''_{t=\tau}$ (или для обобщенной функции $\lim\limits_{t\to\tau-} F''_{t=\tau} = \lim\limits_{t\to\tau+} F''_{t=\tau}$). Отметим, что достаточно потребовать равенство $\left(\ln F_1'(t=\tau)\right)' = \left(\ln F_2'(t=\tau)\right)'$. Действительно,

$$\left(F_1\right)''_t = \frac{\left(\ln\left(F_1\right)'_t\right)'_t}{\left(F_1\right)'_t},\ \left(F_2\right)''_t = \frac{\left(\ln\left(F_2\right)'_t\right)'_t}{\left(F_2\right)'_t},$$

и поскольку $\left(F_1\right)'_{t=\tau} = \left(F_2\right)'_{t=\tau}$, достаточно потребовать равенство производных логарифмов. Прологарифмируем производные обеих функций:

$$\ln\left(F_1\right)'_t = \ln\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} - \ln t - \frac{1}{2}\left(a_0 + a_1\ln t\right)^2,\ \ \ln\left(F_2\right)'_t = -t.$$

Тогда $\left(\ln\left(F_1\right)'_t\right)'_t = -\frac{1}{t} - \frac{a_0 + a_1\ln t}{a_1 t}$, $\left(\ln\left(F_2\right)'_t\right)'_t = -1$, $\frac{1}{t} + \frac{a_0 + a_1\ln t}{a_1 t} = 1$, откуда $a_1 + a_0 + a_1\ln t = a_1 t$, $a_0 + a_1\ln t = a_1 t - a_1$.

В точке $t=\tau$ выполняется равенство $a_0 + a_1\ln\tau = a_1\tau - a_1$. Тем самым определяются параметры a_0, a_1, τ. Запишем полученные условия в систему и решим ее:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\ln\tau = \Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right) \\ \ln\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} - \ln\tau - \frac{1}{2}\left(a_0 + a_1\ln\tau\right)^2 = -\tau \\ a_0 + a_1\ln\tau = a_1\tau - a_1 \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения системы третье:

$$\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right) = a_1\tau - a_1,\ \ a_1 = \frac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{\tau-1},\ \text{если } \tau\neq 1 \text{ или } d\neq l.$$

Покажем, что $\tau\neq 1$. Докажем от противного. Пусть $\tau = 1$. Найдем a_0. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{\tau\to 1}\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\left(1-\frac{\ln\tau}{\tau-1}\right)$. Так как $\lim\limits_{\tau\to 1}\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right) = \Phi^{-1}\left(1-e^{-1}\right)$ – число, а $\lim\limits_{\tau\to 1}\frac{\ln\tau}{\tau-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{\tau\to 1}\frac{\frac{1}{\tau}}{1} = 1$,

получим $\lim\limits_{\tau\to 1}\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\left(1-\frac{\ln\tau}{\tau-1}\right) = \Phi^{-1}\left(1-e^{-1}\right)(1-1) = 0$. Но тогда $\Phi^{-1}\left(1-e^{-1}\right) = 0 \Rightarrow \Phi\left(\Phi^{-1}\left(1-e^{-1}\right)\right) = \Phi(0) \Rightarrow 1-e^{-1} = 0{,}5 \Rightarrow e^{-1} = 0{,}5$, $e = 2$. Получили противоречие, следовательно $\tau\neq 1$. Подставим a_1 в первое уравнение:

$$a_0 + \frac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{\tau-1}\ln\tau = \Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right),$$

$$a_0 = \Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right) - \frac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{\tau-1}\ln\tau = \Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\left(1-\frac{\ln\tau}{\tau-1}\right).$$

Таким образом, мы получили выражение для a_0 и a_1:

$$\begin{cases} a_0 = \Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\left(1-\dfrac{\ln\tau}{\tau-1}\right) \\ a_1 = \dfrac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{\tau-1} \end{cases}.$$

Найдем уравнение для определения τ:

$$\ln\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} - \ln\tau - \frac{1}{2}a_1^2(\tau-1)^2 + \tau = 0$$

или $\ln\dfrac{\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)}{(\tau-1)\sqrt{2\pi}} - \ln\tau - \dfrac{1}{2}\left(\Phi^{-1}\left(1-e^{-\tau}\right)\right)^2 + \tau = 0$.

Решив численно это уравнение и подставив найденное значение τ, получим следующие значения параметров стандартного обобщенного закона распределения:

$$\tau = 1{,}820645, \quad a_1 = 1{,}202216, \quad a_0 = 0{,}266236. \qquad (4)$$

Проведем анализ поведения вторых производных функций F_1 и F_2.

$$(F_2)''_t = \left(1-e^{-t}\right)'' = \left(e^{-t}\right)' = -e^{-t} \Rightarrow (F_2)''_t < 0 \quad \forall t.$$

$$(F_1)''_t = -\varphi(a_0 + a_1\ln t)\cdot\frac{a_1}{t^2}\left(a_1(a_0 + a_1\ln t) + 1\right) =$$
$$= -\frac{a_1^2}{t^2}\varphi(a_0 + a_1\ln t)\cdot\left(a_0 + \frac{1}{a_1} + a_1\ln t\right).$$

$$\operatorname{sgn}(F_1)''_t = -\operatorname{sgn}\left(a_0 + \frac{1}{a_1} + a_1\ln t\right).$$

Поскольку функция F_1 действует в окрестности нуля, a_0 и a_1 – положительные константы, то выполняется $t \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(F_1)''_t = -\operatorname{sgn}(\ln t) = +1$.

Найдем точку перегиба (если она существует):

$$(F_1)''_t = 0 \Rightarrow a_1(a_0 + a_1\ln t) + 1 = 0,\ a_0 + a_1\ln t = -\frac{1}{a_1},\ a_1\ln t = -\frac{1}{a_1} - a_0,$$

$$\ln t = -\frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{a_1} + a_0\right) = -0{,}9133411,\ t = e^{-0{,}9133411} = 0{,}401182.$$

Следовательно, точка перегиба существует и находится до точки τ. Отсюда $(F_1)''_t < 0$.

Найдем связь между параметрами α и l в различных записях закона распределения Вейбулла:

$$1-\exp\{\alpha x^r\}=1-\exp\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\},\quad \ln\left(\exp\{\alpha x^r\}\right)=\ln\left(\exp\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^r\right\}\right),\quad \ln\left(\alpha x^r\right)=\ln\left(\frac{x}{l}\right)^r,$$

$$\ln\alpha=-r\ln l \;\Rightarrow\; l=\alpha^{-\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, мы имеем 6 параметров α, l, r, σ, μ, d обобщенного закона распределения и три уравнения, связывающие эти параметры. Учитывая связь между α и l, имеем лишь два независимых параметра. Представляет интерес нахождение четырех параметров при двух заданных.

1) Пусть заданы α и r (либо α и l). Найдем σ, μ, d.

$$a_1=\frac{1}{r\sigma}\Rightarrow\sigma=\frac{1}{a_1 r}.\quad \tau=\left(\frac{d}{l}\right)^r\Rightarrow\ln\tau=\ln\left(\frac{d}{l}\right)^r,\ \ln\tau=r\ln\frac{d}{l},\ d=l\tau^{\frac{1}{r}}.$$

$$a_0=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{l}{\mu}-\sigma\Rightarrow\ln\frac{l}{\mu}=\sigma\left(a_0+\sigma\right),\ln l-\ln\mu=\ln e^{\sigma\left(a_0+\sigma\right)},\ \mu=le^{-\sigma\left(a_0+\sigma\right)}.$$

Таким образом, при заданных α, r, l найдены $\sigma=\frac{1}{a_1 r}$, $d=l\tau^{\frac{1}{r}}$,

$\mu=le^{-\sigma\left(a_0+\sigma\right)}$.

2) При заданных σ и μ аналогично находим α, l, r, d

$$r=\frac{1}{a_1\sigma},\ l=\mu e^{\sigma\left(a_0+\sigma\right)},\ d=\mu\tau^{a_1\tau}e^{\sigma\left(a_0+\sigma\right)}.$$

Для нахождения параметров обобщенного закона распределения воспользуемся методом вероятностной бумаги, предложенным Вейбуллом [3]. Идея метода состоит в следующем: находится такое преобразование координат, при переходе к которому функция распределения преобразуется в прямую. При этом параметры полученной прямой линии однозначно связаны с неизвестными параметрами исходного распределения, подлежащими определению.

Для нахождения преобразования координат найдем функцию, обратную к обобщенной функции распределения.

$$t=F^{-1}(F)=\begin{cases}F_1^{-1}(F),F<F(\tau)\\ F_2^{-1}(F),F>F(\tau)\end{cases},\quad t=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{\Phi^{-1}(F)-a_0}{a_1}\right), & F\le F(\tau),\\ \ln\dfrac{1}{1-F}, & F\ge F(\tau).\end{cases}$$

Поскольку $t = \left(\frac{x}{l}\right)^r$, то $\ln t = r(\ln x - \ln l) = r\ln x - r\ln l$. Таким образом, функция $\ln t = \ln F^{-1}(F)$ линейна относительно $\ln x$. Следовательно, искомым преобразованием координат будет:

$$\varphi = \ln x\,,\ \psi = \begin{cases} \left(\dfrac{\Phi^{-1}(F) - a_0}{a_1}\right), & F \le F(\tau) \\ \ln\ln\dfrac{1}{1-F}, & F \ge F(\tau) \end{cases}.$$

Выводы. Изучено поведение функций, описывающих распределение частиц по крупности в разных областях ее изменения и подчиняющихся модифицированному логарифмическому нормальному распределению Колмогорова и обобщенному закону распределения Вейбулла. Определена точка соединения кривых распределения и установлена связь параметров, регулирующих характер поведения кривой распределения до и после этой точки.

1. *Пилов П. И.* Моделирование замкнутых циклов измельчения на основе гипотезы Риттенгера / *П. И. Пилов, Н. С. Прядко* // Збагачення корисних копалин. – Дн-ск. : НГУ. – 2012.– №51 (92). – С. 98 – 107.
2. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : сб. статей / *А. Н. Колмогоров.* – М. : Наука, 1986. – С. 264 – 266.
3. *Гарус В. К.* Формализация результатов разделительных процессов в углеобогащении/ *В. К. Гарус, О. В. Грачов, В. Ф. Пожидаев, А. Д. Полулях*. – Луганск : изд-во «НВФ «СТЕК», 2003. – 176 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 01.10.12,
в окончательном варианте 19.11.12