УДК 517.5

Д. С. Скороходов

О наилучшем приближении классов Гельдера линейными методами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Найдены точные значения линейных одномерных поперечников классов Гельдера в пространстве C, а также величина погрешности наилучшего приближения классов Гельдера широким классом линейных положительных методов.

1. Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а $\mathcal{M}$ — фиксированное подмножество X. Напомним определения некоторых апроксимационных характеристик класса $\mathcal{M}$ (см., например, [1, 2]). Пусть $N \in \mathbb{N}$ и через L_N обозначим множество линейных многообразий $F \subset X$ размерности не выше N. Величина

$$d_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{F \in L_N} \sup_{f \in \mathcal{M}} \inf_{u \in F} \|f - u\|_X \tag{1}$$

называется *N-поперечником по Колмогорову* класса $\mathcal{M}$ в пространстве X. Через $\mathcal{L}(X; F)$, $F \in L_N$, обозначим множество линейных непрерывных операторов $A\colon X \to F$. *Линейным N-поперечником* класса $\mathcal{M}$ в пространстве X называется величина

$$\lambda_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{F \in L_N} \inf_{A \in \mathcal{L}(X;F)} \sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - Af\|_X. \tag{2}$$

На сегодня точные значения поперечников d_N и λ_N известны для ряда важных множеств $\mathcal{M}$ в различных нормированных пространствах X (см. [1–4] и ссылки в них). Детальнее рассмотрим вопрос о точных значениях поперечников классов непрерывных функций, заданных модулем непрерывности.

Пусть C и $\widetilde{C}$ — пространства непрерывных на отрезке $[0, 1]$ и 1-периодических функций соответственно. Норму в этих пространствах введем стандартным образом $\|f\| := \max\{|f(x)|\colon x \in [0, 1]\}$, где $f \in C$ или $f \in \widetilde{C}$. Для произвольного выпуклого вверх модуля непрерывности ω (см. [1, § 6.1]) рассмотрим класс

$$H^\omega := \{f \in C\colon (\forall \delta \geqslant 0) \bigwedge (\forall x', x'' \in [0, 1]\colon |x' - x''| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(\delta)\}$$

и его 1-периодический аналог — класс $\widetilde{H}^\omega$. В частности, когда $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, классы H^ω и $\widetilde{H}^\omega$ обычно называются *классами Гельдера* порядка α и обозначаются через H^α и $\widetilde{H}^\alpha$ соответственно.

N-поперечники по Колмогорову классов H^ω и $\widetilde{H}^\omega$ известны для всех $N \in \mathbb{N}$:

$$d_N(H^\omega; C) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{N}\right), \tag{3}$$

$$d_N(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2[(N+1)/2]}\right), \tag{4}$$

где $[z]$ обозначает целую часть числа z. Равенство (3) установлено Ю. И. Григоряном [5], соотношения (4) для нечетных N получены Н. П. Корнейчуком [6] (см. также [7]), а для четных N — В. И. Рубаном [8].

В отличие от поперечников по Колмогорову, точные значения линейных поперечников $\lambda_N(H^\omega; C)$ и $\lambda_N(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C})$ известны лишь в тривиальном случае, когда модуль непрерывности ω линеен на отрезке $[0, 1/2N]$. В остальных случаях известно [9], что $d_N < \lambda_N$. Задача о нахождении линейных поперечников классов H^ω и $\widetilde{H}^\omega$ неоднократно ставилась Н. П. Корнейчуком [3, 4, 9, 10]. По-видимому (см. [9]), основная ее сложность состоит в отсутствии эффективных методов оценки поперечников λ_N снизу, которые бы использовали линейность отображений конечного ранга.

Ниже будут найдены одномерные поперечники $\lambda_1(H^\omega; C)$ и $\lambda_1(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C})$. Пусть V_1 — множество функций $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации таких, что $\sigma(0) = 0$ и $\sigma(1) = 1$. Обозначим через K пространство постоянных функций. Поскольку $K \subset H^\omega$, то применяя теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в C, можем записать

$$\lambda_1(H^\omega; C) = \inf_{A \in \mathcal{L}(C;K)} \sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\| = \inf_{\sigma \in V_1} \sup_{f \in H^\omega} \left\| f - \int_0^1 f(t)\, d\sigma(t) \right\|. \tag{5}$$

Аналогичным образом устанавливается равенство

$$\lambda_1(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}) = \inf_{\sigma \in V_1} \sup_{f \in \widetilde{H}^\omega} \left\| f - \int_0^1 f(t)\, d\sigma(t) \right\|. \tag{6}$$

В дальнейшем будем говорить, что функция $\sigma^* \in V_1$ *порождает* наилучший линейный метод приближения класса H^ω (класса $\widetilde{H}^\omega$) пространством констант, если она реализует инфимум в правой части равенства (5) (равенства (6) соответственно).

Теорема 1. *Пусть ω — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда*

$$\lambda_1(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}) = 2 \int_0^{1/2} \omega(t)\, dt,$$

а наилучший метод приближения класса $\widetilde{H}^\omega$ пространством констант порождается функцией $\sigma(t) = t$, $t \in [0,1]$.

Теорема 1 в случае $n = 1$ подтверждает гипотезу Н. П. Корнейчука (см. [4, § 8.2.2]) о том, что

$$\lambda_{2n-1}(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}) = 2n \int_0^{\frac{1}{2n}} \omega(t)\, dt.$$

Доказательство. Несложно проверить, что для всех $x \in [0,1]$

$$\sup_{f \in \widetilde{H}^\omega} \left| f(x) - \int_0^1 f(t)\, dt \right| = 2 \int_0^{1/2} \omega(t)\, dt. \tag{7}$$

Покажем, что для каждой функции $\sigma \in V_1$ найдется точка $x_\sigma \in [0,1]$, в которой

$$\sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x_\sigma) - \int\limits_0^1 f(t)\,d\sigma(t)\right| \geqslant 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt. \tag{8}$$

Действительно, пусть неравенство (8) неверно для всех $x \in [0,1]$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x) - \int\limits_0^1 f(t)\,d\sigma(t)\right|dx < 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{\varphi}_\omega(a;t) := \min\{\omega(|a-t|);\, \omega(|a-t+1|);\, \omega(|a-t-1|)\}$, $a,\ t \in [0,1]$. Очевидно, что $\widetilde{\varphi}_\omega(a;\cdot) \in \widetilde{H}^\omega$ и применяя теорему Фубини (см. [11, р. XI, § 4.1]), получим

$$\int\limits_0^1 \sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x) - \int\limits_0^1 f(t)\,d\sigma(t)\right|dx \geqslant \int\limits_0^1 \sup_{a\in[0,1]}\left|\widetilde{\varphi}_\omega(a;x) - \int\limits_0^1 \widetilde{\varphi}_\omega(a;t)\,d\sigma(t)\right|dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^1\left|\int\limits_0^1 \widetilde{\varphi}_\omega(x;t)\,d\sigma(t)\right|dx \geqslant \left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \widetilde{\varphi}_\omega(x;t)\,dx d\sigma(t)\right| = 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt.$$

Последнее противоречит неравенству (9). Наконец, используя (6), (8) и (7), имеем

$$\lambda_1(\widetilde{H}^\omega;\widetilde{C}) \geqslant \inf_{\sigma\in V_1}\sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x_\sigma) - \int\limits_0^1 f(t)\,d\sigma(t)\right| \geqslant 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt \geqslant \lambda_1(\widetilde{H}^\omega;\widetilde{C}).$$

Теорема 2. *Пусть ω — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда существует неубывающая функция $g_\omega \in V_1$ такая, что $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ для всех $t \in [0,1]$, и*

$$\lambda_1(H^\omega;C) = \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\,dg_\omega(t) \qquad \text{для всех} \qquad x \in [0,1]. \tag{10}$$

Более того, функция g_ω порождает наилучший линейный метод приближения класса H^ω пространством констант.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с тем отличием, что вместо функций $\widetilde{\varphi}_\omega$ необходимо рассмотреть функции $\varphi_\omega(a;t) := \omega(|a-t|)$, $a,t \in [0,1]$, а вместо равенства (7) — показать, что существуют неубывающая функция $g_\omega \in V_1$ и число $\lambda > 0$ такие, что для всех $x \in [0,1]$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\,dg_\omega(t) = \lambda.$$

Теорема 2 устанавливает взаимосвязь между поперечником $\lambda_1(H^\omega;C)$ и функцией $g_\omega \in$ $\in V_1$, порождающей наилучший линейный метод приближения класса H^ω пространством констант. Таким образом, соотношение (10) можно рассматривать как неявный ответ на вопрос о точном значении поперечника $\lambda_1(H^\omega; C)$. В то же время, используя теорему 2, линейные одномерные поперечники классов Гельдера можно вычислить явно.

Теорема 3. *Если* $\alpha \in (0,1)$, *то*

$$\lambda_1(H^\alpha; C) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}, \tag{11}$$

а наилучший линейный метод приближения класса H^α *пространством констант порождается функцией*

$$g(x) := \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^x \frac{dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}, \qquad x \in [0,1]. \tag{12}$$

В общем случае ($N > 1$) точные значения поперечников $\lambda_N(H^\omega; C)$ и $\lambda_N(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C})$ остаются неизвестными. Однако из теорем 2 и 3 несложно указать новые оценки:

$$\lambda_N(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}) \leqslant \lambda_N(H^\omega; C) \leqslant \lambda_1(H^{\omega_N}; C), \qquad \text{где} \qquad \omega_N(\cdot) = \omega\left(\frac{(\cdot)}{N}\right), \tag{13}$$

$$\lambda_N(\widetilde{H}^\alpha; \widetilde{C}) \leqslant \lambda_N(H^\alpha; C) \leqslant \lambda_1(H^\alpha; C)N^{-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{14}$$

2. Вместе с колмогоровскими и линейными поперечниками определенный интерес представляет также изучение и других апроксимационных характеристик класса H^ω. Пусть $F \in L_N$. Через $\mathcal{L}^+(C; F)$ обозначим множество *положительных* операторов $A \in \mathcal{L}(C; F)$, т. е. Af неотрицательна, если $f \in C$ неотрицательна, а через $\mathcal{L}^{++}(C; F)$ — множество операторов $A \in \mathcal{L}^+(C; F)$, представимых в виде

$$Af = \varphi_1(f) \cdot e_1 + \varphi_2(f) \cdot e_2 + \cdots + \varphi_N(f) \cdot e_N, \qquad f \in C, \tag{15}$$

для некоторых линейных ограниченных положительных функционалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ на C и неотрицательных непрерывных функций $e_1, e_2, \ldots, e_N$.

Заметим, что множество $\mathcal{L}^{++}(C; F)$ достаточно широко. Действительно, $K \subset H^\omega$, поэтому любой оператор $A \in \mathcal{L}(C; F)$ такой, что $\sup\limits_{f \in H^\omega} \|f - Af\| < \infty$, инвариантен на постоянных функциях. Следовательно, его можно представить в виде разности $A = A_1 - A_2$ двух операторов $A_1, A_2 \in \mathcal{L}^{++}(C; F)$.

Рассмотим следующие аналоги линейных поперечников

$$\lambda_N^+(H^\omega; C) := \inf_{F \in L_N} \inf_{A \in \mathcal{L}^+(C;F)} \sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\|,$$

$$\lambda_N^{++}(H^\omega; C) := \inf_{F \in L_N} \inf_{A \in \mathcal{L}^{++}(C;F)} \sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\|.$$

Теорема 4. *Пусть* ω *— выпуклый вверх модуль непрерывности,* $N \in \mathbb{N}$ *и* $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. *Тогда* $\lambda_N^{++}(H^\omega; C) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$.

Доказательство. Отметим, что неравенство $\lambda_N(H^\omega; C) \leqslant \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$ несложно доказать, опираясь на теорему 2. Поэтому ниже приведена схема доказательства противоположного неравенства $\lambda_N(H^\omega; C) \geqslant \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$.

Сперва можно показать, что для произвольной системы из $m \in \mathbb{N}$ непересекающихся отрезков $\{[\alpha_j, \beta_j]\}_{j=1}^m \subset [0,1]$ общей длины $1/N$ существует неубывающая функция $g \in V_1$ со свойствами

$$\bigvee_0^1 g = \sum_{j=1}^m \bigvee_{\alpha_j}^{\beta_j} g \qquad \text{и} \qquad \int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) \geqslant \lambda_1(H^{\omega_N}; C) \qquad \forall\, x \in [0,1]. \tag{16}$$

Для этого достаточно рассмотреть функцию $\overline{g}_N(t) := \max\{\overline{g}(Nt); 1\}$, $t \in [0,1]$, где $\overline{g} \in V_1$ порождает наилучший линейный метод приближения класса H^ω пространством констант, и положить

$$g(x) := \begin{cases} \overline{g}_N(x - \alpha_k + \gamma_{k-1}), & x \in [\alpha_k, \beta_k], \quad k = 1, 2, \ldots, m, \\ \overline{g}_N(\gamma_k), & x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, m, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 0$, $\alpha_{m+1} = 1$ и числа $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_m = 1/N$ таковы, что $\gamma_k - \gamma_{k-1} = \beta_k - \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Далее, используя теорему Фубини, рассуждения теорем 1 и 2, а также предыдущий факт, можно доказать, что для любой неубывающей функции $\sigma \in V_1$,

$$\mu\left\{x \in [0,1]\colon \int_0^1 \omega(|x-t|)\, d\sigma(t) < \lambda_1(H^{\omega_N}; C)\right\} \leqslant \frac{1}{N}, \tag{17}$$

где μ обозначает меру Лебега на отрезке.

Наконец, пусть $F \in L_N$ и $A \in \mathcal{L}^{++}(C; F)$ — произвольный оператор, для которого $\sup\limits_{f \in H^\omega} \|f - Af\| < \infty$. Поскольку $K \subset H^\omega$, то из определения (15) и представления линейных положительных функционалов в C (см. [12, § 2.1]), несложно показать, что найдутся неотрицательные функции $\{e_k\}_{k=1}^N \subset C$, $e_1 + e_2 + \cdots + e_N = 1$, и функции $\{\sigma_k\}_{k=1}^N \subset V_1$ такие, что для всех $f \in C$ и $x \in [0,1]$,

$$Af(x) = \sum_{k=1}^N e_k(x) \int_0^1 f(t)\, d\sigma_k(t).$$

Используя неравенство (17) для функций σ_k, можно доказать существование точки $\overline{x} \in$ $\in [0,1]$, в которой для всех $k = 1, 2, \ldots, N$ выполнено неравенство

$$\int_0^1 \varphi_\omega(\overline{x}; t)\, d\sigma_k(t) \geqslant \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

Тогда

$$\sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\| \geqslant \sup_{x \in [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} |\varphi_\omega(x; t) - (A\varphi_\omega(x; \cdot))(t)| \geqslant \sup_{x \in [0,1]} (A\varphi_\omega(x; \cdot))(x) \geqslant$$

$$\geqslant (A\varphi_\omega(\overline{x};\cdot))(\overline{x}) \geqslant \lambda_1(H^{\omega_N};C)\sum_{k=1}^{N} e_k(\overline{x}) = \lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Таким образом,

$$\lambda_N^{++}(H^\omega;C) = \inf_{F\in L_N}\inf_{A\in\mathcal{L}^{++}(C;F)}\sup_{f\in H^\omega}\|f-Af\| \geqslant \lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Объединяя утверждения теорем 3 и 4, получим следующее.

Следствие 1. *Если* $\alpha \in (0,1)$ *и* $N \in \mathbb{N}$, *то*

$$\lambda_N^{++}(H^\alpha;C) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2N^\alpha\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Еще одним следствием теорем 2 и 4 является следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* ω *— выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда*

$$\lambda_N^{+}(H^\omega;C) = \lambda_N^{++}(H^\omega;C), \qquad N=1,2.$$

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 305 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – Москва: Наука, 1984. – 356 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
5. *Григорян Ю. И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 637–646.
6. *Корнейчук Н. П.* Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций // Доп. АН УРСР. – 1963. – **150**, № 6. – С. 1218–1220.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – **35**, № 1. – С. 93–124.
8. *Рубан В. И.* Четные поперечники классов $W^{(r)}H_\omega$ в пространстве $C_{2\pi}$ // Мат. заметки. – 1974. – **15**, № 3. – С. 387–392.
9. *Корнейчук Н. П.* О линейных поперечниках классов H^ω // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1255–1264.
10. *Корнейчук Н. П.* О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3(177). – С. 9–42.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. II. – Москва: МЦНМО, 2002. – 794 с.
12. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов – Москва: Наука, 1985. – 255 с.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 23.12.2013

Д. С. Скороходов

Про найкраще наближення класів Гельдера лінійними методами

Знайдено точні значення лінійних одновимірних поперечників класів Гельдера в просторі C, а також величину похибки найкращого наближення класів Гельдера широким класом лінійних додатних методів.

D. S. Skorokhodov

On the best approximation of the Hölder classes by linear methods

We find exact values of linear one-dimensional widths of the Hölder classes in the space C. The error of the best approximation of the Hölder classes by a wide class of linear positive methods is determined.