

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С КАВИТИРУЮЩЕЙ ТРУБКОЙ ВЕНТУРИ НА НЕСТРУКТУРНОЙ РАСЧЕТНОЙ СЕТКЕ

В работе предложена методика численного моделирования нестационарного осесимметричного течения в гидравлической системе с кавитирующей трубкой Вентури. Уравнения математической модели течения включают полные уравнения Навье – Стокса, учет кавитации осуществляется на основе использования баротропного уравнения состояния парожидкостной смеси. Расчеты проводятся на неструктурной расчетной сетке с треугольными элементами. Приведен пример применения указанной методики для расчета кавитационных автоколебаний в гидравлической системе “кавитирующая трубка Вентури – выходной трубопровод”, генерируемых оседлой каверной в трубке Вентури. Результаты расчета сопоставлены с имеющимися теоретическими результатами и экспериментальными данными

У роботі запропоновано методику чисельного моделювання нестационарної осесиметричної течії в гідравлічній системі з кавітуючою трубкою Вентурі. Рівняння математичної моделі течії включають повні рівняння Нав'є–Стокса, урахування кавітації здійснюється на основі використання баротропного рівняння стану парорідинної суміші. Розрахунки проводяться на неструктурній розрахунковій сітці з трикутними елементами. Наведено приклад застосування указаної методики для розрахунку кавітаційних автоколебань у гідравлічній системі “кавітуюча трубка Вентурі – вихідний трубопровід”, що генеруються осілою каверною в трубці Вентурі. Результати розрахунку зіставлені з наявними теоретичними результатами й експериментальними даними

The technique of a numerical simulation of unsteady axisymmetrical flow in a hydraulic system with the cavitating Venturi tube is proposed. Mathematical model equations include the Navier-Stokes equations, and the cavitation is considered from a barotropic equation of the vapor-liquid mixture state. Calculations are carried out using an unstructured grid with triangular elements. The example of this technique for the calculation of cavitation self-excited oscillations in the hydraulic system of the cavitating Venturi tube and outlet pipe generated by the sheet cavity in the Venturi tube is presented. Calculated results are compared with the available theoretical results and the experimental data.

Трубка Вентури, включающая сужающуюся часть (конфузор), узкую горловину и расширяющуюся часть (диффузор), применяется в различных устройствах для измерения и стабилизации расхода жидкости, в установках, работа которых основана на использовании принципиально новых технологий диспергирования суспензий и эмульгирования трудносмешиваемых жидкостей. Вместе с тем, трубка Вентури является классическим устройством для изучения явления кавитации и влияния на него различных факторов.

Сложность картины течения в кавитирующей трубке Вентури обусловлена наличием границ раздела пара и жидкости, областей возвратно-циркуляционного течения, проявлением нестационарного характера потока в широком диапазоне изменения параметров, определяющих режим течения [1]. Наиболее полный учет указанных особенностей течения может быть осуществлен только на основе численного интегрирования полных уравнений Навье – Стокса и использования апробированной модели кавитации. В настоящее время применяются два основных подхода к учету кавитации при численном моделировании кавитационных течений. Согласно первому из них, учет кавитации осуществляется на основе использования баротропного уравнения состояния парожидкостной смеси [2 – 4]. При использовании второго подхода в месте предполагаемого образования каверны в жидкость искусственно вводятся многочисленные пузырьки, заполненные паром, которые сносятся вниз по потоку и размеры которых изменяются в соответствии с уравнением Рэлея [5]. Более простым и эффективным представляется первый подход, так как он позволяет вычислять параметры кавитационного течения в

процессе сквозного счета во всей расчетной области без применения каких-либо дополнительных соотношений.

При численном моделировании кавитационного течения в трубке Вентури в работах [3, 4] использовались координатные расчетные сетки. Применение таких сеток затруднено тем обстоятельством, что граница расчетной области имеет значительные изломы, особенно в месте расположения конфузора трубки Вентури. В связи с этим при расчете кавитационного течения в трубке Вентури более предпочтительным представляется использование неструктурных расчетных сеток. При разработке соответствующей методики численного моделирования на неструктурных сетках может быть применен подход, изложенный в [6].

Целью данной работы является разработка методики и проведение численного моделирования нестационарного течения в гидравлической системе с кавитирующей трубкой Вентури на неструктурной расчетной сетке.

Рассматривается нестационарное турбулентное течение жидкости в гидравлической системе “кавитирующая трубка Вентури – выходной трубопровод” при постоянных значениях полного давления на входе в систему и статического давления на выходе из нее. Течение считается осесимметричным, коэффициент турбулентной вязкости  $\mu$  полагается постоянным во всей расчетной области.

Для описания течения используется система полных уравнений Навье – Стокса сжимаемой жидкости [7, 8], представленных в интегральной форме.

$$\iint_S \frac{r}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} dS + \oint_L \rho r v_n dL = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \iint_S r \frac{\partial \rho v_z}{\partial t} dS + \oint_L \rho r v_n v_z dL = & - \oint_L p r n_z dL + \mu \oint_L \text{grad}(v_z) \cdot \vec{n} r dL + \\ & + \frac{\mu}{3} \oint_L \text{div}(\vec{v}) r n_z dL, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \iint_S r \frac{\partial \rho v_r}{\partial t} dS + \oint_L \rho r v_n v_r dL = & - \oint_L p r n_r dL + \iint_S p dS + \\ & + \mu \oint_L \text{grad}(v_r) \cdot \vec{n} r dL - \mu \iint_S \frac{v_r}{r} dS + \frac{\mu}{3} \oint_L \text{div}(\vec{v}) r n_r dL - \frac{\mu}{3} \iint_S \text{div}(\vec{v}) dS, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r, z$  – цилиндрические координаты;  $S$  – площадь, ограниченная замкнутым контуром  $L$  в плоскости  $rz$ ;  $\rho$  – плотность жидкости;  $p$  – давление;  $a$  – скорость звука в жидкости;  $v_r, v_z$  – радиальная и осевая составляющие вектора скорости жидкости  $\vec{v}$  (окружная составляющая скорости  $\vec{v}$  полагается равной нулю);  $n_r, n_z$  – компоненты вектора внешней нормали  $\vec{n}$  к элементу контура  $dL$ ;  $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ .

Моделирование кавитации осуществляется на основе баротропного уравнения состояния парожидкостной смеси. На рис. 1 показан вид функции  $\rho(p)$ , которая зависит от четырех параметров:  $\rho_{ж}$  – плотности жидкости;  $\rho_n$  – плотности пара; диапазона давлений  $(p_1, p_2)$ , в котором существует

смесь пара и жидкости. Введение диапазона  $(p_1, p_2)$  необходимо для обеспечения устойчивости численного метода решения дискретных аналогов уравнений движения и неразрывности рассматриваемой среды. В указанном диапазоне

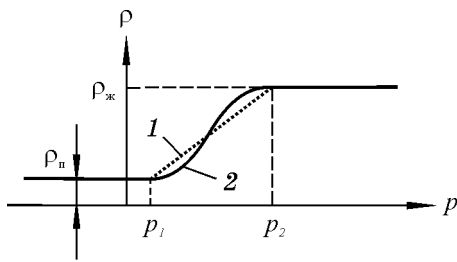


Рис. 1

скорость звука в парожидкостной смеси определяется по соотношению  $a = 1/\sqrt{d\rho/dp}$ . При  $p \geq p_2$  скорость звука в среде полагается равной скорости звука в жидкости, а при  $p \leq p_2$  – скорости звука в паре.

В работах [2, 4] функция  $\rho(p)$  в диапазоне  $(p_1, p_2)$  была принята линейной (позиция 1 на рис. 1). При

этом скорость звука в среде изменялась скачком при исчезновении или появлении паровой фазы, что являлось достаточно грубым упрощением. В связи с этим в данной работе, как и в работе [3], используется “сглаженная” зависимость  $\rho(p)$ . В настоящей работе предложено описывать эту зависимость в диапазоне  $(p_1, p_2)$  синусоидой (позиция 2 на рис.1). Такой вид функции  $\rho(p)$  позволяет качественно и отчасти количественно согласовать зависимость скорости звука в парожидкостной смеси от плотности смеси с имеющимися теоретическими моделями и экспериментальными данными.

Граничные условия задачи формулируются следующим образом. В сечении, расположенном на входе в горловину трубки Вентури, фиксируется полное давление. Величина скорости жидкости во входном сечении определяется с использованием разности полного и статического давления в данном сечении. Граничные условия на твердых поверхностях ставятся с использованием метода пристеночных функций, изложенного в работе [9], где приведены соотношения для вязкого подслоя, буферного слоя и логарифмического слоя. Эти соотношения применяются для расчета силы трения на твердых поверхностях. В сечении, расположенном на выходе из трубопровода, задается постоянная величина статического давления.

Численное интегрирование уравнений (1) – (3) выполняется с использованием неструктурной расчетной сетки с треугольными элементами, которая может быть построена на основе методики [10]. Принято, что значения давления хранятся в узлах сетки, а компоненты скорости жидкости  $v_r$  и  $v_z$  – в центрах тяжести треугольников. Положение точек, в которых хранятся компоненты скорости и давление, соответствует “шахматной сетке” [11].

Дискретные аналоги исходных уравнений (1) – (3) получены на основе метода контрольного объема [11]. Под контрольным объемом в случае осесимметричного течения жидкости подразумевается фигура, образованная поворотом некоторого выделенного (замкнутого) контура, расположенного в плоскости  $rz$ , вокруг оси на угол, равный 1 радиану. Форма указанного контура – треугольник при расчете компонентов скорости жидкости и более сложная фигура при расчете давления [6].

Дискретный аналог уравнения неразрывности (1) имеет вид:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{a^2}{S_p r_p} \sum_{i=1}^N f_i \rho_i - \varepsilon a \sum_{i=1}^N \rho_i \left[ \left( \frac{dv_{ri}}{dt} \right) n_{ri} + \left( \frac{dv_{zi}}{dt} \right) n_{zi} \right], \quad (4)$$

где  $N$  – число отрезков прямых, образующих выделенный контур;  $S_p$  – площадь, ограниченная контуром;  $r_p$  – радиус центра тяжести фигуры, образованной контуром;  $f_i = (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i) l_i r_i$ ;  $l_i$  – длина отрезка; индексом  $i$  обозначены значения величин на  $i$ -м отрезке.

Дополнительный член в правой части выражения (4), где  $\varepsilon$  может задаваться в диапазоне от 0,1 до 1, введен для подавления нефизических осцилляций давления, возникающих при расчете течения жидкости [6].

Дискретные аналоги уравнений движения (2), (3) получены с учетом противопоточной аппроксимации конвективных членов и представлены в виде:

$$\rho_{\Delta} \frac{d\Phi}{dt} r_{\Delta} S_v = - \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} (-F_i + |F_i|) \Phi - \frac{1}{2} (-F_i + |F_i|) \Phi_{nbi} \right] + b, \quad (5)$$

где  $\Phi$  – значения величин  $v_r$  или  $v_z$  в центре тяжести выделенного контура (треугольника);  $S_v$  – площадь треугольника;  $\Phi_{nbi}$  – значение  $\Phi$  в  $i$ -м соседнем треугольнике;  $F_i = \rho_i (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i) l_i r_i$ ;  $l_i$  – длина стороны треугольника;

$$b = - \sum_{i=1}^3 p_i n_{zi} l_i r_i + \mu \sum_{i=1}^3 l_i r_i [\text{grad}(v_z) \cdot \vec{n}]_i + \frac{\mu}{3} \sum_{i=1}^3 [\text{div}(\vec{v})]_i n_{zi} l_i r_i \quad \text{при расчете } v_z;$$

$$b = - \sum_{i=1}^3 p_i n_{ri} l_i r_i + \mu \sum_{i=1}^3 l_i r_i [\text{grad}(v_r) \cdot \vec{n}]_i + \frac{\mu}{3} \sum_{i=1}^3 [\text{div}(\vec{v})]_i n_{ri} l_i r_i +$$

$$+ S_v \left[ p - \mu \frac{v_r}{r} - \frac{\mu}{3} \text{div}(\vec{v}) \right]_{\Delta} \quad \text{при расчете } v_r; \text{ индексом } i \text{ обозначены значения величин на } i\text{-й стороне треугольника, индексом } \Delta \text{ – в центре тяжести треугольника.}$$

Система уравнений (4) и (5) – дискретных аналогов исходных уравнений неразрывности и движения жидкости (1) – (3) – представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно составляющих скорости и давления во всех точках, где они рассчитываются. Для интегрирования этой системы по времени используется метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности.

На основе предлагаемой методики выполнено численное моделирование нестационарного течения жидкости в гидравлической системе “кавитирующая трубка Вентури – выходной трубопровод”. Значения геометрических параметров трубки Вентури, в соответствии с [1], были следующими: угол раскрытия диффузора  $\beta = 10^{\circ}20'$ ; диаметр критического сечения – 0,014 м; отношение диаметра на выходе из диффузора к диаметру критического сечения трубки Вентури – 4. Длина выходного трубопровода принята равной 0,2 м. Расчеты выполнены при постоянном значении полного давления на входе в расчетную область, равном 1 МПа, и статическом давлении на выходе из трубопровода 0,3 МПа. При указанных значениях геометрических и режимных параметров в гидравлической системе с кавитирующей трубкой Вентури, согласно данным работы [1], возникают кавитационные автоколебания.

При проведении расчетов были приняты следующие значения параметров уравнения состояния парожидкостной смеси  $\rho(p)$  (рис. 1):  $p_1 = 0$  МПа;  $p_2 = 0,1$  МПа;  $\rho_n = 0,01 \rho_{ж}$ . Коэффициент турбулентной вязкости  $\mu$ , как и в работе [4], полагался равным  $100 \mu_l$ , где  $\mu_l$  – коэффициент молекулярной вязкости. Расчеты выполнены на неструктурной расчетной сетке, содержа-

щей 2620 узлов и 4714 треугольных элементов. Фрагмент расчетной сетки в диффузоре трубки Вентури показан на рис. 2.

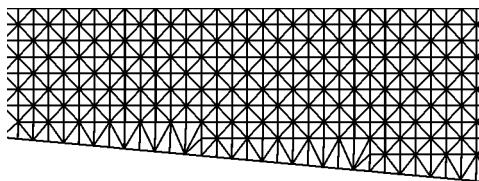


Рис. 2

Численное моделирование нестационарного течения в исследуемой гидравлической системе проводилось путем интегрирования по времени с шагом  $2 \cdot 10^{-8}$  с. Порядок расчета был следующим. Сначала рассчитывались параметры потока в предположении отсутствия кавитации, которые служили

начальными условиями при последующем расчете с учетом кавитации.

В процессе интегрирования по времени давление на входе в диффузор трубки Вентури установилось на уровне 0,1 МПа, соответствующем заданному значению параметра  $p_2$  в уравнении состояния парожидкостной смеси  $\rho(p)$  (рис. 1). Исходя из этого принято, что при сопоставлении результатов численного моделирования по предлагаемой методике с имеющимися теоретическими и экспериментальными результатами “давление в каверне” следует полагать равным  $p_2$ .



Рис. 3

На рис. 3 показаны изолинии плотности парожидкостной смеси в расчетной области (жидкость движется слева направо). В процессе интегрирования по времени положение изолиний плотности изменялось незначительно. Существенной особенностью расчетной картины течения является образование скачка значений плотности парожидкостной смеси в диффузорной части трубки Вентури, что может быть отождествлено с картиной течения в конце кавитационного образования. Положение скачка плотности достаточно точно соответствует месту замыкания кавитационной каверны на поверхности проточной части диффузора, определенному по теоретической зависимости работы [1].

Расчетная зависимость изменения расхода  $G(t)$  на выходе из трубопровода от времени приведена на рис. 4,а. Амплитудный спектр зависимости  $G(t)$  представлен на рис.4,б. Видно, что в функции  $G(t)$  выделяются две периодические компоненты, соответствующие частотам колебаний  $f_1$  и  $f_2$ . На рис. 5,а показано изменение во времени давления  $p(t)$  на стенке трубопровода (вблизи выхода из диффузора), а на рис. 5,б – амплитудный спектр функции  $p(t)$ . В функции  $p(t)$  также присутствует периодическая компонента, соответствующая частоте  $f_1$ , а периодическая компонента, соответствующая частоте  $f_2$ , выражена слабо.

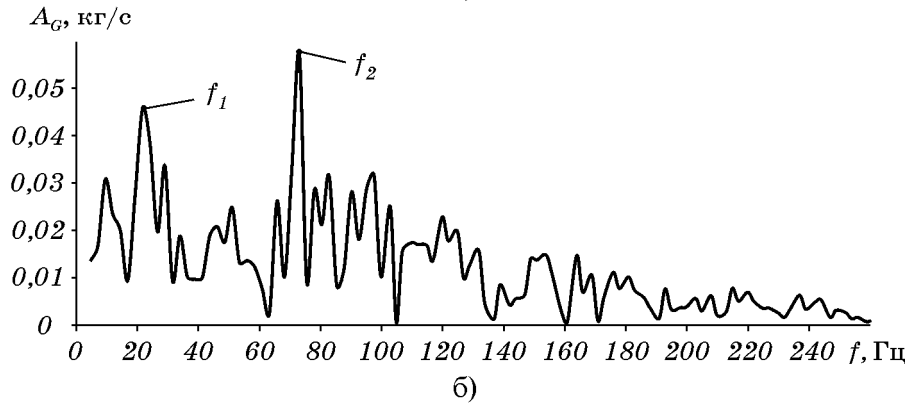
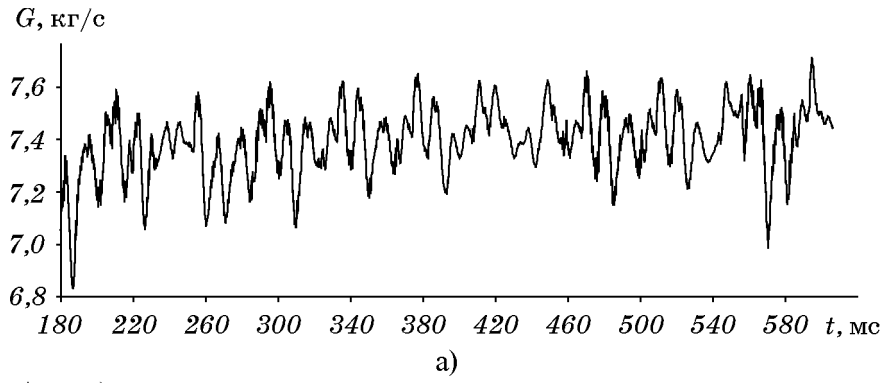


Рис. 4

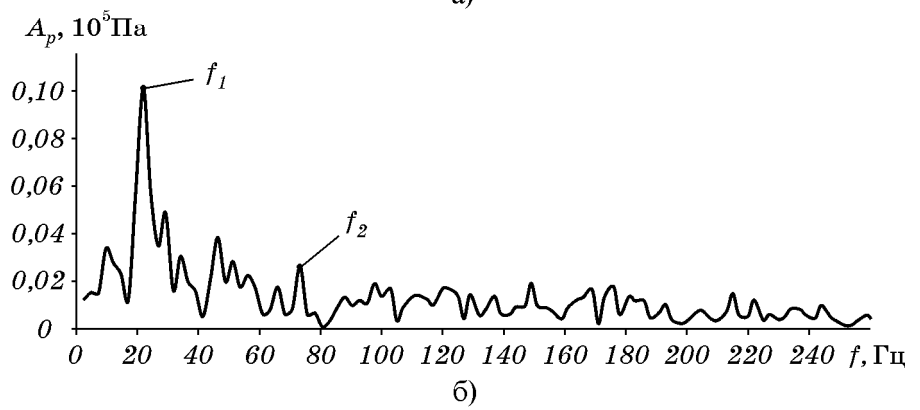
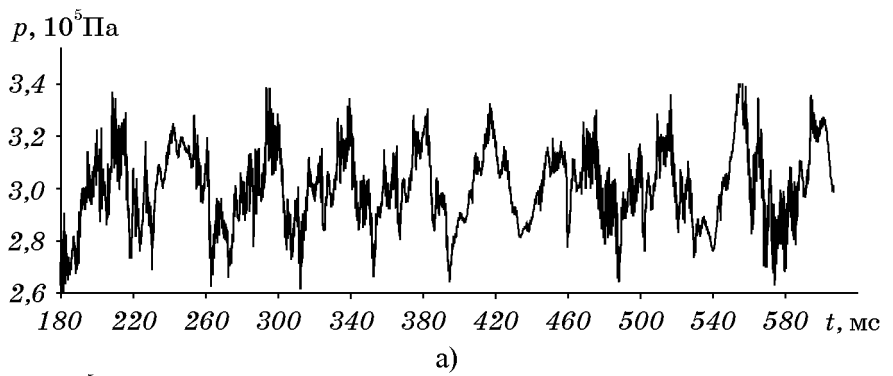


Рис. 5

Определенное в результате численного моделирования значение  $f_1 = 22,1$  Гц согласуется с экспериментальным значением частоты кавитационных автоколебаний  $f_{1\text{эксп}} \approx 22,6$  Гц, генерируемых оседлой кавитационной каверной в трубке Вентури при указанных выше геометрических и режимных параметрах рассматриваемой гидравлической системы [1]. При сопоставлении расчетной и экспериментальной частоты автоколебаний учтено отличие величин инерционного сопротивления выходного трубопровода в расчете и в эксперименте. Для выяснения причин возникновения колебаний с частотой  $f_2$  необходимы дальнейшие исследования. В связи с этим интересно отметить, что значение  $f_2 = 73,3$  Гц сопоставимо с теоретическим значением 64,2 Гц, определенным путем формального использования соотношения работы [1], предназначенного для расчета частоты кавитационных колебаний на режиме периодически-срывной кавитации в трубке Вентури с углом раскрытия диффузора  $>15^\circ$ .

#### **Выводы.**

1. На основе полных уравнений Навье – Стокса и баротропного уравнения состояния парожидкостной смеси разработана методика численного моделирования нестационарного осесимметричного течения в гидравлической системе с кавитирующей трубкой Вентури на неструктурных расчетных сетках.

2. На основе указанной методики расчетным путем воспроизведен режим кавитационных автоколебаний в гидравлической системе “кавитирующая трубка Вентури – выходной трубопровод”. Получено качественное и количественное согласование параметров кавитационных автоколебаний с имеющимися теоретическими результатами и экспериментальными данными.

3. В дальнейшем предполагается применение разработанной методики для численного моделирования кавитационных колебаний, генерируемых периодически-срывной кавитацией в трубке Вентури, и возможное использование полученных результатов для разработки кавитационно-импульсных установок различного назначения.

1. Пилипенко В. В. Кавитационные автоколебания / В. В. Пилипенко. – Киев : Наук. думка, 1989. – 316 с.
2. Кваша Ю. А. Численное моделирование кавитационного обтекания решетки пластин вязкой жидкостью / Ю. А. Кваша // Динамика гидромеханических систем летательных аппаратов. – Киев : Наук. думка, 1992. – С. 99 – 104.
3. Reboud J.-L. Two-Phase Flow Structure of Cavitation: Experiment and Modelling of Unsteady Effects / J.-L. Reboud, B. Stutz, O. Coutier // Proc. Third Int. Symp. on Cavitation. – Grenoble (France), 1998. – Vol.1. – P. 203 – 208.
4. Кваша Ю. А. Численное моделирование нестационарного осесимметричного кавитационного течения в сужающе-расширяющихся каналах местных гидравлических сопротивлений / Ю. А. Кваша, Н. В. Болотова // Техническая механика. – 2004. – № 1. – С. 96 – 101.
5. Ahuja V. Simulations of Cavitation in Orifice and Venturis / V. Ahuja, A. Hosangadi // Proc. ASME PVP 2007 / CREEP 8-11 Conf. – Hyatt Regency San Antonio, Texas (USA), 2007. – 9 p.
6. Пилипенко О. В. Расчет двумерных течений вязкой жидкости на неструктурных сетках / О. В. Пилипенко, Ю. А. Кваша, Н. В. Болотова // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 3 – 7.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – Москва : Наука, 1978. – 736 с.
8. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика / Г. Н. Абрамович. – Москва : Наука, 1976. – 888 с.
9. Белов И. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости / И. А. Белов, С. А. Исаяев, В. А. Коробков. – Л. : Судостроение, 1989. – 256 с.
10. Болотова Н. В. Построение неструктурных расчетных сеток с треугольными элементами в плоских многосвязных областях / Н. В. Болотова // Техническая механика. – 2006. – № 1. – С. 115 – 118.
11. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости : пер. с англ. / С. Патанкар. – Москва : Энергониздат, 1984. – 152 с.

Институт технической механики  
НАН Украины и НКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 11.07.11,  
в окончательном варианте 11.07.11