

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАВЕРНАХ

Проведен анализ аналитических и численных исследований несжимаемых двумерных течений в кавернах различных конфигураций. Рассмотрены схемы течения, основные расчетные алгоритмы, а также вопросы устойчивости численного счета при больших числах Рейнольдса. Приведены результаты расчета методом конечных элементов течения вязкой несжимаемой жидкости в открытой и частично перекрытой каверне без дна над экраном.

Проведений аналіз аналітичних і чисельних досліджень нестисливих двовимірних течій у кавернах різних конфігурацій. Розглянуті схеми течії, основні розрахункові алгоритми, а також питання стійкості чисельного рахунку при більших числах Рейнольдса. Наведені результати розрахунків методом кінцевих елементів течії в'язкої нестисливої рідини у відкритій і частково перекритій каверні без дна над екраном.

The analysis of the analytical and numerical studies of incompressible two-dimensional flows in cavities of various configurations is carried out. The flow circuits, the major calculated algorithms as well as problems of the numerical computation stability at high Reynolds numbers are considered. The results of calculations of a viscous incompressible liquid flow through open and partially covered cavities without a bottom above the screen are reported using the finite element method.

**Введение.** Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с подвижной верхней крышкой чаще всего применяется исследователями в качестве теста для проверки адекватности численного алгоритма [10, 15 - 16, 18, 24 – 25, 41]. При этом рассматривается схема, в которой жидкость приводится в движение благодаря прилипанию к движущейся с заданной скоростью крышке (рис. 1, а). Разновидностью этой схемы является течение жидкости в каверне с локально подвижной симметрично (рис. 1, б) или несимметрично расположенной крышкой относительно центра каверны. Для открытой каверны циркуляционное течение может вызываться как внешним потоком со стороны отсутствующей крышки (рис. 1, в), так и одновременно потоками со стороны отсутствующей крышки, а также между экраном и проемом в дне каверны (рис. 1, г). Отметим, что для конфигураций каверны с крышкой (рис. 1, а – б) особенностью постановки граничных условий в окрестности угловых точек каверны является наличие разрыва скорости в двух соседних узлах расчетной области, один из которых принадлежит неподвижной стенке каверны, в котором выполняется условие прилипания, а другой – движущейся крышке с заданным ненулевым значением продольной компоненты скорости. С этим связаны получаемые завышенные значения коэффициента давления и касательного напряжения на стенке вблизи угловых точек. Кроме того, данные схемы (рис. 1, а – б) предполагают прямолинейность отрывной линии тока, соединяющей угловые точки каверны и совпадающей с подвижной крышкой.

Детальный обзор моделей течения в квадратной каверне до 1976 года для схем, показанных на рис. 1, а и рис. 1, в, можно найти в [7].

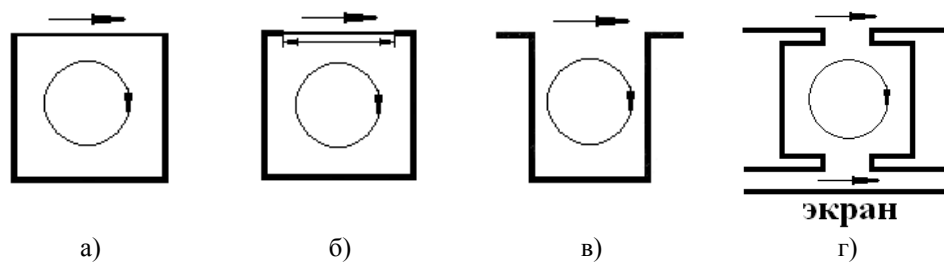


Рис. 1

**1. Аналитические модели.** Аналитическое решение задач течения несжимаемой жидкости в каверне ограничивается рассмотрением нескольких частных случаев задач данного класса: невязкая модель течения, приближение Стокса, применение теоремы Бэтчелора, решение линеаризованных уравнений пограничного слоя.

Невязкая модель (модель Эйлера) имеет два классических решения [17]: 1) допущение о потенциальности всего течения в каверне; 2) решение по схеме Кирхгофа. В первом случае задача решалась с использованием конформных отображений, во втором – применялось разбиение области течения на две: над каверной, где предполагалось поступательное движение, и в самой каверне, где жидкость покоилась. В [6] была сделана попытка выделить зоны отрыва в каверне и допустить, что вне их течение потенциально, а внутри – имеет постоянную заданную завихренность.

Приближение Стокса относится к вязким моделям и эквивалентно решению уравнений Навье–Стокса без учета конвективных слагаемых, что соответствует очень медленному течению. В [54, 58] рассмотрено медленное течение в каверне, для которого получены решения в виде рядов. Вариационный метод для исследования медленного движения в открытой каверне применен автором работы [60].

Учет конвективных членов проводят авторы работ [38, 60]. В [60] с этой целью используется разложение функции тока в ряд по степеням числа Рейнольдса, в [38] рассматривается линеаризованная постановка задачи течения в круглой каверне, для решения которой применяется метод возмущений.

В [36] представлены результаты исследования течения в каверне при больших числах Рейнольдса. Автор доказал, что в случае течения в плоской каверне с замкнутыми линиями тока завихренность для всей области является постоянной величиной. Данное утверждение получило название теоремы Бэтчелора. На основе теоремы Бэтчелора в асимптотическом приближении с учетом влияния вязкости на границе вихря приводится решение в [23]. Автор [56] также использует условие постоянства завихренности и решает задачу в приближении Озеена, где на границе вихря задает постоянную скорость.

Линеаризованные уравнения пограничного слоя для определения течения в каверне использовал автор [47], где на внешней границе пограничного слоя задавался профиль скорости, полученный из экспериментов. В ядре вихря найден профиль скорости в виде ряда.

Течение в открытой каверне осложняется наличием зоны смешения, где происходит перемешивание внешнего потока над каверной и течения непосредственно в каверне. Выбор границ зоны смешения, пограничного слоя,

положения разделяющей линии тока, а также зоны присоединения определяет ту или иную модель течения.

Модель Чепмена (рис. 2). В теории Чепмена [33] допускается, что зона смещения отделена от дна каверны замкнутой областью с малой скоростью движения потока, длина зоны присоединения намного меньше толщины пограничного слоя в отрывной области, в сечении, характеризующемся точкой отрыва потока, пограничный слой отсутствует, давление по длине пограничного слоя не изменяется. Принятые допущения и предположение об удаленности верхней границы расчетной области на бесконечное расстояние приводят задачу течения в открытой каверне к классу автомодельных, что позволяет параметры потока выразить через одну обобщенную переменную, зависящую от двух пространственных координат.

Модель Денисона-Баума. Денисон и Баум [11], основываясь на теории Чепмена, исключили из рассмотрения допущение об отсутствии пограничного слоя в сечении, характеризующемся точкой отрыва, и показали, что начальный профиль скорости (допускался профиль Блазиуса) в отрывном пограничном слое сильно влияет на распределение донного давления каверны.

Модель Бюргграфа (рис. 3). В отличие от модели Чепмена, Бюргграф [39], основываясь на результатах Бэтчелора, разбил всю область течения на внешний невозмущенный поток вдали от зоны смещения, внешний пограничный слой во внешнем потоке над каверной, внутренний пограничный слой и невязкое ядро непосредственно в каверне, а также предположил, что отрывная линия тока, соединяющая угловые точки каверны со стороны отсутствующей крышки, является прямой и скорость вдоль нее не уменьшается до нуля в точке присоединения. Сравнение решений согласно модели Бюргграфа с экспериментом показало ее применимость для больших чисел Рейнольдса, когда вязкие эффекты проявляются только в тонких пограничных слоях.

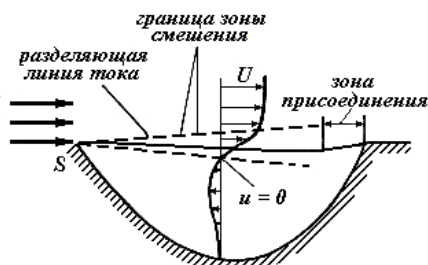


Рис. 2

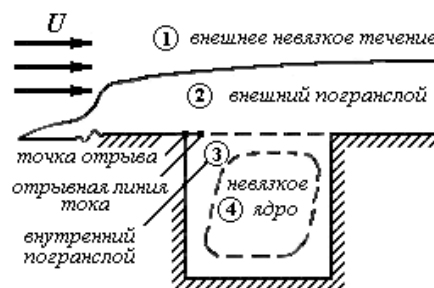


Рис. 3

Модель Корста (рис. 4). Корст [45] предполагает, что длина зоны смещения равна длине открытой части каверны. Кроме этого, в модели учитывается профиль скорости набегающего потока и делается допущение об эквивалентности пограничного слоя на стенках и дне каверны пограничному слою на плоской пластине, причем скорость на внешней границе пограничного слоя полагается постоянной.

Модель Сквайра (рис. 5). Основываясь на идее Бэтчелора, Сквайр [56] разделил весь объем жидкости в каверне на ядро и пограничный слой вокруг

него. В результате решения задачи по данной схеме Сквайром было получено, что максимум скорости внутри каверны может достигать ~30% от скорости внешнего потока.

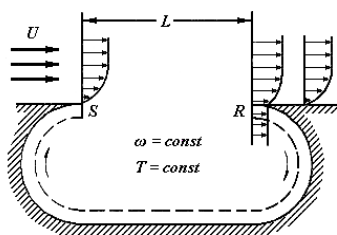


Рис. 4



Рис. 5

Авторы работы [9] исследуют процессы перемешивания в прямоугольной каверне (циркуляция при малых числах Рейнольдса). Как правило, при изучении процесса перемешивания ставятся две задачи: определение полей скоростей, а также решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y, t), & \frac{dy}{dt} &= v(x, y, t), \\ x &= x_0; & y &= y_0; & t &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

которые позволяют правильно описать процесс хаотического перемешивания выделенного объема жидкости. В работе построено строго аналитическое решение первой задачи перемешивания. Решение проводится в переменных «завихренность – функция тока», используя приближение Стокса (инерционные силы  $\rho_0 \partial \bar{u} / \partial t + \bar{u} \nabla \bar{u}$  пренебрежимо малы по сравнению с силами давления  $\nabla p$  и вязкости  $\mu \nabla^2 \bar{u}$ ). Приведены линии тока течения в квадратной каверне при равномерном движении верхней крышки  $V_e = U = const$ . Найдены координаты точки («вихревого центра»), в которой скорость равна нулю:  $x_C = L/2$ ,  $y_C = 0.531(L - \text{ширина каверны})$ , что согласуется с данными других авторов. Отмечено, что наличие замкнутых линий тока свидетельствует о существовании вихревой зоны, которая охватывает всю каверну. Найдена также бесконечная последовательность вихрей вблизи нижних углов каверны, отделенных друг от друга нулевыми линиями тока.

Рассмотренные модели не отражают реальной структуры течения в каверне в силу ряда факторов: решение определяется на основе линеаризованных уравнений; используется асимптотическое приближение при  $Re \rightarrow \infty$ , но при этом течение полагается ламинарным; геометрия центрального вихря в моделях выбирается чаще всего круглой, что существенно отличается от реализуемой в экспериментах; не учитываются вторичные вихри в углах. Поэтому более достоверные результаты позволяют получить экспериментальные и численные методы.

**2. Численные методы. Каверна с крышкой.** Результаты численного решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне под действием движения верхней крышки или внешнего течения получены в [1, 3 – 5, 7 – 9, 12 – 13, 16, 18, 24 – 25, 28 – 30, 34, 37 – 39, 41 – 42, 44, 46 – 51, 53, 55, 57 – 58, 60] методами конечных разностей, конечных элементов, при помощи чис-

ленно-аналитического подхода и др. в диапазоне чисел Рейнольдса до  $Re = 50\,000$ .

**Метод конечных разностей (МКР)** представляет наиболее многочисленную группу исследований задач течения несжимаемой жидкости в силу его универсальности и хорошо разработанной теории.

Первые численные расчеты были выполнены Кавагути [44]. Для аппроксимации производных он применял центральные разности, получаемые затем разностные уравнения он решал итерационным методом. При малых числах Рейнольдса метод оставался устойчивым (Кавагути удалось получить решение до  $Re = 64$ ).

В работах [48, 51 – 52] исследовалась структура течения в каверне в приближении Стокса. Миллс [46] ( $Re = 100$ ), а также авторы работы [41] ( $Re = 100$  и  $Re = 1000$ ) применили итерационный подход для решения задачи в естественных переменных «скорость – давление». В [38] Бюргграф повысил устойчивость численного алгоритма, осуществляя последовательную нижнюю релаксацию ( $Re = 400$ ). Авторами работ [8, 29, 37, 42, 49, 55] была использована односторонняя разностная схема «против потока» для первых производных и решения получены с помощью равномерных и неравномерных сеток для  $Re \geq 400$ , что позволило уточнить структуру потока в каверне.

Появление неустойчивости численного решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса ( $\geq 10^3$ ) объясняется преобразованием их в уравнения с малым параметром ( $1/Re$ ) при диффузионном члене. Использование в этом случае аппроксимации по методу конечных разностей приводит к появлению схемной вязкости, что может существенно исказить решение задачи. Как установлено в [37], схемы первого порядка аппроксимации типа «против потока» позволяют смоделировать течение, сеточное число Рейнольдса которого оказывается гораздо меньше его физического аналога. Вторым фактором, оказывающим воздействие на появление схемной вязкости, оказывается использование грубой расчетной сетки, в частности сетки с равномерным распределением узлов в областях с большими градиентами искомых параметров.

В работе [41] разрабатывается метод решения уравнений Навье–Стокса в естественных переменных «скорость – давление» с целью возможного его усовершенствования для течений при высоких числах Рейнольдса в областях со сложной геометрией. Для моделирования эллиптической природы обтекания принималось, что давление  $P$  определяется из уравнения Пуассона

$$P_{xx} + P_{yy} = S_p - \frac{\partial}{\partial t} [U_x + V_y], \quad (2)$$

где индексы  $x$ ,  $y$ ,  $xx$ ,  $yy$  у компонент скоростей и давления обозначают операцию дифференцирования, а слагаемое  $S_p$  имеет вид

$$S_p = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -(UU_x + VU_y) + \frac{1}{Re} (U_{xx} + U_{yy}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -(UV_x + VV_y) + \frac{1}{Re} (V_{xx} + V_{yy}) \right]$$

и определяется в результате применения операции дивергенции к вектору количества движения. В итоге полученное уравнение Пуассона заменяет уравнение неразрывности.

При интегрировании уравнений движения использовался двухшаговый неявный метод переменных направлений, а для уравнения Пуассона – метод последовательной верхней релаксации. Аппроксимация пространственных производных проводилась центральными разностями, имеющими второй порядок точности, поэтому решение не испытывало влияния искусственной вязкости, возникающей в численных схемах первого порядка в случае расчета разностями вверх по потоку. Для обеспечения сходимости использовался следующий критерий:

$$\sqrt{1 - F_{ij}^n / F_{ij}^{n+1}} \leq \varepsilon, \quad (3)$$

где в качестве  $F$  может выступать любая из зависимых переменных  $U$ ,  $V$  или  $P$ . Точность расчета достигала следующих значений: для уравнений движения  $\varepsilon_{U,V} = 10^{-5}$ , для уравнения Пуассона  $\varepsilon_P = 10^{-10}$ .

В [41] отмечено, что существенным требованием для сходимости численного метода является сохранение в уравнении Пуассона (2) производной по времени от локального расширения потока  $\frac{\partial}{\partial t} [U_x + V_y]$ , а любая попытка приравнять этот член к нулю приводила к неустойчивости численного решения.

В работе представлены результаты течения в каверне на равномерных ( $15 \times 15$ ,  $29 \times 29$ ,  $57 \times 57$ ) при  $Re = 100$  и неравномерной ( $29 \times 29$ ,  $Re = 400, 1000$ ) сетках. Последняя была получена с помощью аналитических преобразований

$$\xi = a \operatorname{tg} \left( \frac{x - b}{c} \right) + b, \quad \eta = a \operatorname{tg} \left( \frac{y - b}{c} \right) + b, \quad (4)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – константы преобразования, определяемые из геометрических условий.

Необходимо отметить, что результаты работы по определению давления представляют собой первые решения задачи Неймана при использовании преобразований координат. Представленные графически функции (профили скоростей  $U$ ,  $V$  в сечении по центру вихря, горизонтального и вертикального профилей коэффициента давления в том же сечении при расчетных значениях числа Рейнольдса  $Re = 100, 400, 1000$ , а также изобары статического и полного давления при  $Re = 400$  и  $1000$ ) позволяют выбрать подходящее распределение точек расчетной сетки и могут быть использованы для различных вариантов внутренних течений.

Для расчета течения при больших числах Рейнольдса в [8, 29] была применена модель турбулентности Колмогорова–Прандтля, в [30] – модифицированная гипотеза пути смешения Прандтля, в [50] –  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности, где устойчивое решение было получено при  $Re = 3 \cdot 10^3$ . В [49] удалось продолжить расчет до  $Re = 10\,000$ .

Повышение скорости сходимости итерационных алгоритмов особенно актуально для случаев больших чисел Рейнольдса, когда учет вязких эффек-

тов является определяющим для правильного описания глобального поведения течений. В связи с ограничением на оперативную память ЭВМ, а также в целях экономии времени счета, использование равномерных расчетных сеток в данном случае представляется неэффективным. Использование сеток, сгущающихся в областях пограничных слоев, требуют повышения точности схемы.

Авторы работ [3 – 4] попытались уменьшить искусственную вязкость путем использования схем повышенного порядка аппроксимации в сочетании с неравномерными сетками. Исходная система нестационарных уравнений Навье–Стокса записывалась в переменных «завихренность – функция тока» в новой системе координат, которая обеспечивала сгущение сеточных линий. Связь физических координат  $(x, y)$  с новыми координатами  $(\xi, \eta)$  имела вид:

$$z = D \left\{ \zeta - \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi\zeta) \right\}, \quad 0 \leq \zeta < 0.5;$$

$$z = D \left\{ \zeta + \frac{b}{2\pi} \sin[2\pi(\zeta - 0.5)] \right\}, \quad 0.5 \leq \zeta \leq 1;$$
(5)

здесь

$$\begin{cases} \zeta \equiv \xi, & D = 1, & \text{для } z \equiv x; \\ \zeta \equiv \eta D = \frac{H}{L}, & & \text{для } z \equiv y; \end{cases}$$

$H, L$  – глубина и ширина каверны соответственно.

Дискретный аналог уравнения переноса вихря строился посредством явной трехслойной схемы Адамса–Бэшфорда второго порядка аппроксимации. Конвективные члены аппроксимировались схемами Аракавы второго и четвертого порядков, остальные производные представлялись центральными разностями.

Расчеты производились пошаговым интегрированием по времени уравнения переноса вихря при числах Рейнольдса  $Re = 400; 1000; 2500$ , таким образом, удалось получить устойчивое решение при достаточно высоких числах Рейнольдса.

Анализ точности решений проведен в [1, 55], где на различных расчетных сетках исследованы: центрально-разностная схема, односторонние разности «против потока» первого и второго порядка точности, экспоненциальная схема.

В [26] использование противопоточных конечных разностей третьего порядка для аппроксимации конвективных членов уравнений Навье–Стокса позволило повысить точность решения и расширить диапазон расчетных чисел Рейнольдса ( $Re \leq 20\,000$ ). В работе исследованы характеристики вязкого течения внутри и в окрестности двумерных открытых каверн в зависимости от толщины вытеснения пограничного слоя перед каверной, числа Рейнольдса, а также соотношения длины и глубины каверны.

Исаевым [13] проведено численное исследование по определению влияния вязкости на интегральные аэродинамические характеристики течения в прямоугольной выемке ( $A = H/L = 0.5 \div 2$ , где  $H, L$  – глубина и ширина выемки соответственно), вызванного движением верхней границы при  $Re = 100 \div 2500$ . Анализ движения несжимаемой жидкости ограничивался рассмотрением плоских ламинарных течений на основе численного решения

уравнений Навье–Стокса в переменных  $\omega$ – $\psi$ . Автором предлагается интегральный критерий оценки качества численных расчетов циркуляционного движения жидкости (максимальная величина функции тока  $\psi_{\max}$ ). Так же, как в работах [3 – 4], для записи уравнения переноса вихря в конечноразностной форме на неравномерной сетке была использована схема Адамса–Бэшфорта второго порядка аппроксимации. Полученное разностное уравнение связи  $\omega$  и  $\psi$  решалось на каждом временном шаге итерационным методом Гаусса–Зейделя с использованием техники верхней релаксации. На основе установившихся полей завихренности рассчитывалось распределение давления по стенкам выемки:

– на передней боковой поверхности выемки ( $P_1(A) = 0, 0 \leq y \leq A$ ):

$$P_1(y) = \frac{2}{\text{Re}_A} \int_0^y \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=0} dy; \quad (6)$$

– на дне выемки ( $P_2(0) = P_1(0), 0 \leq x \leq 1$ ):

$$P_2(x) = P_2(0) - \frac{2}{\text{Re}_0} \int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} dx; \quad (7)$$

– на задней боковой поверхности выемки ( $P_3(0) = P_2(1), 0 \leq y \leq A$ ):

$$P_3(y) = P_3(0) + \frac{2}{\text{Re}_0} \int_0^y \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=0} dy. \quad (8)$$

Коэффициент сопротивления давления  $C_p$  и коэффициент сопротивления трения  $C_f$  выемки рассчитывались по формулам

$$C_p = \frac{N_p}{0.5\rho US} = \int_0^A [P_3(y) - P_1(y)] dy, \quad (9)$$

$$C_f = \frac{N_f}{0.5\rho US} = -\frac{2}{\text{Re}_0} \int_0^1 \omega(x,0) dx, \quad (10)$$

где  $N_p$  – суммарная по площади сила сопротивления давления,  $S$  – площадь дна выемки,  $N_f$  – суммарная по площади сила трения.

Общий коэффициент сопротивления имел вид  $C_x = C_p + C_f$ .

Решение задачи прекращалось, когда изменение во времени параметров, определяющих течение (главным образом, завихренности) становилось достаточно малым, то есть в случае реализации установившегося режима течения.

Исаевым представлены результаты расчетов величины  $\psi_{\max}$ , аэродинамических коэффициентов давления  $C_p$  и трения  $C_f$  для квадратной выемки от числа Рейнольдса, а также зависимость коэффициента суммарного аэродинамического сопротивления  $C_x$  выемки от отношения  $A$  при  $\text{Re} = 1000$ . Выполнено сравнение полученных расчетных данных с результатами других



авторов, а также представлен результат, соответствующий асимптотическому приближению для течения в выемке при  $Re \rightarrow \infty$ .

Численному и экспериментальному изучению турбулентного течения при обтекании выемки с относительной длиной от 1 до 3 в твердой стенке плоского канала посвящена также работа [14]. При численном исследовании применялись двухпараметрические модели турбулентности  $k-\epsilon$  и  $k-\omega$ , гипотеза Буссинеска о линейной зависимости компонент тензора напряжений Рейнольдса от тензора скоростей деформаций осредненного движения и «универсальный закон стенки» в пристенных областях, где турбулентная вязкость жидкости близка к молекулярной.

В [5] дан краткий обзор работ, посвященных исследованию течения в каверне с движущейся крышкой. Авторами делается акцент на качественном различии течения в пристеночной зоне больших градиентов и в ядре – зоне умеренных градиентов, образующихся уже при  $Re = 400$ . Проводится сравнение различных конечно-разностных схем относительно точности и устойчивости получаемого решения. В приведенной таблице даны выражения для коэффициентов  $C$  уравнения

$$C_P \omega_P = C_N \omega_N + C_S \omega_S + C_E \omega_E + C_W \omega_W + R_P, \quad (11)$$

описывающего все рассматриваемые разностные схемы, а также максимальные числа Рейнольдса, при которых решение с помощью итерационного метода Гаусса–Зейделя остается устойчивым.

Делается вывод [5], что «для задачи течения в каверне при больших числах Рейнольдса ( $\sim 10^3$ ) наиболее экономичной является центрально-разностная схема второго порядка точности. Неэкономичной из всех схем второго порядка точности является односторонняя (против потока) схема, оставаясь, однако, устойчивой даже при числах Рейнольдса  $Re = 5000$ , тогда как пределом устойчивости для центрально-разностной схемы является число Рейнольдса  $Re = 1000$ ». По мнению авторов, под экономичностью разностных схем следует понимать затраты машинного времени при заданной точности расчета.

Влияние схемных эффектов, возникающих в уравнениях Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, показано в работе [24]. Течение в квадратной каверне с подвижной верхней стенкой рассчитывалось при  $Re = 300, 1000$  на равномерных разностных сетках  $20 \times 17, 39 \times 33$ . Приведены изолинии функции тока, соответствующие четырем рассмотренным случаям, а также профили горизонтальной и вертикальной составляющих скорости в различных вертикальных сечениях выемки при  $Re = 1000$ . Получено, что при малых числах Рейнольдса ( $Re = 300$ ) интенсивность циркуляционного течения, определяемая по плотности расположения линий тока, наибольшая в верхней части области, где жидкость вовлекается в движение движущейся крышкой за счет сил трения. В связи с увлечением жидкости крышкой движение несимметрично: центр вихря, в котором значение функции тока максимально, смещен по направлению движения, т. е. в сторону верхнего правого угла. В правом нижнем углу заметно вторичное движение в виде небольшого вихря.

Существенно иная картина реализовывалась при  $Re = 1000$ . На прежней грубой сетке происходит дробление основного вихря, вызванное схемными эффектами, в результате чего наблюдается образование вторичного движения, интенсивность которого более чем на порядок ниже основного. На более мел-

кой сетке картина линий тока отличается. Различие состоит в отсутствии дробления основного вихря, в большем его смещении вправо и вверх, а также в увеличении интенсивности вторичного движения в правом нижнем углу.

Баден и Паккет [35] для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в ограниченных двумерных областях при больших числах Рейнольдса предлагают «быстрый» алгоритм, основанный на гибридном методе ввода вихревой пелены с одновременным разбиением области интегрирования на две зоны: зону пограничного слоя и зону, далекую от границы. В работе показано, что затраты машинного времени для достижения устойчивого стационарного решения при этом оказались пропорциональными числу используемых вихрей.

Интерес представляет работа [10]. Предлагается новый способ построения разностных схем для решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса. В случае течения вязкой несжимаемой жидкости способ подразумевает представление основных уравнений в дивергентной форме:

$$\nabla_i(u^i) = \nabla_i \tau [\nabla_j(u^i u^j) + \nabla^i p], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial u^i / \partial t + \nabla_j(u^i u^j + p^{ij}) = \nabla_j \tau \nabla_k(u^i u^j u^k) + \\ + \nabla_j \tau \nabla^i(p u^j) + \nabla^i \tau \nabla_k(p u^k) + \nabla_j \tau \nabla^j(p u^i), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tau$  – некоторое характерное время,  $\tau_i = h_i / |u_i|$  (в случае несжимаемой жидкости),  $h_i$ ,  $u_i$  – соответственно протяженность разностной ячейки и компонента скорости в  $i$ -м направлении;  $p^{ij}$  – тензор вязких напряжений.

Как известно, из уравнения неразрывности  $\partial \rho / \partial t + \text{div} \rho \bar{u} = 0$  и условия  $\rho = \text{const}$  непосредственно следует уравнение  $\text{div} \bar{u} = 0$ . При этом (12) становится эквивалентным следующему уравнению:  $\text{div} \tau (\text{div} \bar{u} + \text{grad} p) = 0$ . В случае  $\tau = \text{const}$  последнее уравнение переходит в уравнение Пуассона для давления. В уравнении (13) авторы ограничиваются лишь первым слагаемым в правой части. Тогда система уравнений Навье–Стокса принимает вид:

$$\text{div} \bar{u} = 0, \quad (14)$$

$$\partial \bar{u} / \partial t + \text{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \text{grad} p = \nu \Delta \bar{u} + \text{div} \tau \text{div}(\bar{u} \otimes \bar{u} \otimes \bar{u}). \quad (15)$$

Для построения дискретной модели полученной системы применялась центрально-разностная аппроксимация с использованием разнесенной сетки: функция  $u$  определялась в узлах  $(x_i, y_{k+1/2})$ ,  $v$  – в узлах  $(x_{i+1/2}, y_k)$ , давление  $p$  – в серединах ячеек  $(x_{i+1/2}, y_{k+1/2})$ . Полученные разностные уравнения решались методом «предиктор-корректор».

Расчеты течения в каверне проводились в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 100 \div 3200$  на сетках  $21 \times 21$  и  $41 \times 41$ . Была выделена обширная центральная область циркуляционного движения. При исследовании коэффициента трения  $C_f$  обнаружены зоны возвратного течения в нижних углах каверны («вторичные угловые вихри»), которые имеют более низкую интенсивность циркуляции по сравнению с центральным вихрем. Начиная с  $Re \approx 1500$ , замечено возникновение еще одного вторичного вихря около ле-

вой части подвижной стенки, а также подтвержден факт увеличения циркуляционного движения с увеличением числа Рейнольдса.

В отличие от большинства работ по исследованию течения в каверне при больших числах  $Re$ , в которых на одной из ее стенок («крышке») задается постоянная продольная скорость, авторы работы [43] на крышке каверны задают постоянное напряжение трения. В ходе численного эксперимента получено, что неустойчивость расчета по такой модели наступает на порядок позднее ( $Re \approx 10^4$ ), чем неустойчивость стандартного течения в каверне, индуцированного движением крышки.

Уже отмечалось, что учет эффектов вязкости в зонах больших градиентов предполагает использование более мелкой разностной сетки, чем в прочих областях, причем шаг сетки в этой зоне необходимо уменьшать пропорционально росту толщины зоны больших градиентов  $\delta$  при увеличении числа Рейнольдса. В этой связи становится необходимым использование численных схем, обеспечивающих аппроксимацию на существенно неравномерных сетках, что само по себе является проблемой, так как не все разностные схемы обладают таким свойством. В подобных случаях не является выходом и переход к новым независимым переменным, так как поставленные условия сохраняются для коэффициентов преобразованных уравнений. Как один из способов решения указанной проблемы предлагается [15] сплайновая схема, которая обеспечивает достаточно высокий порядок аппроксимации (четвертый порядок аппроксимации на равномерных сетках, третий – в противном случае, для первой производной от функции по координате; второй порядок аппроксимации для вторых производных).

Согласно указанной методике было рассчитано течение в квадратной каверне на неравномерной сетке  $27 \times 27$  при  $Re = 100, 400$ . Для сравнения были также рассчитаны варианты с использованием равномерных сеток  $21 \times 21$  и  $29 \times 29$ . Полученные результаты показали, что для использованных разностных схем уже при  $Re = 400$  равномерные сетки позволяют достигать достаточно высокой точности лишь при  $N \geq 40 \times 40$ . Профиль скорости  $u = u(y)$  на прямой  $x = 0,5$ , полученный для неравномерного разбиения, практически не отличался от профиля, рассчитанного на существенно более мелкой равномерной сетке с  $N = 51 \times 51$ . Работоспособность неравномерной сетки подтвердили не только расчеты для  $Re = 400$ , но и дополнительные результаты, полученные при  $Re = 10^3$ .

Поиску разностных схем, сохраняющих повышенный порядок аппроксимации на неравномерных сетках, посвящена также работа [16]. Отмечено, что схемы такого типа можно разделить на два класса: методы, использующие алгоритмы сплайн-аппроксимации [15], что позволяет достигать как минимум третьего порядка на равномерных сетках, и методы, использующие компактные разности. Огромным преимуществом этих подходов является использование стандартного трехточечного разностного шаблона, в то время как обычные соотношения того же порядка требуют не менее четырех точек на разностной сетке.

Построение компактных аппроксимаций основывалось на неявной связи между значениями функции и ее производными

$$\sum_{k=-1}^1 [\alpha_k(h)f_{i+k} + \beta_k(h)r_{i+k} + \gamma_k(h)q_{i+k}] = 0, \quad (16)$$

$$h = (x_N - x_1)/N, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

где  $f_i$  – значения функции в точках разностного шаблона,  $r_i$  и  $q_i$  – значения, соответственно, первой и второй производных от данной функции,  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  – коэффициенты, значения которых зависят от требуемого порядка аппроксимации выражения (16),  $N$  – число узлов сетки,  $h$  – ее шаг.

Делался акцент на использовании однородных компактных разностей, в которых содержатся либо только первые, либо только вторые производные, ввиду возможности вычислений производных по значениям функций с помощью стандартных подходов типа скалярных прогонок. При расчетах использовались симметричные однородные компактные разности следующего вида

$$\begin{aligned} (f_{i+1} - f_{i-1})/2h &= (r_{i+1} + 4r_i + r_{i-1})/6, \\ (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/h^2 &= (q_{i+1} + 10q_i + q_{i-1})/12. \end{aligned} \quad (17)$$

Неявная разностная схема первого порядка аппроксимации по времени, соответствующая системе дифференциальных уравнений  $\partial U/\partial t + AU = 0$ , где  $U = (u_1, \dots, u_m)$  – вектор зависимых переменных,  $A$  – некоторый дифференциальный оператор, имела вид

$$\frac{\delta U^{n+1}}{\tau} + A_1^n \delta U^{n+1} = -A^n U^n, \quad \delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n. \quad (18)$$

Полученная система алгебраических уравнений решалась итерационным методом Гаусса–Зейделя.

В [15] для расчета течения использовалась система уравнений Навье–Стокса, записанная в переменных «завихренность – функция тока». Расчеты осуществлялись для двух типов сеток – равномерной и неравномерной. Число узлов по обоим типам сеток и по координатам  $X, Y$  было одинаковым. Неравномерная сетка строилась по закону геометрической прогрессии с постоянным и одинаковым для обоих направлений коэффициентом, одним и тем же для сеток с различным числом узлов:

$$\begin{aligned} h_{xi} &= qh_{x,i-1}, & h_{xi} &= x_i - x_{i-1}, & h_{xi} &= h_{x,N-i+1}, \\ h_{yj} &= qh_{y,j-1}, & h_{yj} &= y_j - y_{j-1}, & h_{yj} &= h_{y,N-j+1}, \end{aligned} \quad i, j = 2, 3, \dots, N/2, \quad (19)$$

где  $N$  – число расчетных узлов в одном направлении,  $q > 1$ .

Расчеты проводились на сетках с последовательно возрастающим числом узлов ( $20 \times 20$ ,  $30 \times 30$ ,  $40 \times 40$ ) при следующих числах Рейнольдса  $Re = 100, 1000 \div 4000$ . Минимальный размер ячейки выбирался обратно пропорционально корню квадратному из числа Рейнольдса. Кроме того, сетка строилась таким образом, чтобы в вязком слое присутствовало 20 – 25 ячеек сетки при общем количестве узлов по одному направлению 80. Такой алгоритм построения сетки позволял правильно отследить влияние вязких эффектов на течение в целом.

Исаевым [12] на основе решения конечно-объемным факторизованным методом нестационарных уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью

дифференциальных уравнений переноса сдвиговых напряжений, при  $Re = 50\,000$  рассчитывались: эволюция вихревой структуры в квадратной каверне с подвижной крышкой, а также нестационарный турбулентный теплообмен в воздушной среде при поддержании постоянных температур горячей подвижной и холодных неподвижных стенок.

**Численно-аналитический подход**, примененный к задаче о движении жидкости в каверне с подвижной крышкой, приведен в [34] и позволяет свести исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сопряженная задача гидродинамики и теплообмена при движении жидкости в мелкой, квадратной и глубокой кавернах с отношением высоты к ширине  $1/2; 1; 2$  решена в [59]. Числа Рейнольдса и Прандтля полагались постоянными и равными  $Re = 100$ ,  $Pr = 1$ ; число Грасгофа варьировалось  $Gr = 0, \pm 10^4, \pm 10^6$ . Проведено сравнение полученных полей скорости и температур с аналогичными данными других авторов.

В [2], где рассматривается гидродинамика и теплообмен в квадратной и прямоугольной каверне с полностью и частично подвижной крышкой, численно подтверждена гипотеза Бэтчелора [36] о разделе вихревого течения в замкнутой полости на потенциальное течение в ядре основного вихря и невязкое в пограничном слое на стенках каверны. Приведены кривые распределения трения и теплового потока к неподвижным стенкам каверны, представлены линии изотерм, показаны профили скорости и завихренности при  $Re \leq 1000$ . В работе указывается на постоянство значений завихренности в центральной части рассмотренных областей для  $Re \geq 500$ , что свидетельствует о невязком ядре в каверне и о справедливости гипотезы Бэтчелора для высоких чисел Рейнольдса.

**Метод конечных элементов (МКЭ)** в настоящее время является наиболее перспективным направлением развития численного моделирования в механике сплошных сред.

В работах [18, 25] задача о течении в каверне рассматривалась в качестве тестовой и решалась методом конечных элементов. Полежаевым и Федосеевым [25] для приведения исходной дифференциальной задачи к алгебраической в качестве формулировки МКЭ использовался метод Галеркина. Получаемая система линейных алгебраических уравнений решалась методом исключения Гаусса. Для проведения расчетов генерировалась равномерная конечно-элементная сетка (сетка Куранта), содержащая  $15 \times 15$  узлов, 98 треугольных элементов; система алгебраических уравнений имела 564 неизвестных. Отмечена важная качественная особенность аппроксимационной схемы МКЭ, проявившейся в данной задаче, содержащей разрывы скорости в угловых точках каверны. Она заключается в отсутствии преждевременного парадоксального разбиения поля течения на вторичные вихри, отмечавшиеся в ряде работ МКР [24], при увеличении числа Рейнольдса от 400 до 1000. Приведены результаты расчета течения: картины линий тока и профиль горизонтальной составляющей скорости в сечении  $x = 0,5$  при  $Re = 10, 100, 400$ . Показаны также нестационарные картины линий тока при переходе от  $Re = 400$  к  $Re = 1000$ .

При таких же числах Рейнольдса ( $Re = 10, 100, 400$ ) выполнен расчет течения в квадратной каверне и в работе [18]. Построение равномерной конечно-элементной сетки ( $21 \times 21$ ; 441 узел; 800 элементов) осуществлялось по-

средством триангуляции расчетной области. Локально-одномерная экспоненциальная аппроксимация искомой функции на элементах строилась в виде линейной комбинации решений модельного уравнения переноса. Приведены графики горизонтальной составляющей вектора скорости в центральном сечении, картины линий тока для каждого из режимов течения, а также распределение изолиний компонент вектора скорости и изобары для  $Re = 400$ .

В [57] с помощью метода конечных элементов удалось получить устойчивое решение при  $Re = 10\,000$ .

Идея метода расщепления многомерных задач на примере двумерной задачи течения в каверне применена в [53]. На каждом временном шаге с применением метода конечных элементов вычисляется вспомогательное поле скоростей без учета давления, в дальнейшем с помощью аналога уравнения неразрывности определяется поле давления, после чего корректируются найденные поля скоростей.

**3. Численные методы. Открытая каверна.** В работах [27 – 28, 32] осуществлены первые попытки численно смоделировать вихревое течение в открытой каверне. Задача решалась методом конечных разностей для трех видов каверн: мелкой, квадратной и глубокой с отношениями глубины каверны к ее ширине  $H/L = 0,5; 1,0; 2,0$  соответственно. Диаметр канала над каверной  $AB = HG$ , а также длина входного  $BC$  и выходного  $FG$  участков во всех случаях равнялись единице (рис. 6). Режимы течения соответствовали числам Рейнольдса  $Re = 0; 100; 500$ .

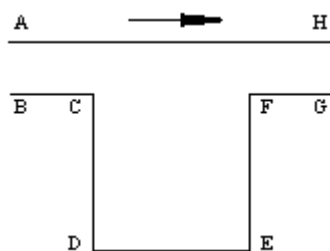


Рис. 6

Для квадратной каверны при  $Re = 0$  (без учета инерционных членов) во все моменты времени наблюдалась симметричная картина течения относительно линии симметрии каверны. В начальные моменты времени линии тока не замкнуты и существовал обмен жидкости всего объема каверны с внешним потоком. С увеличением времени в пристеночной области каверны появлялась область возвратного течения, которая и захватывала постепенно всю каверну. Движение в начальные моменты при  $Re = 100$  повторяло движение при  $Re = 0$ , однако зарождение обратных токов происходило, в первую очередь, у левой стенки. Развитие течения происходило несимметрично, и ядро вторичного потока смещено вправо. При  $Re = 500$  общая картина течения оставалась без изменений, в установившемся течении заметны вторичные вихри в углах каверны.

В глубокой каверне при  $Re = 100$  в начальные моменты времени происходило движение всей жидкости в одну сторону, как для квадратной каверны. Постепенно основной вихрь разделялся на две области возвратного течения, расположенные одна над другой по высоте каверны. При  $Re = 500$  область придонного течения больше, чем для  $Re = 100$ .

В мелкой каверне линия раздела циркуляционного течения в каверне от внешнего течения не являлась прямолинейной и имела выпуклость в сторону течения в канале. При  $Re = 100$  ядро вторичного течения сдвинуто в направлении движения подвижной плоскости. При  $Re = 500$  ядро вторичного течения смещено еще больше, а в противоположном углу обнаружено появление еще одной области замкнутого течения. Скорости течения у стенки CD малы, и движение близко к застойному.

В результате анализа полученных результатов замечены следующие особенности: вторичные течения возникают раньше для больших чисел Рейнольдса (по безразмерному времени); безразмерная скорость на линии CF при увеличении числа Рейнольдса уменьшается.

Спектральный метод как модификация МКЭ [31] был применен в [40], где было рассчитано до  $Re = 800$  плоское течение в мелкой каверне с наличием канала над ней. Соотношение высоты каверны к ее ширине выбиралось равным 1:2, высота канала над каверной, а также длина его входного и выходного участков полагались равными ширине каверны. В работе также представлены результаты расчета течения в плоском канале с двумя последовательно расположенными кавернами базовой геометрии. В обеих задачах исследовалась зависимость от времени пульсаций скорости в фиксированных точках каверны.

Метод конечных элементов применен в работах [19 – 22] для решения задачи о ламинарном и турбулентном течении (до  $Re = 10\,000$ ) вязкой несжимаемой жидкости в закрытой каверне с полностью и частично подвижной крышкой (рис. 1, а, б), в открытой каверне с учетом внешнего течения (рис. 1, в), а также в открытой и частично перекрытой каверне без дна над экраном (рис. 1, г). Для расчета турбулентного движения система осредненных уравнений Рейнольдса замыкалась уравнениями  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности с применением пристеночных функций вблизи неподвижных границ каверны.

При проведении двумерных расчетов ставилась задача по определению конфигурации частичного перекрытия каверны, минимизирующей ее аэродинамическое сопротивление. Варьировалась протяженность частичного перекрытия  $\bar{L} = L/B = 0,2; 0,5; 0,8; 1,0$  как отношение открытой части каверны к ее ширине при значениях скорости на бесконечности  $V_\infty = 60; 100; 140$  км/ч. Рассчитанные варианты перекрытий представлены на рис. 7.

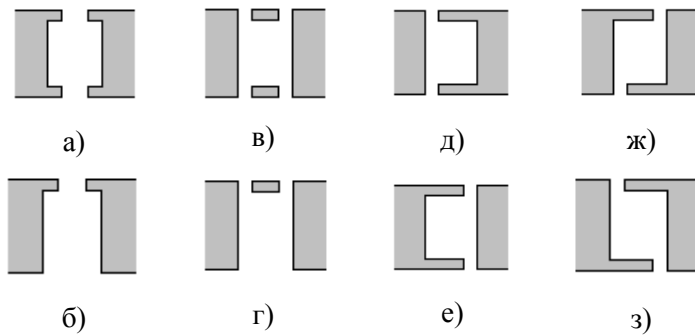


Рис. 7

Расчетами установлено, что с началом перекрытия каверны над экраном вплоть до значений параметра  $L/B \approx 0,8$  ее коэффициент аэродинамического сопротивления интенсивно снижается, и при полном перекрытии ( $L/B = 0$ ) уменьшается в 18...20 раз.

Получено также, что применение рассмотренных типов перекрытия каверны приводит к снижению коэффициента сопротивления в среднем в 1,5 раза для параметра  $L/B = 0,8$  и в 5 раз для  $L/B = 0,2$ . Причем, тип перекрытия «д» целесообразно применять с параметром  $L/B \leq 0,5$ , а тип перекрытия «з» – с  $L/B \geq 0,5$ .

**Выводы.** Проведенный анализ методов и результатов исследований задач внутреннего и внешнего течений несжимаемой жидкости в каверне позволил установить следующее.

1. Теоретические модели течения в каверне, допускающие аналитическое решение, основаны на ряде допущений, не отражающих реальной картины течения.

2. Численные методы являются наиболее универсальным методом решения задач динамики жидкости. Вычислительную неустойчивость алгоритма, связанную с расчетом течений при больших числах Рейнольдса, а также погрешность численных методик уменьшают применением неравномерных сеток со сгущением вблизи неподвижных стенок, а также использованием схем повышенного порядка точности.

1. Атиас М. Эффективность численных методов решения уравнений Навье–Стокса / М. Атиас, М. Вольфштейн, М. Израэли // Ракетн. техн. и космон. – 1977. – Т. 15, № 2. – С. 161 – 164.
2. Белов И. А. Движение и теплообмен в замкнутой области при наличии подвижных границ / И. А. Белов, И. П. Гинзбург, С. А. Исаев // Вестник Ленинградского ун-та. Сер. Механика. – 1976. – № 13. – С. 41 - 50.
3. Белов И. А. Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и высоких числах Рейнольдса / И. А. Белов, С. А. Исаев // Ж. прикл. мех. и техн. физики. – 1982. – № 1. – С. 41 – 45.
4. Белов И. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости / И. А. Белов, С. А. Исаев, В. А. Коробков. – Л. : Судостроение, 1989. – 256 с.
5. Беляев Н. М. Численные методы конвективного теплообмена : Учебное пособие / Н. М. Беляев, А. А. Приходько. – Днепропетровск : ДГУ, 1983. – 104 с.
6. Гольдиштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости / М. А. Гольдиштик // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 147, № 6. – С. 36 – 41.
7. Горин А. В. Обзор моделей расчета течения несжимаемой жидкости в квадратной каверне / А. В. Горин // Градиентные и отрывные течения. – Новосибирск, 1976. – С. 85 – 116.
8. Госмен А. Д. Численные методы исследования течений вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел, Д. Б. Сполдинг, М. Вольфштейн. – М. : Мир, 1972. – 324 с.
9. Гринченко В. Т. Двовимірні течія в'язкої рідини у прямокутній порожнині при малому числі Рейнольдса / В. Т. Гринченко, Т. Л. Ісаєва, В. В. Мелешко // Доповіді АН УкрРСПР. – 1991. – № 8. – С. 64 – 70.



10. Гуров Д. Б. Об одном способе построения алгоритма расчета течений вязкой несжимаемой жидкости / Д. Б. Гуров, Т. Г. Елизарова // Ж. выч. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 11. – С. 1719 – 1727.
11. Денисон А. К. Сжимаемый свободный струйный пограничный слой с ненулевой начальной толщиной / А. К. Денисон, В. В. Баум // Ракетная техника и космонавтика – 1963. – Т. 1, № 2. – С. 178 – 183.
12. Исаев С. А. Численный анализ вихревой динамики и нестационарного турбулентного теплообмена в квадратной каверне с подвижной крышкой / С. А. Исаев, П. А. Баранов, А. Г. Судаков, Н. А. Мордынский // Теплофизика и аэромеханика. – 2008. – Т. 15, № 3. – С. 10 – 25.
13. Исаев С. А. Численное исследование интегральных характеристик течения в прямоугольной выемке / С. А. Исаев // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – Т. 14, № 5. – С. 70 – 78.
14. Кабаков Я. И. Турбулентное течение в прямоугольной выемке в стенке плоского канала / Я. И. Кабаков, А. И. Майорова // ИФЖ. – 1984. – Т. 46, № 3. – С. 363 – 371.
15. Копченев В. И. К использованию существенно неравномерных сеток при численном решении уравнений Навье–Стокса / В. И. Копченев, А. Н. Крайко, М. П. Левин // Ж. выч. матем. и мат. физики. – 1982. – Т. 22, № 6. – С. 1457 – 1467.
16. Копченев В. И. Неявная итерационная схема для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости / В. И. Копченев, Д. А. Никифоров // Ж. выч. матем. и мат. физики. – 1994. – Т. 34, № 8–9. – С. 1335 – 1343.
17. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, М. А. Кибель, Н. В. Розе. – М. : Физматгиз, 1963. – Ч. 1. – 583 с.
18. Кочубей А. А. Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов / А. А. Кочубей, А. А. Рядно. – Днепропетровск : Изд-во ДГУ, 1991. – 228 с.
19. Кравец Е. В. Гидродинамика течения между прямоугольными призмами, расположенными тандемом над экраном : дисс. на соиск. канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Кравец Елена Владимировна. – Днепропетровск, 2009. – 229 с.
20. Кравец Е. В. Влияние типа обтекателя на аэродинамическое сопротивление межвагонного пространства скоростного поезда / Е. В. Кравец // Вісник Дніпропетровського університету, сер. «Механіка». – 2006. – Вып. 10. – Том 1, № 2/1. – С. 113 – 119.
21. Кравец Е. В. Математическое моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой среды в межвагонном пространстве с крышным обтекателем / Е. В. Кравец // Вісник Дніпропетровського університету, сер. «Механіка». – 2005. – Вып. 10. – Том 1, № 10/1. – С. 66 – 73.
22. Кравец Е. В. Сравнительный анализ течения в открытом и частично перекрытом межвагонном пространстве при движении скоростного поезда / Е. В. Кравец // Вісник Дніпропетровського університету, сер. «Механіка». – 2004. – Вып. 8. – Том 1, № 6. – С. 26 – 33.
23. Нейланд В. Я. К теории течений в стационарных срывных зонах / В. Я. Нейланд, В. В. Сычев // Ученые записки ЦАГИ. – 1970. – Т. 1, № 1 – С. 156 – 163.
24. Пасконов В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 288 с.
25. Полежаев В. И. Метод конечных элементов в задачах гидромеханики, тепло- и массообмена / В. И. Полежаев, А. И. Федосеев. – М., 1980. – 72 с. – Препринт/ АН СССР. Ин-т проблем механики; № 160.
26. Розумнюк Н. В. Мгновенные и осредненные характеристики вязкого потока около прямоугольной каверны / Н. В. Розумнюк // Прикладная гидромеханика. – 2007. – Т. 9, № 4. – С. 49 – 58.
27. Симуни Л. М. Конечно-разностное решение уравнений Навье–Стокса / Л. М. Симуни. – Сб. : Современные вопросы гидродинамики. – К. : Наук. думка, 1967. – С. 344 – 350.
28. Симуни Л. М. Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме / Л. М. Симуни // Ж. прикл. мех. и техн. физики. – 1965. – № 6. – С. 106 – 108.
29. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач вязкой жидкости / Л. М. Симуни // Инж. журн. – 1964. – Т. 4, Вып. 3. – С. 446 – 450.
30. Тзинь А. Расчет распределений скоростей и температур при турбулентном течении в пристеночной прямоугольной полости / А. Тзинь, П. Рафийнеяд, С. Себан // Прикладная механика. – 1972. – Т. 32, № 2. – С. 76 – 85.
31. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М. : Мир, 1988. – 352 с.
32. Цой П. И. Применение вычислительной математики к решению инженерных и кибернетических задач / П. И. Цой. – Тула : изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1975. – 148 с.
33. Чжен П. Отрывные течения. В 3 частях / П. Чжен. – М. : Мир, 1973. – Ч. 1. – 299 с. – Ч. 2. – 280 с. – Ч. 3. – 333 с.
34. Шмукин А. А. Градиентный численно-аналитический метод решения уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости / А. А. Шмукин, Р. А. Посудиевский // ИФЖ. – 1989. – Т. 56, № 5. – С. 730 – 734.
35. Baden S. B. A fast vortex code for computing 2-d flow in a box / S. B. Baden, E. G. Puckett // AIAA / ASME / SIAM / APS 1st Nat. Fluid Dyn. Congr. – Cincinnati, Ohio. – July, 25-28. – 1988 : Collect. Techn. Pap. – Pt. 1 – New York. – P. 185 – 192.
36. Batchelor G. K. On steady laminar flow with close streamlines at large Reynolds number / G. K. Batchelor // J. Fluid. Mech. – 1956. – V. 1. – Part 2. – P. 392 – 398.
37. Bozeman J. D. Numerical study of viscous flow in a cavity / J. D. Bozeman, C. Dalton // J. Comput. Phys. – 1973. – Vol. 12, № 3. – P. 125 – 131.

38. *Burggraf O. R.* Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows / *O. R. Burggraf* // *J. Fluid Mech.* – 1966. – V. 24, Pt. 1. – P. 143 – 147.
39. *Burggraf O. R.* Model of steady separated flow in rectangular cavities at high Reynolds number / *O. R. Burggraf* // *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst.*, June, 21 – 23, 1965, Los Angeles, Calif. – P. 190 – 229.
40. *Ghaddar N. K.* Numerical investigation of incompressible flow in grooved channels / *N. K. Ghaddar, K. Z. Korczak, B. B. Mikic, A. T. Patera* // *J. Fluid Mech.* – 1986. – V. 163. – P. 99 – 127.
41. *Ghia K. N.* Study of Incompressible Navier–Stokes Equations in Primitive Variables Using Implicit Numerical Technology / *K. N. Ghia, Jr. W. L. Hankey, J. K. Hodge* // *AIAA Paper*, 77-648. – 1977. – P. 156 – 167. Перевод : *Гхиа К.Н.* Решение уравнений Навье–Стокса с учетом несжимаемости в обычных переменных / *К. Н. Гхиа, В. Л. Хэнки, Дж. К. Ходж* // *Ракетная техн. и космонавтика.* – 1979. – Т. 17, № 3. – С. 89 – 92.
42. *Grand D.* Courants de recirculation dans une cavity. Lere partie: ecoulement isotherme / *D. Grand, A. Latrobe, Ph. Vernier.* – Rapport CEA-R-4448 (I). – Grenoble. – 1973. – P. 153 – 165.
43. *Huser A.* Calculation of wind driven cavity flow at high Reynolds numbers / *A. Huser, S. Biringen* // *AIAA Pap.* – 1990. – № 1531. – P. 1 – 11.
44. *Kawaguti M.* Numerical solution of the Navier–Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity / *M. Kawaguti* // *J. Phys. Soc. Jap.* – 1961. – V. 16, № 11. – P. 79 – 85.
45. *Korst H. H.* Dynamics and thermodynamics of flow with separation, single and multi-component flow processes / *H. H. Korst* // *A symposium-proceedings.* Ed. By R.L. Peskin, C.F. Chen. – New Brunswick, New Jersey. – 1965. – P. 75 – 81.
46. *Mills R. D.* Numerical solution of the viscous flow equations for a class of closed flows / *R. D. Mills* // *Journal of Royal Aeronautical Society.* – Dec. – 1965. – V. 69. – P. 714 – 718.
47. *Mills R. D.* On closed motion of a fluid in a square cavity / *R. D. Mills* // *J. Roy. Aero. Soc.* – 1965. – V. 69. – P. 116 – 121.
48. *O'Brien V.* Closed streamlines associated with channel flow over a cavity / *V. O'Brien* // *Phys. Fluids.* – 1972. – V. 15, № 12. – P. 35 – 42.
49. *Oka S. N.* Stacionarno dvodimenziono vrtložno strnjanje u oblastima za zatvorenim strujnicama / *S. N. Oka.* – Dokt. Disertacija, Masin. Fak. Unw. u Beogradu. – Beograd. – 1971. – 294 p.
50. *Orlandi P.* Numerical simulation of turbulent flows over a square cavity / *P. Orlandi, R. Piva* // *Proceedings of Gamm-conference on numerical method of fluid mechanics.* – Koln. – 1975. – P. 85 – 88.
51. *Pan F.* Steady flows in rectangular cavities / *F. Pan, A. Acrivos* // *J. of Fluid Mech.* – 1967. – Vol. 28, Part 4. – P. 643 – 655.
52. *Pierre R.* Simple  $C^0$  approximations for the computation of incompressible flows / *R. Pierre* // *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Ing.* – 1988. – V. 68. – P. 205 – 227.
53. *Ramaswamy B.* Finite element solution for advection and natural convection flows / *B. Ramaswamy* // *Comput. and Fluids.* – 1988. – V. 16, No. 4. – P. 349 – 388.
54. *Ratkowsky D. A.* Viscous flow in a rectangular cut-out / *D. A. Ratkowsky, Z. Rottem* // *Phys. Fluids.* – 1968. – V. 12, № 12. – P. 1822 – 1825.
55. *Runchal A. K.* Transfer process in steady two-dimensional separated flows / *A. K. Runchal* // *D. Ph. Thesis, Coll. Of Sci. And Techn.* – London. – Jan., 1969. – P. 77 – 78.
56. *Squire H. B.* Note on the motion inside a region of recirculation (cavity flow) / *H. B. Squire* // *J. Roy. Aero. Soc.* – 1956. – V. 60. – P. 203 – 205.
57. *Tabata M.* Two upwind-type finite element approximations for Navier-Stokes equations / *M. Tabata, S. Fujima, A. Morita* // *Дэнки цусин дайгаку кие.* – *Bull. Univ. Elec. – Commun.* – 1988. – V. 1, No. 1. – P. 129 – 136.
58. *Takematsu M.* Viscous flow in a two-dimension cavity / *M. Takematsu* // *J. Phys. Soc. Jap.* – 1965. – V. 20. – P. 283 – 285.
59. Cavity flows driven by buoyancy and shear / *K. Torrance, R. Davis, K. Eike, P. Gill, D. Gutman, A. Hsui, S. Lyons, H. Zien* // *J. Fluid Mech.* – 1972. – V. 51, Part 2. – P. 221 – 231.
60. *Weiss R. F.* Flow in a cavity at low Reynolds number / *R. F. Weiss, B. H. Florsheim* // *Phys. Fluids.* – 1965. – V. 8, № 9. – P. 1631 – 1635.