

Д. В. Затула, Ю. В. Козаченко

Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Досліджено ліпшицеву неперервність випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, знайдено оцінки розподілу норм таких процесів.

Нехай (\mathbb{T}, ρ) — деякий метричний простір. Будемо розглядати умови, за яких траєкторії випадкових процесів $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ задовольняють умову Ліпшиця. Зокрема, знайдемо функцію f — модуль неперервності, тобто таку, що

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leq 1,$$

та оцінимо ймовірності

$$P \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq v} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}$$

для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин, тобто банахових просторів з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де $\psi(u) > 0$ — деяка монотонно зростаюча функція. Такі простори були введені в роботі [1], а властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ досліджені в роботі [2].

Для гауссових процесів модулі неперервності f були знайдені в роботі [3]. Ці результати були узагальнені для деяких класів процесів з просторів Орліча в [4, 5], а також у [6, 7]. Досліджена ліпшицева неперервність для узагальнених субгауссових процесів та знайдені оцінки розподілу норм таких процесів у роботі [8].

1. Умова А простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 1 [2]. Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$, — деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \infty.$$

У роботі [1] (див. також [2]) було доведено, що $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Теорема 1 [2]. Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, то $\forall x > 0$ виконується така нерівність:

$$\mathbb{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}.$$

Теорема 2 [9]. Якщо випадкова величина ξ належить $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то для будь-якого $x > \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність

$$\mathbb{P}\{|\xi| > x\} \leq \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left(\frac{\ln(x/\|\xi\|_\psi)}{\beta+1}\right)^{(\beta+1)/\beta}\right\}.$$

Надалі будемо розглядати простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють нижченаведену умову.

Нехай ξ_1, \dots, ξ_n — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Позначимо $\eta = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|$, $a = \max_{1 \leq k \leq n} \|\xi_k\|_\psi$.

Умова А. Існують функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$, що $\forall x > x_0$ виконується така нерівність:

$$\mathbb{P}\{\eta > xaU(n)\} \leq \frac{1}{n} \exp\{-z(x)\}.$$

Наведемо приклади просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють умову А.

Теорема 3. Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тоді нижченаведена нерівність виконується для $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt[2]{2}(\ln 3 - 1)}\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}$, $c = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta+1)^{-(\beta+1)/\beta}$:

$$\mathbb{P}\left\{\eta > xa \exp\left\{(\ln(n+2))^{2\beta/(\beta+1)}\right\}\right\} \leq \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\right\}.$$

Теорема 4. Нехай $\psi(u) = \exp\{c(\ln u)^\alpha\}$, $\alpha > 1$, $c > 0$. Тоді нижченаведена нерівність виконується для $\forall x \geq \exp\left\{c\left(\ln \frac{2 \ln 3}{\ln 3 - 1}\right)^\alpha + 1\right\}$:

$$\mathbb{P}\{\eta > xa(\exp\{(\ln \ln(n+2))^\alpha\})^c\} \leq \frac{1}{n} \exp\left\{-\exp\left\{\left(\frac{1}{c} \ln \frac{x}{e}\right)^{1/\alpha}\right\}\right\}.$$

2. Модулі неперервності та умови Лїпшиця для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин.

Теорема 5. Нехай (\mathbb{T}, ρ) — деякий метричний компактний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з банахового простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, що задовольняє умову А з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0 > 0$. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ така, що $\sigma(0) = 0$ та виконується нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h).$$

Нехай $N(\varepsilon) = N_\rho(\mathbb{T}, \varepsilon)$ — метрична масивність простору (\mathbb{T}, ρ) . Також нехай

$$\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s)\right);$$

$$g_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t))) dt < \infty, \quad \varepsilon > 0,$$

де $B > 1$ — деяке число. Тоді для $x > x_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{(6 + 4\sqrt{2})f_B(\rho(t,s)) + (5 + 2\sqrt{6})g_B(\rho(t,s))} > x \right\} \leq \\ & \leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \exp\{-z(x)\}, \end{aligned}$$

де $f_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t))) dt$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 6. Нехай виконуються усі припущення теореми 5. Тоді з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(X; \varepsilon)}{(6 + 4\sqrt{2})f_B(\varepsilon) + (5 + 2\sqrt{6})g_B(\varepsilon)} \leq 1,$$

де

$$\Delta(X; \varepsilon) = \sup_{\substack{t,s \in \mathbb{T} \\ 0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon}} |X(t) - X(s)|,$$

$$f_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t))) dt, \quad g_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t))) dt < \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

З теореми 6 випливає такий наслідок:

Наслідок 1. Для досить малих v

$$\sup_{\rho(t,s) \leq v} |X(t) - X(s)| \leq (6 + 4\sqrt{2})f_B(v) + (5 + 2\sqrt{6})g_B(v)$$

з імовірністю 1.

3. Приклади.

Приклад 1. Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, та функція $\sigma(h) = dh^c$, $h, c, d > 0$.

Згідно з теоремою 3 та теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s))$, $B > 1$,

$$\forall N(\varepsilon) \geq 2 \text{ та } \forall x \geq \exp \left\{ \left(\frac{\ln 3}{b \sqrt[\beta]{2} (\ln 3 - 1)} \right)^{(2\beta)/(\beta+1)} \right\}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} (\beta + 1)^{-(\beta+1)/\beta}$$

виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{\gamma_B(\rho(t,s))} > x \right\} \leq \\ & \leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left(\frac{2}{\beta + 1} \right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)(2\beta)} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_B(\varepsilon) &= (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right) + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt + \\ &+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right) + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt. \end{aligned}$$

Більше того, відповідно до теореми 6 з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{\gamma_B(\varepsilon)} \leq 1.$$

Тепер розглянемо простір $\mathbb{T} = [0, T]$. Оскільки метрична масивність $N(u)$ — це найменша кількість елементів в u -покритті простору \mathbb{T} (у даному випадку відрізка $[0, T]$), то $T/(2u) \leq N(u) \leq T/(2u) + 1$. Або ж для функції $\sigma^{(-1)}(u)$

$$N\left(\sqrt[c]{\frac{u}{d}}\right) = N(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{T}{2\sqrt[c]{\frac{u}{d}}} + 1 = \frac{T}{2} \sqrt[c]{\frac{d}{u}} + 1.$$

Тому, згідно з теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, T/2\})$, $\beta \in (0, 1)$, $c > 1$, $B > 1$ та $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt{\beta}(\ln 3 - 1)}\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}$, $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta + 1)^{-(\beta+1)/\beta}$ виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{\gamma_{1,B}(\rho(t,s))} > x\right\} &\leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon(2B^2 + B)}{T(B^2 - 1)} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left(\frac{2}{\beta + 1}\right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{1,B}(\varepsilon) &= (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}} + 1\right) + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt + \\ &+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}} + 1\right)^2 + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt. \end{aligned}$$

Більше того, відповідно до теореми 6, з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{\gamma_{1,B}(\varepsilon)} \leq 1.$$

Приклад 2. Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, та функція $\sigma(h) = \frac{1}{\ln(1/h + 1)}$, $h > 0$.

Згідно з теоремою 3 та теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t, s))$, $B > 1$,

$\forall N(\varepsilon) \geq 2$ та $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt{\beta}(\ln 3 - 1)}\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}$, $c = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta + 1)^{-(\beta+1)/\beta}$ виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{\gamma_B(\rho(t, s))} > x\right\} &\leq \\ &\leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta + 1}\right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_B(\varepsilon) &= (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{(\ln(\frac{1}{\varepsilon}+1))^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right) + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt + \\ &+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{(\ln(\frac{1}{\varepsilon}+1))^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right) + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt. \end{aligned}$$

Більше того, відповідно до теореми 6, з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{\gamma_B(\varepsilon)} \leq 1.$$

Тепер розглянемо простір $\mathbb{T} = [0, T]$. Має місце нерівність для метричної масивності

$$N\left(\frac{1}{e^{1/u}-1}\right) = N(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{T(e^{1/u}-1)}{2} + 1.$$

Тому, згідно з теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, T/2\})$, $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt{\beta}(\ln 3 - 1)}\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}$,

$c = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta + 1)^{-(\beta+1)/\beta}$, $\beta \in (0, 1)$ та $B > 1$ виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{\gamma_{1,B}(\rho(t, s))} > x\right\} &\leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon(2B^2 + B)}{T(B^2 - 1)} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta + 1}\right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\right\}, \end{aligned}$$

де

$$\gamma_{1,B}(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{(\ln(\frac{1}{\varepsilon}+1))^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(\frac{BT(e^{1/t}-1)}{2} + B + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\} dt +$$

$$+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{(\ln(\frac{1}{\varepsilon}+1))^{-1}} \exp \left\{ \left(\ln \left(B^2 \left(\frac{T(e^{1/t} - 1)}{2} + 1 \right)^2 + 2 \right) \right)^{2\beta/(\beta+1)} \right\} dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 6, з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{\gamma_{1,B}(\varepsilon)} \leq 1.$$

Таким чином, отримано оцінку розподілу величини $\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))}$, де $f(\varepsilon) = \gamma_{1,B}(\varepsilon)$ — модуль неперервності, а також умову Ліпшиця для випадкових процесів з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$.

1. Ермаков С. В., Островский Е. И. Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей // Деп. в ВИНТИ № 3752-В.86.0. — 1986.
2. Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю. Простори Банаха випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та матем. статистика. — 2012. — № 86. — С. 92–107.
3. Dudley R. M. Sample functions of the Gaussian processes // Ann. Probab. — 1973. — 1, No 1. — P. 3–68.
4. Kozachenko Yu. V. Random processes in Orlicz spaces. I // Theory Probab. Math. Stat. — 1985. — No 30. — P. 103–117.
5. Kozachenko Yu. V. Random processes in Orlicz spaces. II // Ibid. — 1985. — No 31. — P. 51–58.
6. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. — Providence, RI: AMS, 2000. — 256 p.
7. Zatul D. V. Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Ser. Phys. & Math. — 2013. — No 2. — P. 23–28.
8. Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. Lipschitz conditions for $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments // Theor. Probab. and Math. Statist. — 2011. — No 82. — P. 57–73.
9. Млавець Ю. Ю. $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ — простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2012. — № 2. — С. 19–22.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 25.02.2014

Д. В. Затула, Ю. В. Козаченко

Условия Липшица для случайных процессов из банаховых пространств $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ случайных величин

Исследована липшицева непрерывность случайных процессов из банаховых пространств $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, найдены оценки распределения норм таких процессов.

D. V. Zatul, Yu. V. Kozachenko

Lipschitz conditions for random processes from Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables

We study the Lipschitz continuity of random processes from Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ and obtain the estimates for a distribution of the norms of such processes.