

## МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ КОНЦЕВЫХ ТЕЛ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ В НАЗЕМНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Рассмотрена задача моделирования динамики наземной экспериментальной тросовой системы для исследования процессов стабилизации движения концевого тела с использованием специального устройства крепления тела к нити. В статье также решены вопросы моделирования и анализа силовых воздействий в экспериментальной системе.

Розглянуто задачу моделювання динаміки наземної експериментальної тросової системи для дослідження процесів стабілізації руху кінцевого тіла з використанням спеціального пристрою кріплення тіла до нитки. У статті також вирішено питання моделювання й аналізу силових впливів в експериментальній системі.

The problem for modeling the dynamics of ground-based experimental tethered system for studying stabilized motion processes for an end body by using a special device of attachment of the end body to the tether is considered. Also the paper deals with the problem for modeling and analyzing the force effects in the experimental system.

Космические тросовые системы (КТС), вращающиеся вокруг собственного центра масс с угловой скоростью, значительно превышающей угловую скорость орбитального движения, являются новым и перспективным направлением. В работах [1 – 5] показана возможность эффективного использования таких систем для транспортных операций в космосе. В частности, в работе [4] рассмотрена схема неоднократной транспортировки грузов с низких околоземных орбит на геостационарную. Полученные при этом оценки эффективности позволяют утверждать [5], что использование вращающейся КТС позволит существенно снизить стоимость доставки грузов на геостационарную орбиту в сравнении с существующими системами.

Особый интерес к использованию вращающихся КТС связан с экспериментальными исследованиями динамики КТС [6, 7, 8] и исследованиями физических свойств космического пространства [9, 10]. В этих проектах протяженность КТС предполагается не столь большой, как в проектах транспортных операций, и может составлять лишь несколько десятков или сотен метров.

Практически во всех проектах КТС важными характеристиками являются устойчивость движения и точность стабилизации тел. Ранее [11, 12] на модели двух точечных масс, соединенных невесомой нитью, была исследована устойчивость вращения КТС и определены основные закономерности эволюции параметров ее движения. Исследования влияния движения концевых тел на динамику всей системы показали [13], что при отсутствии в движении резонансов это влияние пренебрежимо мало. Однако создание КТС различного назначения часто предполагает достижение достаточно точной ориентации движения привязных тел. Поэтому одной из важных задач динамики КТС является задача стабилизации движения ее концевых тел и исследование переходных режимов движения. Расчеты динамики показали, что во многих случаях для достижения приемлемой стабилизации движения тел КТС требуется введение в систему специальных устройств крепления тел к нити. Такие устройства должны повысить скорость затухания продольных колебаний системы, угловых колебаний концевых тел относительно точки крепления к нити и крутильных колебаний системы. Одной из актуальных задач является создание пассивной системы, демпфирующей рассматриваемые виды колебаний тросовой системы.

© О.Л. Волошенко, А.В. Пироженко, 2010

Техн. механика. – 2010. – № 3.

Разработка устройств крепления концевых тел к нити предполагает проведение экспериментальных исследований. Выбор и проверку основных принципов работы и основных конструкторских решений таких устройств удобно осуществлять в наземных экспериментах, поскольку они гораздо более доступны в сравнении с натурными экспериментами. Расчеты показывают, что вполне можно подобрать такие параметры наземной тросовой системы, что ее частоты малых продольных колебаний и колебаний привязного тела относительно точки крепления будут совпадать с аналогичными частотами КТС. Несмотря на то, что в общем случае невозможно достичь совпадения частот маятниковых колебаний, представляется, что наземные эксперименты не только полезны, но и необходимы.

Статья посвящена разработке математической модели наземной экспериментальной тросовой системы. Данная модель необходима для подготовки и проведения экспериментальных исследований устройства крепления концевых тел КТС к нити.

**Постановка задачи.** Рассматривается экспериментальная тросовая система (ЭТС), схема которой изображена на рис. 1. Соединительная нить ( $H$ ) прикреплена одним концом к неподвижной точке подвеса ( $O_{II}$ ), а другим концом — к поверхности устройства, предназначенного для демпфирования угловых колебаний тела (точка  $O_K$ ). Это устройство, в дальнейшем называемое приставкой ( $P$ ), представляет собой твердое тело, взаимодействующее с основным телом ( $T$ ) в фиксированных в приставке точках контакта  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Предполагается, что точки контакта расположены на сфере радиуса  $R$  и равноудалены от некоторой оси приставки. Соответственно, перемещение точек контакта в теле осуществляется по сфере того же радиуса. Таким образом, рассматривается “шарнирное соединение” тела и приставки с шарнирной точкой в геометрическом центре сферы  $O_C$ . В общем случае центр масс тела ( $O_T$ ) не совпадает с  $O_C$ .

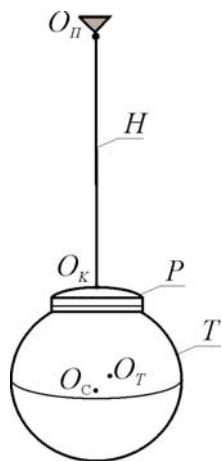


Рис. 1

Рассматривается движение системы в однородном поле тяжести. Влияние воздуха на движение системы считается пренебрежимо малым. Предполага-

ется также, что тело абсолютно твердое и что массой нити в сравнении с массой тела и приставки можно пренебречь.

С целью дальнейшего исследования процессов стабилизации движения концевой тела, в том числе с помощью экспериментальных исследований, в статье решаются задачи моделирования силовых воздействий и анализа в ЭТС, а также построения математической и расчетной моделей рассматриваемой системы.

**Уравнения движения.** На основании общих теорем механики динамические уравнения движения рассматриваемой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} m_P \ddot{\vec{R}}_P &= \vec{F}_{tr} + \vec{F}_P + \vec{F}_r - \vec{F}_f, \\ \dot{\vec{L}}_P &= \vec{M}_{tr} + \vec{M}_{r,P} + \vec{M}_{f,P} + \vec{M}_{kr}, \\ m_T \ddot{\vec{R}}_T &= \vec{F}_T - \vec{F}_r + \vec{F}_f, \\ \dot{\vec{L}}_T &= \vec{M}_{r,T} + \vec{M}_{f,T}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_P$ ,  $m_T$  – массы приставки и тела соответственно;  $\vec{R}_P$ ,  $\vec{R}_T$  – радиус-векторы центров масс приставки (точка  $O$ ) и тела (точка  $O_T$ ) относительно точки подвеса нити  $O_{II}$  (рис. 1);  $\vec{L}_S$  – кинетические моменты движения тел относительно своих центров масс;  $\vec{F}_S$  – силы тяжести, действующие на приставку и тело соответственно,  $\vec{F}_S = -m_S g \vec{e}_g$ ,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\vec{e}_g$  – единичный вектор вертикали. Здесь и далее индекс  $S$  принимает значения  $P$  и  $T$  – это означает, что данная характеристика относится к приставке и телу соответственно.  $\vec{F}_{tr}$ ,  $\vec{M}_{tr}$  – сила и момент силы натяжения нити;  $\vec{M}_{kr}$  – момент кручения нити, действующий на приставку;  $\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{r,i}$  – суммарная сила нормальных реакций, действующая на приставку при ее взаимодействии с телом,  $\vec{F}_{r,i}$  – сила реакции в  $i$ -ой точке контакта, перпендикулярная поверхности контакта;  $-\vec{F}_f = -\sum_{i=1}^n \vec{F}_{f,i}$  – суммарная сила трения между приставкой и телом, действующая на приставку,  $\vec{F}_{f,i}$  – сила трения в  $i$ -ой точке контакта;  $\vec{M}_{r,S} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{r,S,i}$ ,  $\vec{M}_{f,S} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{f,S,i}$ ,  $\vec{M}_{r,S,i}$ ,  $\vec{M}_{f,S,i}$  – моменты сил  $\vec{F}_{r,i}$ ,  $-\vec{F}_{r,i}$  и  $-\vec{F}_{f,i}$ ,  $\vec{F}_{f,i}$ , действующие на приставку и тело относительно их центров масс соответственно.

Предполагается, что упругие свойства нити описываются законом Гука, а рассеивание энергии в материале нити – при помощи формул эквивалентного вязкого трения

$$\vec{F}_{tr} = - \left[ c \frac{(l-d)}{d} + \chi \dot{l} \right] \vec{e}_l \delta, \quad \delta = \begin{cases} 1 & l > d, \\ 0 & l \leq d, \end{cases}$$

где  $\vec{e}_l$  – единичный вектор, направленный вдоль вектора  $\vec{l}$ ,  $\vec{e}_l = \vec{l}/|\vec{l}|$ ,  $\vec{l}$  – вектор, направленный из точки подвеса нити в точку крепления нити к приставке:  $\vec{l} = \overrightarrow{O_{II}O_K}$ ,  $l = |\vec{l}|$ ,  $\dot{l} = \left( \vec{e}_l, \dot{\vec{l}} \right)$ ;  $d$  – номинальная длина нити;  $c$  – коэффициент жёсткости;  $\chi$  – коэффициент вязкого трения.

Момент силы натяжения нити определяется формулой

$$\vec{M}_{tr} = \vec{\rho}_k \times \vec{F}_{tr},$$

где  $\vec{\rho}_k$  – вектор, направленный из центра масс приставки в точку крепления нити к приставке,  $\vec{\rho}_k = \overrightarrow{O_P O_K}$  (рис. 2).

Предполагается, что крутящий момент  $\vec{M}_{kr}$ , действующий на приставку, пропорционален углу закрутки нити  $\gamma$ , направлен вдоль линии нити и может быть представлен в виде [14]

$$\vec{M}_{kr} = (k_1 + k_2 |\vec{F}_{tr}|) \cdot \frac{\gamma}{d} \vec{e}_l,$$

где  $k_1$  – коэффициент жесткости нити при кручении;  $k_2$  – коэффициент влияния. В случае простой конструкции нити коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$  могут быть оценены на основании известных формул, разработанных для канатов [14, 15]. В общем случае, их определение осуществляется экспериментальным путем.

Обозначим через  $\vec{F}_I$  суммарную силу реакции, действующую на приставку при ее взаимодействии с телом

$$\vec{F}_I = \vec{F}_r - \vec{F}_f. \quad (2)$$

Тогда из уравнений движения центров масс приставки и тела (1) с учетом (2) получаем

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_T - \ddot{\vec{R}}_P = -\mu \left( \vec{F}_I - \frac{\vec{F}_{tr}}{m_P} \right), \quad (3)$$

где  $\mu = \frac{m_P + m_T}{m_T m_P}$ .

Следовательно,

$$\vec{F}_I = -\frac{1}{\mu} \left( \ddot{\vec{r}} + \frac{\vec{F}_{tr}}{m_P} \right). \quad (4)$$

С другой стороны, радиус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{O_P O_T}$  определяется известными векторами  $\vec{\rho}_c$  и  $\vec{\rho}_t$  (рис. 2), фиксированными в приставке и теле соответственно

$$\vec{r} = \vec{\rho}_c - \vec{\rho}_t. \quad (5)$$

Дифференцируя дважды (5), получаем

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}}_P \times \vec{\rho}_c + \vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{\rho}_c) - \dot{\vec{\omega}}_T \times \vec{\rho}_t - \vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \vec{\rho}_t), \quad (6)$$

где  $\vec{\omega}_S$  – векторы абсолютных угловых скоростей тел.

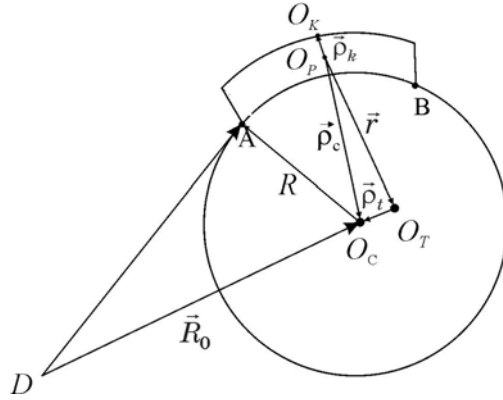


Рис. 2

Подставляя (6) в (4) и проводя некоторые преобразования, получаем

$$\vec{F}_I = -\frac{1}{\mu} \left[ (\dot{\vec{\omega}}_P \times \vec{\rho}_c - \dot{\vec{\omega}}_T \times \vec{\rho}_t) + \Delta \vec{F}_I \right], \quad (7)$$

где  $\Delta \vec{F}_I = \frac{\vec{F}_{tr}}{m_p} + \Delta \vec{r}''$ ,  $\Delta \vec{r}'' = \vec{\omega}_P (\vec{\omega}_P, \vec{\rho}_c) - \vec{\omega}_T (\vec{\omega}_T, \vec{\rho}_t) - \vec{\rho}_c \omega_P^2 + \vec{\rho}_t \omega_T^2$ .

Таким образом, суммарная сила реакции  $\vec{F}_I$ , возникающая при взаимодействии тела с приставкой, не зависит непосредственно ни от количества точек контакта, ни от их расположения в приставке. Эта сила полностью определяется угловым движением тела и приставки, положением их центров масс относительно шарнирной точки и ускорением силы натяжения троса.

Рассмотрим моменты нормальных сил реакций  $\vec{F}_{r,i}$  ( $i = \overline{1, O}$ ). Поскольку эти силы перпендикулярны поверхности контакта приставки и тела, то они коллинеарны радиус-векторам точек контакта относительно геометрического центра сферы  $O_C$ .

Радиус-вектор  $\vec{r}_i$   $i$ -ой точки контакта относительно произвольной точки  $D$  (рис. 2) определяется как

$$\vec{r}_i = \vec{R}_0 + R \vec{e}_i, \quad i = \overline{1, O}, \quad (8)$$

где  $\vec{R}_0 = \overrightarrow{DO_C}$  – радиус-вектор, направленный из точки  $D$  в центр сферы  $O_C$ ;  $\vec{e}_i$  – единичный вектор, направленный из центра сферы  $O_C$  в  $i$ -ю точку контакта.

Тогда момент нормальных сил реакций относительно произвольной точки  $D$  описывается формулой

$$\vec{M}_r = \sum_{i=1}^O (\vec{r}_i \times \vec{F}_{r,i}) = \sum_{i=1}^O ((\vec{R}_0 + R \vec{e}_i) \times \vec{F}_{r,i}),$$

т.к.  $\vec{e}_i \times \vec{F}_{r,i} = \mathbf{0}$ , то

$$\vec{M}_r = \vec{R}_0 \times \vec{F}_r.$$

Моменты  $\vec{M}_{r,S}$ , действующие на приставку и тело относительно своих центров масс, определяются как (рис. 2)

$$\vec{M}_{r,P} = \vec{\rho}_c \times \vec{F}_r, \quad \vec{M}_{r,T} = -\vec{\rho}_t \times \vec{F}_r.$$

Следовательно, суммарные моменты нормальных сил реакций, действующие на приставку и тело, как и сами силы реакций, непосредственно не зависят ни от количества точек контакта, ни от их расположения в приставке.

В точках контакта приставки и тела кроме сил реакций действуют также силы трения  $\vec{F}_{f,i}$  ( $i = \overline{1, O}$ ). Будем предполагать, что сила трения пропорциональна скорости тела относительно приставки, т.е. выражение для  $\vec{F}_{f,i}$  в каждой точке контакта представляется в виде

$$\vec{F}_{f,i} = \eta_i (\vec{V}_{P,i} - \vec{V}_{T,i}) = \eta_i (\dot{\vec{r}}_{P,i} - \dot{\vec{r}}_{T,i}), \quad i = \overline{1, O},$$

где  $\eta_i$  – коэффициент трения;  $\vec{V}_{S,i}$  – скорости точек контакта приставки и тела в  $i$ -ой точке контакта соответственно;  $\vec{r}_{S,i}$  – радиус-векторы, направленные из некоторой неподвижной точки  $D$  в  $i$ -ю точку контакта приставки и тела соответственно.

На основании (8) выражения для  $\vec{r}_{S,i}$  запишутся в виде

$$\vec{r}_{S,i} = \vec{R}_0 + R \vec{e}_{S,i}, \quad i = \overline{1, O},$$

где  $\vec{e}_{S,i}$  — единичные векторы, направленные в  $i$ -ю точку контакта из геометрического центра  $O_C$ .

Тогда

$$\dot{\vec{r}}_{S,i} = \dot{\vec{R}}_0 + R(\vec{\omega}_S \times \vec{e}_{S,i}). \quad (9)$$

Поскольку  $\vec{r}_{P,i} = \vec{r}_{T,i}$ , то  $\vec{e}_{S,i} = \vec{e}_i$ . Тогда с учетом (9) выражение для  $\vec{F}_{f,i}$  запишется

$$\vec{F}_{f,i} = \eta_i R(\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T) \times \vec{e}_i. \quad (10)$$

Точки контакта приставки и тела расположены симметрично некоторой оси сферы (рис. 3). Пусть  $\vec{e}_c$  – единичный вектор, направленный из центра сферы  $O_C$  вдоль этой оси,  $\vec{e}_c$  – неизменный в приставке вектор.

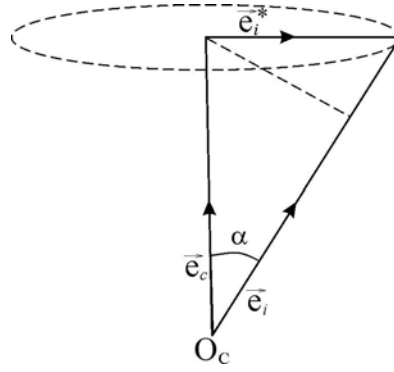


Рис. 3

Тогда (рис. 3), вектор  $\vec{e}_i$  представляется в виде

$$\vec{e}_i = \cos\alpha \vec{e}_c + \sin\alpha \vec{e}_i^*,$$

где  $\vec{e}_i^*$  – единичный вектор, направленный из центра окружности в точку контакта.

Так как  $\sum_{i=1}^O \vec{e}_i^* = \mathbf{0}$ , то, при однородности точек контакта ( $\eta = \eta_i$  для всех  $i$ ), из (10) суммарная сила трения равна

$$\vec{F}_f = \eta R (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T) \times \sum_{i=1}^O \vec{e}_i = O\eta R \cos\alpha (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T) \times \vec{e}_c. \quad (12)$$

Таким образом, суммарная сила трения  $\vec{F}_f$  зависит от количества и расположения точек контакта. Но в рассматриваемом случае силу трения можно представить в виде  $\vec{F}_f = \eta^* \cos\alpha R (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T) \times \vec{e}_c$ , где  $\eta^*$  – некоторый интегральный коэффициент пропорциональности,  $\eta^* = O\eta$ .

Момент силы трения  $\vec{M}_{f,i}$  относительно некоторой точки  $D$  определяется формулой

$$\vec{M}_{f,i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{f,i} = (\vec{R}_0 + R \vec{e}_i) \times \vec{F}_{f,i}.$$

Подставляя (12) в выражение для  $\vec{M}_{f,i}$ , нетрудно получить, что суммарный момент сил трения равен

$$\vec{M}_f = \vec{R}_0 \times \vec{F}_f + \Delta M_f, \quad (13)$$

где  $\Delta M_f = \eta R^2 \{n(\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T) - n \cos^2 \alpha \vec{e}_c (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T, \vec{e}_c) - \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^n \vec{e}_i^* (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T, \vec{e}_i^*)\}$ .

Как видно, момент сил трения зависит и от количества точек, и от их расположения, и в общем случае его не представляется возможным записать в некоторой общей форме. Однако при малом  $\alpha$  таком, что его квадратом можно пренебречь, выражение момента сил трения значительно упрощается и  $\Delta \vec{M}_f$  можно представить в виде

$$\Delta \vec{M}_f = \eta^* R^2 \{ (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T) - \vec{e}_c (\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_T, \vec{e}_c) \}.$$

Моменты сил трения, действующие на приставку и тело относительно их центров масс, запишутся аналогично (13)

$$\vec{M}_{f,P} = -\vec{\rho}_c \times \vec{F}_f - \Delta \vec{M}_f,$$

$$\vec{M}_{f,T} = \vec{\rho}_t \times \vec{F}_f + \Delta \vec{M}_f.$$

**Системы координат и матрицы перехода.** Для описания движения системы введем следующие правые системы координат (СК):

$O_{II}X_l Y_l Z_l$  – лабораторная СК (ЛСК) с началом в точке подвеса нити  $O_{II}$ . Ось  $O_{II}X_l$  направлена вертикально вниз, ось  $O_{II}Z_l$  – перпендикулярно плоскости наблюдения в сторону наблюдателя, ось  $O_{II}Y_l$  лежит в плоскости наблюдения;

$O_{II}X_n Y_n Z_n$  – полуподвижная СК, связанная с нитью (ССК(Н)), с началом в точке  $O_{II}$ . Ось  $O_{II}X_n$  направлена вдоль линии нити, соединяющей точку  $O_{II}$  и точку  $O_K$ , ось  $O_{II}Y_n$  – лежит в плоскости  $O_{II}X_l Y_l$ ,  $O_{II}Z_n$  – дополняет систему до правой и образует с  $O_{II}Z_l$  острый угол. Предполагается, что отклонение линии нити от плоскости наблюдения невелико и находится в пределах  $(0^\circ, 90^\circ)$ .

$O_P X_p Y_p Z_p$  и  $O_T X_T Y_T Z_T$  – СК, связанные с приставкой (ССК(Р)) и телом (ССК(Т)) с началами в центрах масс приставки  $O_P$  и тела  $O_T$  соответственно. Оси ССК(Р) и ССК(Т) направлены по главным центральным осям инерции приставки и тела соответственно.

Взаимная ориентация систем координат описывается следующим образом:  $O_{II}X_l Y_l Z_l$  и  $O_{II}X_n Y_n Z_n$  – углами  $\alpha, \beta$ , определяющими положение радиус-вектора  $\vec{O_{II}O_K}$ , где  $\alpha$  – угол поворота в плоскости наблюдения ( $O_{II}X_l Y_l$ ),  $\beta$  – угол отклонения от этой плоскости  $O_{II}X_l Y_l$  (рис. 4);  $O_{II}X_n Y_n Z_n$  и  $O_P X_p Y_p Z_p$ ,  $O_P X_p Y_p Z_p$  и  $O_T X_T Y_T Z_T$  – описываются углами Крылова  $(\varphi_j, \theta_j, \psi_j)$ ,  $j=1,2$ , соответственно углами крена, тангажа и рысканья [16].

Кинематические соотношения, связывающие производные углов  $(\alpha, \beta)$  по времени с проекциями вектора угловой скорости  $\vec{\omega}_H$  движения ССК(Н) относительно ССК(Л) на оси ССК(Н):

$$\dot{\alpha} = -\frac{\vec{\omega}_H(1)}{\sin \beta},$$

$$\dot{\beta} = \vec{\omega}_H(2),$$

где  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  – производные углов  $\alpha, \beta$  соответственно.



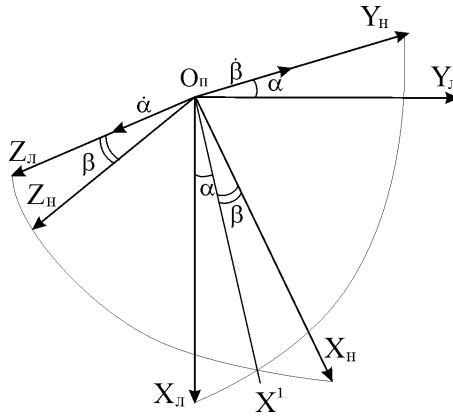


Рис. 4

Для рассматриваемой математической модели используются приведенные в [16] кинематические соотношения, связывающие производные углов Крылова  $(\varphi_s, \theta_s, \psi_s)$ ,  $(S = P, T)$  по времени с проекциями векторов угловых скоростей абсолютного движения приставки и тела на оси соответствующих связанных систем координат: ССК(Р) и ССК(Т).

**Уравнения движения в скалярной форме** центров масс приставки и тела получим, проектируя уравнения для  $\ddot{\vec{R}}_P, \ddot{\vec{R}}_T$  в (1) на оси ЛСК

$$\begin{aligned} H_P \ddot{\vec{R}}_P &= \bar{F}_{tr} + \bar{F}_P + \bar{F}_r - \bar{F}_f, \\ H_T \ddot{\vec{R}}_T &= \bar{F}_T - \bar{F}_r + \bar{F}_f, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\bar{R}_S$  – столбцы проекций векторов  $\vec{R}_S$  на оси ЛСК;  $\bar{F}_{tr}, \bar{F}_S, \bar{F}_r, \bar{F}_f$  – столбцы проекций соответствующих сил на оси ЛСК.

Уравнения движения приставки и тела вокруг собственных центров масс относительно ЛСК в проекциях на оси ССК(Р) и ССК(Т) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \bar{J}_P \dot{\bar{\omega}}_P + \bar{W}_P \bar{J}_P \bar{\omega}_P &= \bar{M}_{tr} + \bar{M}_{kr} + \bar{M}_{r,P} + \bar{M}_{f,P}, \\ \bar{J}_T \dot{\bar{\omega}}_T + \bar{W}_T \bar{J}_T \bar{\omega}_T &= \bar{M}_{r,T} + \bar{M}_{f,T}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\bar{J}_S$  – матрицы инерции тел;  $\bar{\omega}_S$  – столбцы проекций векторов абсолютных угловых скоростей  $\bar{\omega}_S$ ;  $\bar{W}_S$  – кососимметричные матрицы абсолютных угловых скоростей  $\bar{\omega}_S$ ;  $\bar{M}_*$  – столбцы проекций соответствующих моментов на оси соответствующих СК.

С учетом выражений моментов сил реакций через угловые скорости и их производные  $\dot{\bar{\omega}}_S, \bar{\omega}_S$  (9), запишем уравнения движения (15) в проекциях на оси соответствующих ССК

$$\begin{aligned} \left( \bar{J}_P + \frac{1}{\mu} A^* \right) \dot{\bar{\omega}}_P + \frac{1}{\mu} B^* (A_{tp} \dot{\bar{\omega}}_T) &= -\bar{W}_P \bar{J}_P \bar{\omega}_P + \bar{M}_{tr} + \bar{M}_{kr} + \bar{M}_{f,P} + \Delta \bar{M}_{r,P}, \\ -\frac{1}{\mu} C^* (A_{pt} \dot{\bar{\omega}}_P) + \left( \bar{J}_T - \frac{1}{\mu} D^* \right) \dot{\bar{\omega}}_T &= -\bar{W}_T \bar{J}_T \bar{\omega}_T + \bar{M}_{f,T} + \Delta \bar{M}_{r,T}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\overline{\Delta M}_{r,S}$  — столбцы проекций векторов  $\overline{\Delta M}_{r,S}$  на оси ССК(Р) и ССК(Т) соответственно:  $\overline{\Delta M}_{r,P} = \frac{1}{\mu} (\overline{\rho}_c \times \Delta \overline{F}_r)$ ,  $\overline{\Delta M}_{r,T} = -\frac{1}{\mu} (\overline{\rho}_t \times \Delta \overline{F}_r)$ ,  $\Delta \overline{F}_r = \Delta \overline{F}_I - \mu \overline{F}_f$ ;  
 $A_{tp}$  — матрица перехода из ССК(Т) в ССК(Р),  $A_{pt} = A_{tp}^T$  (символ  $T$  обозначает операцию транспонирования);  $A^* = \rho_c^2 E - (\overline{\rho}_c' \cdot \overline{\rho}_c)$ ,  
 $\overline{\rho}_c' = [\rho_c(1), \rho_c(2), \rho_c(3)]^T$ ;  $B^* = (A_{tp} \overline{\rho}_t' \cdot \overline{\rho}_c) - (\overline{\rho}_c, A_{tp} \overline{\rho}_t) E$ ,  
 $\overline{\rho}_t' = [\rho_t(1), \rho_t(2), \rho_t(3)]^T$ ;  $C^* = (\overline{\rho}_t, A_{pt} \overline{\rho}_c) E - (A_{pt} \overline{\rho}_c' \cdot \overline{\rho}_t)$ ;  $D^* = (\overline{\rho}_t' \cdot \overline{\rho}_t) - \rho_t^2 E$ ;  
 $E$  — единичная матрица.

Обозначим правые части (16) через  $\overline{M}_P$  и  $\overline{M}_T$ , тогда данную систему уравнений можно представить в матричном виде

$$A \cdot \dot{\overline{\omega}} = \overline{M},$$

где введены следующие блочные матрицы

$$\dot{\overline{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\omega}}_P \\ \dot{\overline{\omega}}_T \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{M}_P \\ \overline{M}_T \end{bmatrix}, \quad A = |A_{ij}|, \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad (17)$$

$A$  — блочная матрица коэффициентов при компонентах  $\dot{\overline{\omega}}$  с элементами:

$$A_{11} = \overline{J}_P + \frac{1}{\mu} A^*, \quad A_{12} = \frac{1}{\mu} B^* A_{tp},$$

$$A_{21} = -\frac{1}{\mu} C^* A_{pt}, \quad A_{22} = \overline{J}_T - \frac{1}{\mu} D^*.$$

Тогда с учетом принятых обозначений (17) уравнения движения приставки и тела вокруг собственных центров масс (16) примут вид

$$\dot{\overline{\omega}} = A^{-1} \overline{M}. \quad (18)$$

Таким образом, построена модель динамики процессов стабилизации движения концевое тела ЭТС. Проведено моделирование силовых воздействий устройства демпфирования угловых колебаний концевое тела. Данная модель послужила основой для выбора параметров демпфирующего устройства и схемы проведения экспериментальных исследований. На основе разработанной математической модели построены расчетные компьютерные модели динамики рассматриваемой системы.

1. Forward R. L. Terminator Tether: A Spacecraft Deorbit Device / R. L. Forward, R. P. Hoyt, C. W. Uphoff // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — V. 37, № 2. — P. 187–196.
2. Nordley G. D. Mars-Earth Rapid Interplanetary Tether Transport System: Initial Feasibility Analysis / G. D. Nordley, R. L. Forward // Journal of Propulsion and Power. — 2001. — V. 17. — P. 499–507.
3. Hoyt R. P. Rapid Interplanetary Tether Transport / R. P. Hoyt, R. L. Forward, G. D. Nordley, C. W. Uphoff // 50th International Astronautical Congress, Netherlands, Amsterdam, Oct 1999. — IAC-99-A.5.10.
4. Lorenzini E. C. Mission analysis of spinning systems for transfers from low orbits to geostationary / E. C. Lorenzini, M. L. Cosmo // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — V. 37, № 2. — P. 165–172.
5. Hoyt R. P. Cislunar Tether Transport System / R. P. Hoyt, C. W. Uphoff // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — V. 37, № 2. — P. 177–186.

6. *Alpatov A. P.* Self-contained small space tether systems / *A. P. Alpatov, P. A. Belonozhko, V. S. Khoroshilov, A. V. Pirozhenko* // International aerospace congress, Moscow, Russia, August, 1994. – P. 2.
7. *Alpatov A. P.* Study of the basic variables of a cable-tether system intended as an electromechanical linkage between space vehicles / *A. P. Alpatov, V. S. Khoroshilov, A. V. Pirozhenko* // Space science and technology. – 2000. – V. 6, № 4. – P. 129 – 131.
8. *Wallace B. K.* SEDS tether deployment ground test / *B. K. Wallace*. – Washington, April, 1995.
9. *James H. G.* Space research in the BICEPS experiment / *H. G. James, A. W. Yau, G. Tyc* // Fourth International Conference on Tether In Space, Washington, April, 1995. – P. 1585 – 1598.
10. *Alpatov A.* Research of dynamics of space cable systems stabilized by rotation / *A. Alpatov, V. Dranovskii, V. Khoroshilov, A. Pirozhenko, A. Zakrzhevskii* – Turin, Italy: IAF. October, 1997.
11. *Baniun P. M.* Three-dimensional motion and stability of two rotating cable-connected bodies / *P. M. Baniun, K. S. Evans* // J. Spacecraft and rockets. – 1975. – V. 12. – С. 242 – 250.
12. *Алпатов А. П.* Ротационное движение комических тросовых систем / *А. П. Алпатов, В. В. Белецкий, В. И. Драновский, и др.* – Днепропетровск : Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2001. – 404 с.
13. *Волошенко О. Л.* Анализ частот и характеристик переходных процессов космической тросовой системы, стабилизированной вращением / *О. Л. Волошенко, А. В. Пироженко* // Техническая механика. – 2005. – №1. – С.13 – 21.
14. *Глушко М. Ф.* Стальные канаты / *М. Ф. Глушко*. – К. : Техника, 1974. – 328 с.
15. *Белецкий В. В.* Динамика космических тросовых систем / *В. В. Белецкий, Е. М. Левин*. –М. : Наука, 1990. – 336 с.
16. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / *А. И. Лурье*. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.

Институт технической механики  
НАН Украины и НКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 03.06.2010,  
в окончательном варианте 03.06.2010