УДК 519.21+517.9

Академік НАН України **М. О. Перестюк, Ю. С. Мішура, О. Ю. Рагуліна**

Про ймовірність банкрутства в моделі ризику зі змінною інтенсивністю надходження премій

Розглянуто узагальнення класичної моделі ризику, коли інтенсивність надходження премій залежить від капіталу страхової компанії, який інвестується в ризиковий актив. Досліджено питання щодо ймовірності вибуху процесу ризику між моментами надходження вимог. Побудовано експоненціальну оцінку для ймовірності банкрутства в цій моделі.

Розглядається модель ризику, яка узагальнює класичну, коли інтенсивність надходження премій залежить від капіталу страхової компанії. При цьому припускається, що весь капітал компанії інвестується в ризиковий актив, ціна якого моделюється за допомогою геометричного броунівського руху. Відомо, що в класичній моделі ризику за певних умов для ймовірності банкрутства страхової компанії на нескінченному проміжку часу справедлива експоненціальна оцінка (див., наприклад, [1–3]). У статті [4] розглянута класична модель ризику за додаткової умови, що весь капітал компанії інвестується в ризиковий актив, і показано, що таке інвестування виявляється небезпечним: у цьому разі або банкрутство відбувається з імовірністю 1, або ймовірність банкрутства спадає зі степеневою швидкістю. Ці результати узагальнені в роботі [5] на випадок, коли інтенсивність надходження премій є обмеженою невід'ємною випадковою функцією.

Мета цієї роботи — показати, що при досить швидкому зростанні інтенсивності надходження премій зі збільшенням капіталу експоненціальна оцінка є справедливою за певних умов навіть при інвестуванні всього капіталу в ризиковий актив. Для цього ми, зокрема, детально досліджуємо питання щодо ймовірності вибуху процесу ризику між моментами надходження вимог.

1. Основні позначення й припущення моделі. Нехай усі об'єкти, що використовуються далі, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Припустимо, що страхова компанія має невід'ємний початковий капітал x, і позначимо через $X_t(x)$ її капітал у момент часу $t \geqslant 0$. Для спрощення позначень далі іноді будемо опускати залежність від x і писати X_t замість $X_t(x)$. Нехай $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ — вимірна функція така, що $c(u) = c(0)$ для всіх $u < 0$, а інтенсивність надходження премій $c(X_t)$ залежить від розміру капіталу компанії в момент часу t.

Розміри вимог, що надходять до компанії, утворюють послідовність $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин із середніми μ. Позначимо через τ_i момент надходження i-ї вимоги. Покладемо $\tau_0 = 0$.

Нехай $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — зсунена моментна функція випадкових величин Y_i така, що $h(0) = 0$, тобто $h(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rY_i}] - 1$. Щодо функції $h(r)$ робимо таке класичне припущення: існує $r_\infty \in (0, +\infty]$ таке, що $h(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, r_\infty)$ і $\lim\limits_{r\uparrow r_\infty} h(r) = +\infty$ (див. [2, с. 2]). Неважко перевірити, що функція $h(r)$ є зростаючою, опуклою вниз і неперервною на проміжку $[0, r_\infty)$.

Кількість вимог, що надійшли на проміжку часу $[0, t]$, моделюється пуассонівським процесом $(N_t)_{t \geqslant 0}$ зі сталою інтенсивністю $\lambda > 0$. Отже, сума всіх вимог, що надійшли на проміжку часу $[0, t]$, дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{N_t} Y_i$. Якщо $N_t = 0$, то покладаємо $\sum\limits_{i=1}^{0} Y_i = 0$.

Крім того, припускаємо, що весь свій капітал компанія інвестує в ризиковий актив, ціна якого в момент часу t дорівнює S_t. Процес $(S_t)_{t \geqslant 0}$ моделюємо за допомогою геометричного броунівського руху, тобто

$$dS_t = S_t(a dt + b dW_t), \tag{1}$$

де $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $(W_t)_{t \geqslant 0}$ — вінерівський процес. Припускаємо, що випадкові величини $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ та процеси $(N_t)_{t \geqslant 0}$ і $(W_t)_{t \geqslant 0}$ є незалежними.

Нехай $(\mathfrak{F}_t)_{t \geqslant 0}$ — фільтрація, породжена послідовністю $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ та процесами $(N_t)_{t \geqslant 0}$ і $(W_t)_{t \geqslant 0}$, тобто $\mathfrak{F}_t = \sigma((N_s)_{0 \leqslant s \leqslant t}, (W_s)_{0 \leqslant s \leqslant t}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_t})$.

За зроблених вище припущень процес $(X_t)_{t \geqslant 0}$ описується рівнянням

$$X_t = x + \int\limits_0^t c(X_s)\, ds + \int\limits_0^t \frac{X_s}{S_s}\, dS_s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \qquad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Підставивши (1) у рівняння (2), отримаємо

$$X_t = x + \int\limits_0^t c(X_s)\, ds + a \int\limits_0^t X_s\, ds + b \int\limits_0^t X_s\, dW_s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \qquad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Момент банкрутства страхової компанії визначається як $\tau(x) = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t(x) < 0\}$. Якщо $X_t(x) \geqslant 0$ для всіх $t \geqslant 0$, то вважаємо, що $\tau(x) = \infty$. Імовірність банкрутства на нескінченному проміжку часу визначається як $\psi(x) = \mathbb{P}\Big[\inf\limits_{t \geqslant 0} X_t(x) < 0\Big]$, що еквівалентно $\psi(x) = \mathbb{P}[\tau(x) < \infty]$.

2. Допоміжні результати. Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t = x + \int\limits_0^t p(X_s)\, ds + b \int\limits_0^t X_s\, dW_s, \qquad t \geqslant 0, \tag{4}$$

де $x > 0$, $b > 0$, $(W_t)_{t \geqslant 0}$ — вінерівський процес, функція $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ задовольняє локальну умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$, строго зростає на $\mathbb{R}_+$ і $p(u) = p(0)$ для всіх $u < 0$. Таким рівнянням описується еволюція капіталу між двома послідовними стрибками $(N_t)_{t \geqslant 0}$ до моменту першого виходу $(X_t)_{t \geqslant 0}$ з $[0, +\infty)$, якщо накласти відповідні умови на $c(u)$, покласти $p(u) = c(u) + au$ при $u \geqslant 0$, а замість x взяти значення капіталу в момент останнього стрибка $(N_t)_{t \geqslant 0}$. Наведемо результати, які свідчать, що за деяких умов $(X_t)_{t \geqslant 0}$ прямує до $+\infty$ з імовірністю 1 або з додатною ймовірністю, меншою 1.

Нехай t^* — момент можливого вибуху процесу $(X_t)_{t \geqslant 0}$, тобто $t^* = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \notin \notin (-\infty, +\infty)\}$. Крім того, позначимо через $t^*_{(0,+\infty)}$ момент першого виходу процесу $(X_t)_{t \geqslant 0}$ з інтервалу $(0, +\infty)$, тобто $t^*_{(0,+\infty)} = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \notin (0, +\infty)\}$. Внаслідок теореми 3.1 [6, с. 169] рівняння (4) має єдиний сильний розв'язок до моменту вибуху t^*. Зауважимо, що тут і далі ми маємо на увазі тільки потраєкторну єдиність.

Покладемо

$$I_1 = \int\limits_x^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{b^2}\int\limits_x^v \frac{p(u)}{u^2}du\right\} dv \qquad \text{і} \qquad I_2 = -\int\limits_0^x \exp\left\{\frac{2}{b^2}\int\limits_v^x \frac{p(u)}{u^2}\,du\right\}dv.$$

Лема 1. *Якщо*

$$\lim_{v\to+\infty}\left((1+\varepsilon)\ln v - \frac{2}{b^2}\int\limits_x^v \frac{p(u)}{u^2}du\right) < +\infty \qquad \textit{для деякого} \qquad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

то $I_1 < +\infty$.

Лема 2. *Якщо* $p(0) > 0$, *то* $I_2 = -\infty$.

Теорема 1. *Якщо* $p(0) > 0$ *і виконується умова* (5), *то* $\mathbb{P}\Big[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty\Big] = 1$.

Зауваження 1. Якщо $p(0) = 0$, то I_2 може бути скінченним. З огляду на теорему 3.1 [6, с. 351–352], якщо $I_1 < +\infty$ і $I_2 > -\infty$, то $\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t$ існує м. н., $0 < \mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] < 1$ і $\mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = 0] = 1 - \mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty]$.

Зауваження 2. У теоремі 1 відкритим залишається питання щодо скінченності моменту $t^*_{(0,+\infty)}$.

Приклад 1. Нехай

$$p(u) = \begin{cases} p_2u^2 + p_1u + p_0, & \text{якщо} \qquad u \geqslant 0, \\ p_0, & \text{якщо} \qquad u < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо $p_0 \geqslant 0$, $p_1 \geqslant 0$ і $p_2 > 0$, то функція $p(u)$ задовольняє наведені вище умови.

Для всіх $\varepsilon > 0$ маємо

$$\lim_{v\to+\infty}\left((1+\varepsilon)\ln v - \frac{2}{b^2}\int\limits_x^v \frac{p_2u^2 + p_1u + p_0}{u^2}\,du\right) \leqslant \lim_{v\to+\infty}\left((1+\varepsilon)\ln v - \frac{2p_2(v-x)}{b^2}\right) = \\ = -\infty.$$

Отже, $I_1 < +\infty$ внаслідок леми 1.

Якщо $p_0 > 0$, то за теоремою 1 отримуємо $\mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] = 1$.

У випадку, коли $p_0 = 0$, маємо

$$I_2 = -\int\limits_0^x \exp\left\{\frac{2}{b^2}\int\limits_v^x \frac{p_2u^2 + p_1u}{u^2}\,du\right\}dv = -\int\limits_0^x \left(\frac{x}{v}\right)^{2p_1/b^2} \exp\left\{\frac{2p_2(x-v)}{b^2}\right\}dv.$$

Звідси випливає, що $I_2 > -\infty$ при $2p_1 < b^2$ та $I_2 = -\infty$ при $2p_1 \geqslant b^2$. Отже, якщо $2p_1 < b^2$, то $\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t$ існує м. н., $0 < \mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] < 1$ і $\mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = 0] = 1 - \mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty]$; якщо $2p_1 \geqslant b^2$, то $\mathbb{P}[\lim\limits_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] = 1$.

Дослідимо тепер питання щодо ймовірності виходу процесу $(X_t)_{t\geqslant 0}$ на $+\infty$ за скінченний час в умовах прикладу 1.

Теорема 2. *Нехай процес* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *є сильним розв'язком рівняння* (4), *а функція* $p(u)$ *визначена рівністю* (6), *де* $p_0 \geqslant 0$, $p_1 \geqslant 0$ *і* $p_2 > 0$. *Тоді якщо* $p_0 = 0$ *і* $2p_1/b^2 < 1$, *то*

$$\mathbb{P}[t^*_{(0,+\infty)} < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] = \frac{\displaystyle\int_0^x v^{-2p_1/b^2} \exp\left\{-\frac{2p_2 v}{b^2}\right\} dv}{\displaystyle\int_0^{+\infty} v^{-2p_1/b^2} \exp\left\{-\frac{2p_2 v}{b^2}\right\} dv}; \tag{7}$$

якщо або $p_0 = 0$ *і* $2p_1/b^2 \geqslant 1$, *або* $p_0 > 0$, *то*

$$\mathbb{P}[t^*_{(0,+\infty)} < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] = 1. \tag{8}$$

Доведення. Покладемо $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}\colon 1/n < x\}$. Для всіх цілих n таких, що $n \geqslant n_0$, позначимо через $t^*_{(1/n,+\infty)}$ момент першого виходу процесу X_t з інтервалу $(1/n, +\infty)$, тобто $t^*_{(1/n,+\infty)} = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \notin (1/n, +\infty)\}$. Зауважимо, що послідовність подій

$$(\{\omega \in \Omega\colon t^*_{(1/n,+\infty)}(\omega) < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(1/n,+\infty)}} X_t(\omega) = +\infty\})_{n\geqslant n_0}$$

є монотонно неспадною, тому

$$\lim_{n\to\infty} \{\omega \in \Omega\colon t^*_{(1/n,+\infty)}(\omega) < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(1/n,+\infty)}} X_t(\omega) = +\infty\} =$$
$$= \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \{\omega \in \Omega\colon t^*_{(1/n,+\infty)}(\omega) < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(1/n,+\infty)}} X_t(\omega) = +\infty\}.$$

Крім того, маємо

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \{\omega \in \Omega\colon t^*_{(1/n,+\infty)}(\omega) < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(1/n,+\infty)}} X_t(\omega) = +\infty\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega\colon t^*_{(0,+\infty)}(\omega) < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t(\omega) = +\infty\}.$$

Отже, з огляду на неперервність імовірнісної міри отримаємо

$$\mathbb{P}\big[t^*_{(0,+\infty)} < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[t^*_{(1/n,+\infty)} < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(1/n,+\infty)}} X_t = +\infty\big]. \tag{9}$$

Беручи до уваги результати [7, с. 499–500] (див. також [8, с. 110–111; 9, с. 343–344]), для всіх $n \geqslant n_0$ маємо $\mathbb{E}[t^*_{(1/n,+\infty)}] = M_n(x)$, де функція $M_n(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$\frac{1}{2} b^2 x^2 M_n''(x) + (p_2 x^2 + p_1 x + p_0) M_n'(x) = -1, \qquad M_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad M_n(+\infty) = 0, \tag{10}$$

яка розв'язується відомими методами [10, 11]. Тут і далі під значенням функції в точці $+\infty$ ми розуміємо її границю при прямуванні значення аргументу до $+\infty$.

Єдиним розв'язком крайової задачі (10) є функція

$$M_n(x) = \frac{2m_n(x)}{b^2 m_n(+\infty)} \int\limits_{1/n}^{+\infty} \frac{m_n(+\infty) - m_n(z)}{z^2 m_n'(z)}\, dz - \frac{2}{b^2} \int\limits_{1/n}^{x} \frac{m_n(x) - m_n(z)}{z^2 m_n'(z)}\, dz,$$

де

$$m_n(x) = \int\limits_{1/n}^{x} \exp\biggl\{-\frac{2}{b^2} \int\limits_{1/n}^{v} \frac{p_2 u^2 + p_1 u + p_0}{u^2}\, du\biggr\} dv.$$

Зауважимо, що $m_n(+\infty) < +\infty$. Крім того,

$$\int\limits_{1/n}^{+\infty} \frac{m_n(+\infty) - m_n(z)}{z^2 m_n'(z)}\, dz < +\infty,$$

оскільки

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{m_n(+\infty) - m_n(z)}{m_n'(z)} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\displaystyle\int\limits_{z}^{+\infty} \exp\biggl\{-\frac{2}{b^2} \int\limits_{1/n}^{v} \frac{p_2 u^2 + p_1 u + p_0}{u^2}\, du\biggr\} dv}{\exp\biggl\{-\displaystyle\frac{2}{b^2} \int\limits_{1/n}^{z} \frac{p_2 u^2 + p_1 u + p_0}{u^2}\, du\biggr\}} = \frac{b^2}{2p_2} < +\infty$$

(тут ми використали правило Лопіталя) і $\displaystyle\int\limits_{1/n}^{+\infty} \frac{1}{z^2} dz < +\infty$.

Отже, $\mathbb{E}[t^*_{(1/n,+\infty)}] < \infty$ для всіх $n \geqslant n_0$. Звідси випливає, що $\mathbb{P}[t^*_{(1/n,+\infty)} < \infty] = 1$ для всіх $n \geqslant n_0$. Крім того, внаслідок [7, с. 499–500] маємо

$$\mathbb{P}\Bigl[\lim_{t\uparrow t^*_{(1/n,+\infty)}} X_t = +\infty\Bigr] = \frac{\displaystyle\int\limits_{1/n}^{x} v^{-2p_1/b^2} \exp\biggl\{\frac{2p_0}{b^2 v} - \frac{2p_2 v}{b^2}\biggr\} dv}{\displaystyle\int\limits_{1/n}^{+\infty} v^{-2p_1/b^2} \exp\biggl\{\frac{2p_0}{b^2 v} - \frac{2p_2 v}{b^2}\biggr\} dv}. \tag{11}$$

Отже, з (9) і (11) випливає, що

$$\mathbb{P}\Bigl[t^*_{(0,+\infty)} < \infty, \lim_{t\uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty\Bigr] = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int\limits_{1/n}^{x} v^{-2p_1/b^2} \exp\biggl\{\frac{2p_0}{b^2 v} - \frac{2p_2 v}{b^2}\biggr\} dv}{\displaystyle\int\limits_{1/n}^{+\infty} v^{-2p_1/b^2} \exp\biggl\{\frac{2p_0}{b^2 v} - \frac{2p_2 v}{b^2}\biggr\} dv}. \tag{12}$$

Розглянемо два випадки.

1. Якщо $p_0 = 0$ і $2p_1/b^2 < 1$, то обидва інтеграли в правій частині рівності (12) є збіжними при $n \to \infty$. Звідси отримаємо (7). Зауважимо, що в цьому разі $0 < \mathbb{P}[t^*_{(0,+\infty)} < \infty, \lim\limits_{t \uparrow t^*_{(0,+\infty)}} X_t = +\infty] < 1$.

2. Якщо або $p_0 = 0$ і $2p_1/b^2 \geqslant 1$, або $p_0 > 0$, то обидва інтеграли в правій частині рівності (12) є розбіжними при $n \to \infty$. Використовуючи правило Лопіталя, отримаємо (8).

Теорему доведено.

Зауважимо, що оскільки за припущенням функція $c(u)$ є додатною, то принаймні у випадку квадратичної інтенсивності надходження премій капітал компанії стає нескінченно великим за скінченний час з імовірністю 1 за відсутності надходження вимог. Оскільки проміжок часу між двома послідовними вимогами може бути скільки завгодно великим з додатною ймовірністю, то процес $(X_t(x))_{t\geqslant 0}$, який описується рівнянням (3) і моделює еволюцію капіталу компанії, прямує до $+\infty$ з додатною ймовірністю. Зрозуміло, що в цьому разі банкрутство не відбувається. Отже, саме тому далі розглядаємо процес ризику до мінімуму з моментів банкрутства і його можливого вибуху.

3. Основні результати. Позначимо через $t^*(x)$ момент можливого вибуху процесу $(X_t(x))_{t\geqslant 0}$, тобто $t^*(x) = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t(x) \notin (-\infty, +\infty)\}$.

Теорема 3. *Якщо функція $c(u)$ задовольняє локальну умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$, то рівняння* (3) *має єдиний сильний розв'язок до моменту $\tau(x) \wedge t^*(x)$.*

Зауваження 3. Якщо $t^*(x) < \infty$, то покладемо $X_{t^*(x)} = +\infty$ і рівність у (3) формально виконується й при $t = t^*(x)$: у цьому разі обидві її частини дорівнюють $+\infty$. Крім того, якщо $\tau(x) < \infty$, то покладаємо $X_{\tau(x)} = X_{\tau_{i-}} - Y_i$, де i — номер вимоги, що призвела до банкрутства. Тоді рівність у (3) також виконується при $t = \tau(x)$.

Визначимо зупинений процес $(\widetilde{X}_t(x))_{t\geqslant 0}$ рівністю $\widetilde{X}_t(x) = X_{t\wedge\tau(x)\wedge t^*(x)}(x)$. Зауважимо, що якщо процес $(X_t(x))_{0\leqslant t<\tau(x)\wedge t^*(x)}$ є розв'язком рівняння (3), то процес $(\widetilde{X}_t(x))_{t\geqslant 0}$ також є розв'язком цього рівняння.

Для всіх $r \geqslant 0$ введемо процес $(V_t(x,r))_{t\geqslant 0}$ таким чином: $V_t(x,r) = e^{-r\widetilde{X}_t(x)}$.

Теорема 4. *Нехай рівняння* (3) *має єдиний сильний розв'язок до моменту $\tau(x) \wedge t^*(x)$ та існує таке $\widehat{r} \in (0, r_\infty)$, що для всіх $u \geqslant 0$ виконується нерівність*

$$\frac{\widehat{r}^2 b^2}{2} u^2 - \widehat{r}(c(u) + au) + \lambda h(\widehat{r}) \leqslant 0.$$

Тоді процес $(V_t(x,r))_{t\geqslant 0}$ є $(\mathfrak{F}_t)$-супермартингалом.

Теорема 4 дає можливість отримати за певних умов експоненціальну оцінку для ймовірності банкрутства. Розглянемо випадок, коли інтенсивність надходження премій $c(u)$ є квадратичною функцією при $u \geqslant 0$, тобто

$$c(u) = \begin{cases} c_2u^2 + c_1u + c_0, & \text{якщо} \quad u \geqslant 0, \\ c_0, & \text{якщо} \quad u < 0, \end{cases} \tag{13}$$

де $c_2 \neq 0$. Ця функція є строго зростаючою та додатною на $[0, +\infty)$ тоді й тільки тоді, коли $c_0 > 0$, $c_1 \geqslant 0$ і $c_2 > 0$. В основі такої моделі лежить розуміння того, що з ростом капіталу компанії інтенсивність надходження премій швидко збільшується.

Теорема 5. *Нехай процес $(X_t(x))_{t\geqslant 0}$ описується рівнянням* (3) *за зроблених вище припущень, інтенсивність надходження премій $c(u)$ визначається рівністю* (13), *де $c_0 > 0$,*

$c_1 \geqslant 0$ *і* $c_2 > 0$. *Крім того, нехай* $a + c_1 > 0$ *та виконується принаймні одна з таких двох умов:*

1) $\dfrac{2c_2}{b^2} < r_\infty$ *і* $h\left(\dfrac{2c_2}{b^2}\right) \leqslant \dfrac{2c_0c_2}{b^2\lambda}$*;*

2) $\lambda\mu < c_0$.

Тоді для всіх $x \geqslant 0$ *справедлива оцінка*

$$\psi(x) \leqslant e^{-\widehat{r}x},$$

де $\widehat{r} = 2c_2/b^2$*, якщо виконується умова 1, і* $\widehat{r} = \min\{r_0, 2c_2/b^2\}$*, якщо виконується умова 2. Тут* r_0 *— єдиний додатний розв'язок рівняння*

$$h(r) = \frac{c_0 r}{\lambda}.$$

Отже, у випадку квадратичної інтенсивності надходження премій за певних умов справедлива експоненціальна оцінка для ймовірності банкрутства страхової компанії навіть при інвестуванні всього капіталу в ризиковий актив.

1. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Scientific, 2000. – 385 p.
2. *Grandell J.* Aspects of risk theory. – New York: Springer, 1991. – 175 p.
3. *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.* Stochastic processes for insurance and finance. – Chichester: Wiley, 1999. – 654 p.
4. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous // Finance and Stochastics. – 2002. – **6**, Is. 2. – P. 227–235.
5. *Pergamenshchikov S., Zeitouny O.* Ruin probability in the presence of risky investments // Stochast. Proc. and their Appl. – 2006. – **116**, Is. 2. – P. 267–278.
6. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – Москва: Наука, 1986. – 448 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
9. *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian motion and stochastic calculus. – New York: Springer, 1991. – 470 p.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1971. – 576 с.
11. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах. – Київ: Либідь, 2003. – 504 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 13.03.2014

Академик НАН Украины **Н. А. Перестюк, Ю. С. Мишура, Е. Ю. Рагулина**

О вероятности разорения в модели риска с переменной интенсивностью поступления премий

Рассмотрено обобщение классической модели риска, когда интенсивность поступления премий зависит от капитала страховой компании, который инвестируется в рисковый актив. Исследован вопрос о вероятности взрыва процесса риска между моментами поступлений требований. Построена экспоненциальная оценка для вероятности разорения в этой модели.

Academician of the NAS of Ukraine **M. O. Perestyuk, Yu. S. Mishura,**
O. Yu. Ragulina

On the ruin probability in a risk model with a variable premium intensity

A generalization of the classical risk model is considered, when the premium intensity depends on the surplus of an insurance company, which is invested in the risky asset. The question concerning the probability of explosion of the risk process between claim arrivals is investigated. An exponential bound for the ruin probability is obtained.