

## КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОГО СЛОЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Описаны установившиеся колебания виброоживленного кольцевого слоя зерновой смеси при его движении по внутренней поверхности цилиндрического решета виброцентробежного сепаратора. Построено аналитическое решение краевой задачи гидродинамики с учетом разделения смеси на проходную и сходовую фракции, а также колебаний скорости движения, обусловленных осевыми вибрациями вращающегося решета.

Описано усталені коливання вібророзіженого кільцевого шару зернової суміші при його русі по внутрішній поверхні циліндричного решета вібродіцентрового сепаратора. Побудовано аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки з урахуванням розділення суміші на проходову та сходову фракції, а також коливань швидкості руху, зумовлених осьовими вібраціями решета, що обертається.

Describes the steady-state vibrations vibroliquefaction of the ring layer grain mix as it moves along the inner surface of the cylindrical sieve vibratory centrifugal separator. An analytical solution of the boundary value problem in hydrodynamics, taking into account the split in passing and falling fraction, as well as vibration velocity caused by axial vibration of a rotating sieve.

Движение зерновой смеси в условиях вибраций имеет сходство с течением вязкой жидкости. Поэтому его в теоретических моделях часто описывают уравнениями динамики вязкой ньютоновской жидкости. Вибрации интенсифицируют процесс разделения смеси на фракции, в связи с чем изучение закономерностей распространения их в движущейся зерновой среде представляет не только теоретический интерес, но и практическую значимость. Как следует из указанной гидродинамической аналогии, для исследования вибрационных полей в сыпучей зерновой среде в области ее виброоживления допустимо использовать уравнения Навье–Стокса.

Отметим существование двух способов моделирования потоков разделяющейся на фракции зерновой смеси. В первом, который изложен в [1, 2], движение каждой фракции описывается «своей» системой дифференциальных уравнений. Поэтому отдельно составляются уравнения динамики несущего потока и динамики дисперсной фазы с учетом взаимодействия фаз. В отдельных случаях, после упрощений, удастся последовательно решить одну систему, а потом – другую. Второй способ, который применяется в [3], является более простым в математическом отношении. В нем движение виброоживленной зерновой смеси описывается одной системой уравнений Навье–Стокса, а отделение части зерна от общего потока рассматривается как просачивание жидкости во время движения ее через направляющую проницаемую граничную поверхность. В граничных условиях дискретное просеивание проходовой фракции в отверстиях решета «размазывается» на всю рабочую перфорированную поверхность. Таким образом, при постановке граничного условия задается некоторая усредненная, нормальная к граничной поверхности, скорость потока смеси, которая в конечном счете определяет пропускную способность решета или производительность его по проходовой фракции. В рамках этого упрощенного способа в [4] рассматривалось вертикальное движение виброоживленного кольцевого слоя зерновой смеси по внутренней поверхности цилиндрического виброрешета. Но, определяя усредненные за период колебаний решета характеристики потока, там в цилиндрических координатах решали уравнения гидродинамики с отброшенными инерционными членами. Без разделения смеси на фракции ее поток по вертикаль-

ному виброрешету с учетом инерционных членов рассмотрен в [2]. С целью упрощения задачи в [2] пренебрегали искривлением поверхности решета, сводя его к плоской поверхности. Движение смеси по плоскому виброрешету с учетом колебаний скорости потока и разделения смеси на фракции исследовано также в [5]. Более общая задача кинетики неоднородного слоя для плоского решета решена с помощью фракций Кельвина в работе [6]. Здесь ставится задача обобщения результатов, полученных в [4].

Целью работы является вывод формул для расчета скорости движения смеси с учетом ее колебаний и разделения потока на две фракции вертикальным цилиндрическим решетом, которое совершает осевые гармонические колебания.

При постановке задачи исходим из уравнений Навье–Стокса, записанных для осесимметричного движения вязкой жидкости [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= \nu \left( \nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu \nabla^2 u_z, \\ \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $u_r, u_\varphi, u_z$  – соответственно радиальная, тангенциальная и осевая проекции скорости потока;  $r, z$  – радиальная и осевая координаты;  $p$  – внутреннее избыточное давление;  $\nu$  – эффективная кинематическая вязкость виброоживленной зерновой смеси плотности  $\rho$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $t$  – время.

Ось  $oz$  направлена вертикально вниз по оси цилиндрического виброрешета, как показано на рис. 1.

Уравнения (1) решаем полуобратным методом, априори задав часть неизвестных функций. Рассматривая установившийся процесс движения вдоль оси  $oz$  и учитывая решение работы [4], принимаем:

$$\begin{aligned} u_r = u_r(r) = cr^{-1}; \quad u_\varphi = u_\varphi(r) = c_1 r^{-1} + c_2 r^{1+\gamma}; \quad u_z = u_z(r, t); \\ p = p(r) = c_3 - \frac{\rho}{2r^2} \left( c^2 + c_1^2 - \frac{4c_1 c_2}{\gamma} r^{2+\gamma} - \frac{c_2^2}{1+\gamma} r^{4+2\gamma} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

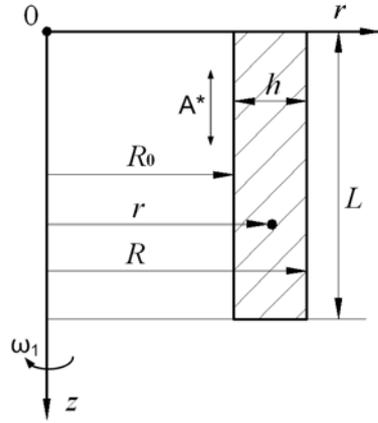


Рис. 1

Здесь  $\gamma = c/v$ ;  $c, c_1, c_2, c_3$  – произвольные постоянные.

Граничные условия на поверхности виброрешета  $r = R$ :

$$u_r = \varepsilon v_{II}; \quad u_\varphi = \omega_1 R, \quad (3)$$

а также на свободной (внутренней) поверхности кольцевого слоя  $r = R_0$ :

$$\sigma_{rr} = 2\rho v \frac{\partial u_r}{\partial r} - p = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = \rho v r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) = 0 \quad (4)$$

выполняются, когда:  $c = \varepsilon R v_{II}$ ;  $c_1 = \omega_1 R^2 \frac{\gamma R_0^{2+\gamma}}{2R^{2+\gamma} + \gamma R_0^{2+\gamma}}$ ;

$$c_2 = \frac{2c_1}{\gamma R_0^{2+\gamma}}; \quad c_3 = \frac{\rho}{2R_0^2} \left( c^2 + c_1^2 - \frac{4c_1 c_2}{\gamma} R_0^{2+\gamma} - \frac{c_2^2}{1+\gamma} R_0^{4+2\gamma} - 4vc \right). \quad (5)$$

В выражениях (3), (4) и (5)  $\omega_1$  – угловая скорость вращения решета;  $v_{II}$  – радиальная проекция скорости просеивания проходовой фракции через отверстия в решете, имеющем коэффициент «живого сечения»  $\varepsilon$ .

Заметим, что вследствие отделения части зерна от движущейся основной массы, толщина кольцевого слоя  $h$ , а следовательно и внутренний радиус  $R_0 = R - h$ , будут меняться по высоте решета. Здесь этим изменением пренебрегаем, полагая  $R_0 = const$ . Поэтому излагаемая теория приемлема для расчетов, когда объем просеявшейся фракции мал по отношению к объему смеси, движущейся по решету.

Подстановка (2) в (1) обращает первое, второе и четвертое уравнения в тождества, а третье уравнение системы принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1-2s}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{v}, \quad (6)$$

где  $s = 0,5\gamma = c/(2v)$ .

Уравнение (6) будем решать при граничных условиях:

$$u_z(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (7)$$

где  $A^*, \omega$  – соответственно амплитуда и частота осевых вертикальных колебаний решета.

Положим

$$u_z(r, t) = u_1(r) + u_2(r, t). \quad (8)$$

Согласно (6) и (7), слагаемые суммы (8) должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1-2s}{r} \frac{du_1}{dr} = -\frac{g}{v}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1-2s}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

и граничным условиям:

$$u_1(R) = 0; \quad \left. \frac{du_1}{dr} \right|_{r=R_0} = 0; \quad (11)$$

$$u_2(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0. \quad (12)$$

Решение краевой задачи, представленной выражениями (9) и (11), построено в работе [4] и сведено к виду

$$u_1(r) = \frac{g}{4\nu s(1-s)} \left[ R_0^{2-2s} (r^{2s} - R^{2s}) + s(R^2 - r^2) \right] \quad s < 1. \quad (13)$$

При  $s=0$  в нем возникает неопределенность типа  $|0/0|$ . Раскрыв ее, из (13) получаем известную формулу [1]

$$u_1(r) = \frac{g}{4\nu} \left( R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right).$$

Рассмотрим далее задачу, представленную выражениями (10) и (12). Решение уравнения (10) берем в форме

$$u_2(r, t) = \operatorname{Re}(w(r)e^{i\omega t}) = \operatorname{Re} w(r) \cdot \cos(\omega t) - \operatorname{Im} w(r) \cdot \sin(\omega t), \quad (14)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $w(r)$  – неизвестная комплексная функция вещественного аргумента.

Ее находим, решив дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1-2s}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{i\omega}{v} w = 0 \quad (15)$$

при граничных условиях:

$$\operatorname{Re} w(R) = A^* \omega; \quad (16)$$

$$\operatorname{Im} w(R) = \left. \frac{d}{dr} \operatorname{Re} w(r) \right|_{r=R_0} = \left. \frac{d}{dr} \operatorname{Im} w(r) \right|_{r=R_0} = 0,$$

вытекающим из (12).

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$w(r) = \xi^s \left[ (b_1 + ib_2) \cdot e^{i\frac{s\pi}{2}} \cdot I_s(\xi\sqrt{i}) + (b_3 + ib_4) \cdot e^{-i\frac{s\pi}{2}} \cdot K_s(\xi\sqrt{i}) \right]. \quad (17)$$

Здесь  $\xi = \lambda r$ ;  $\lambda = \sqrt{\omega/\nu}$ ;  $I_s(x)$ ,  $K_s(x)$  – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индексов  $s$ ;  $b_1, b_2, b_3, b_4$  – вещественные произвольные постоянные.

Учитывая, что [8]

$$e^{i\frac{s\pi}{2}} I_s(\xi\sqrt{i}) = ber_s(\xi) + i bei_s(\xi);$$

$$e^{-i\frac{s\pi}{2}} K_s(\xi\sqrt{i}) = ker_s(\xi) + i kei_s(\xi),$$

вещественную и мнимую части  $w(r)$  выражаем через функции Кельвина индекса  $s$ :

$$\operatorname{Re} w(r) = \xi^s [b_1 ber_s(\xi) - b_2 bei_s(\xi) + b_3 ker_s(\xi) - b_4 kei_s(\xi)]; \quad (18)$$

$$\operatorname{Im} w(r) = \xi^s [b_1 bei_s(\xi) + b_2 ber_s(\xi) + b_3 kei_s(\xi) + b_4 ker_s(\xi)].$$

При дифференцировании выражений (18) по  $r$  воспользуемся тем, что [8]

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^s I_s(\xi\sqrt{i})] = \sqrt{i} \xi^s I_{s-1}(\xi\sqrt{i}); \quad \frac{d}{d\xi} [\xi^s K_s(\xi\sqrt{i})] = -\sqrt{i} \xi^s K_{s-1}(\xi\sqrt{i}).$$

Подставив (18) в их производные в (16), получаем систему четырех линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $b_j$ ,  $j = \overline{1;4}$ :

$$\begin{aligned} b_1 ber_s(\eta) - b_2 bei_s(\eta) + b_3 ker_s(\eta) - b_4 kei_s(\eta) &= A^* \omega \eta^{-s}, \\ b_1 bei_s(\eta) + b_2 ber_s(\eta) + b_3 kei_s(\eta) + b_4 ker_s(\eta) &= 0, \\ b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4 &= 0, \\ b_1 f_2 - b_2 f_1 + b_3 f_4 - b_4 f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\eta = \lambda R$ ;  $\zeta = \lambda R_0$ ;  $f_{1,2} = ber_{s-1}(\zeta) \pm bei_{s-1}(\zeta)$ ;

$f_{3,4} = ker_{s-1}(\zeta) \pm kei_{s-1}(\zeta)$ .

Решив (19), находим константы:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; & b_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}; & b_3 &= \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2; & b_4 &= -\delta_2 b_1 + \delta_1 b_2; \\
\Delta_1 &= A^* \omega \eta^{-s} (ber_s(\eta) + \delta_1 ker_s(\eta) + \delta_2 kei_s(\eta)); \\
\Delta_2 &= -A^* \omega \eta^{-s} (bei_s(\eta) + \delta_1 kei_s(\eta) - \delta_2 ker_s(\eta)); \\
\Delta &= (ber_s(\eta) + \delta_1 ker_s(\eta) + \delta_2 kei_s(\eta))^2 + (bei_s(\eta) + \delta_1 kei_s(\eta) - \delta_2 ker_s(\eta))^2; \\
\delta_1 &= -\frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_3^2 + f_4^2}; & \delta_2 &= \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_3^2 + f_4^2}.
\end{aligned}$$

Учитывая найденные  $b_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ , после подстановки (18) в (14), а затем (13) и (14) в (8), получаем формулу вертикальной проекции скорости потока смеси по решетку

$$\begin{aligned}
u_z(\xi, t) &= \frac{g}{4\nu s(1-s)} \left[ R_0^{2-2s} (r^{2s} - R^{2s}) + s(R^2 - r^2) \right] + \\
&+ \xi^s [b_1 ber_s(\xi) - b_2 bei_s(\xi) + b_3 ker_s(\xi) - b_4 kei_s(\xi)] \cos(\omega t) + \\
&(-1)\xi^s [b_1 bei_s(\xi) + b_2 ber_s(\xi) + b_3 kei_s(\xi) + b_4 ker_s(\xi)] \sin(\omega t).
\end{aligned} \tag{20}$$

Чтобы определить производительность решета по сходовой фракции  $Q_c(t)$  приходится вычислять интеграл

$$Q_c(t) = 2\pi \int_{R_0}^R r u_z(r, t) dr = \frac{2\pi}{\lambda^2} \int_{\zeta}^{\eta} \xi u_z(\xi, t) d\xi. \tag{21}$$

Здесь  $\eta = \lambda R$ ;  $\zeta = \lambda R_0$ .

Он также выражается через функции Кельвина, поскольку [8]

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{\xi^{s+1}} \begin{bmatrix} ber_s(\xi) \\ ker_s(\xi) \end{bmatrix} d\xi &= \frac{\xi^{s+1}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} bei_{s+1}(\xi) - ber_{s+1}(\xi) \\ kei_{s+1}(\xi) - ker_{s+1}(\xi) \end{bmatrix}; \\
\int_{\xi}^{\xi^{s+1}} \begin{bmatrix} bei_s(\xi) \\ kei_s(\xi) \end{bmatrix} d\xi &= -\frac{\xi^{s+1}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} bei_{s+1}(\xi) + ber_{s+1}(\xi) \\ kei_{s+1}(\xi) + ker_{s+1}(\xi) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Подставив (20) в (21), с учетом (22), находим

$$\begin{aligned}
Q_c(t) &= \frac{\pi g R_0^4}{2\nu(1-s)} \cdot \left( \frac{R^{2s} - R_0^{2s}}{2s(1+s)R_0^{2s}} + \frac{R^{2s}(R_0^2 - R^2)}{2(1+s)R_0^{2s+2}} + \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{4R_0^4} \right) + \\
&+ \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda^2} \cdot \left[ (b_1 F_1 - b_2 F_2 + b_3 F_3 - b_4 F_4) \cdot \cos(\omega t) + \right. \\
&\quad \left. (-1)(b_1 F_2 + b_2 F_1 + b_3 F_4 + b_4 F_3) \cdot \sin(\omega t) \right]; \\
F_{1,2} &= \zeta^{s+1} \cdot [ber_{s+1}(\zeta) \mp bei_{s+1}(\zeta)] - \eta^{s+1} \cdot [ber_{s+1}(\eta) \mp bei_{s+1}(\eta)]; \\
F_{3,4} &= \zeta^{s+1} \cdot [ker_{s+1}(\zeta) \mp kei_{s+1}(\zeta)] - \eta^{s+1} \cdot [ker_{s+1}(\eta) \mp kei_{s+1}(\eta)].
\end{aligned}$$

Изменение производительности  $Q_c(t)$  происходят с той же частотой, что и вертикальные вибрации решета.

В производственных условиях параметры вибраций решета таковы, что  $\xi \geq \zeta \gg 1$ . Выполнение этого неравенства упрощает расчеты характеристик потока смеси с помощью построенных решений. В них функции Кельвина с небольшой погрешностью можно заменить асимптотическими выражениями:

$$\begin{bmatrix} ber_s(x) \\ bei_s(x) \end{bmatrix} \sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 - \frac{4s^2 - 1}{8\sqrt{2x}}\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{4s-1}{8}\pi + \frac{4s^2-1}{8\sqrt{2x}}\right) \\ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{4s-1}{8}\pi + \frac{4s^2-1}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} ker_s(x) \\ kei_s(x) \end{bmatrix} \sim \frac{\sqrt{\pi}e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2x}} \cdot \left(1 + \frac{4s^2 - 1}{8\sqrt{2x}}\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{4s+1}{8}\pi + \frac{4s^2-1}{8\sqrt{2x}}\right) \\ -\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{4s+1}{8}\pi + \frac{4s^2-1}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}.$$

**Анализ численных результатов.** Для проведения расчетов, следуя [2], задавали:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $h = 0,01 \text{ м}$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$ ;  $\rho\nu = 0,66 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $v_{II} = 0,0025 \text{ м/с}$ ;  $\varepsilon = 0,4$   $R = 0,3075 \text{ м}$ . Вычисленные по формуле (20) скорости вертикального движения смеси представлены на рис. 2 и 3.

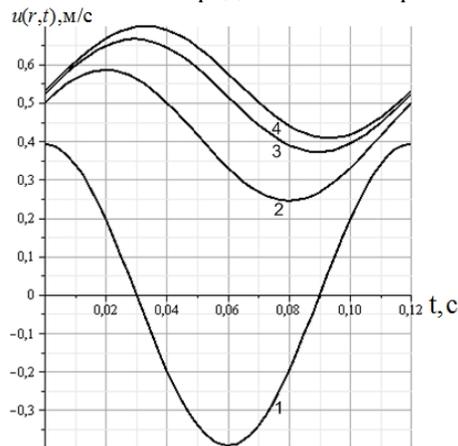


Рис. 2

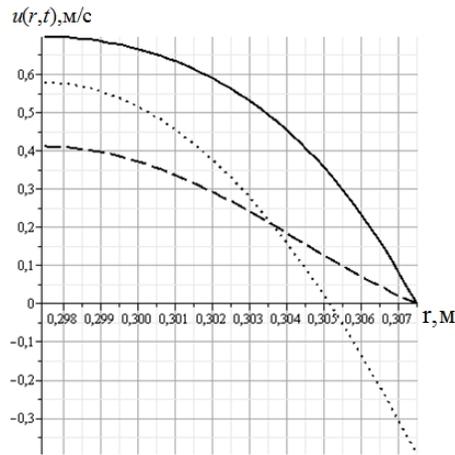


Рис. 3

На рис. 2 представлены зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных  $r : 1, 2, 3, 4$  –  $r = R; R_0 + \frac{R - R_0}{2}; R_0 + \frac{R - R_0}{4}; R_0$ , а на рис. 3 приведены профили скорости потока зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени: —  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ; .....  $t = \frac{\pi}{\omega}$ ; ----  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ .

На основании рис. 2, можно сделать вывод, что по мере удаления от поверхности решета в сторону свободной поверхности слоя уменьшаются амплитуды колебаний скорости, однако увеличиваются средние значения скорости, относительно которых происходят эти колебания. На рис. 3 нанесены распределения скоростей потока по толщине слоя в различные моменты времени. Расчёты показывают, что профили скорости потока смеси существенно меняются с течением времени, вследствие колебаний решета.

1. Тищенко Л. Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.
2. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л. Н. Тищенко, Д. И. Мазоренко, М. В. Пивень, С. А. Харченко, В. В. Бредихин, А. В. Мандрыка. – Харьков : Міськдрук, 2010. – 360 с.
3. Тищенко Л. Н. Гидродинамика сепарирования зерна / Л. Н. Тищенко, В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Харьков : Міськдрук, 2010. – 174 с.
4. Тищенко Л. Н. К расчету движения зерновой смеси по верти-кальному цилиндрическому решету вибросепаратора / Л. Н. Тищенко, В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – № 2 (54). – С. 50 – 55.
5. Тищенко Л. Н. О колебаниях скорости зерновой смеси на вибро-решете // Вібрації в техніці та технологіях. – 2010. – № 1 (57). – С. 118-123.
6. Тищенко Л. Н. О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете / Л. Н. Тищенко, В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь : ТДАТУ, 2010. – Вип. 10, Т. 7. – С. 32 – 42.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1973. – 847 с.
8. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям : с формулами, графиками и математическими таблицами / А. Абрамовиц, И. Стиган.. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»,  
г. Харьков

Получено 13.12.2010,  
в окончательном варианте 14.06.2011