

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ КА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОСТИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассматриваются малые пространственные колебания спутника под воздействием аэродинамического и гравитационного моментов. В модели аэродинамического момента учитываются переменность плотности атмосферы при орбитальном движении, вращение атмосферы и зависимость коэффициента аэродинамического момента от угла атаки. Показано, что колебания в плоскости орбиты не зависят от поперечных колебаний спутника. Определены условия возникновения резонансов в поперечных колебаниях и построены аналитические решения уравнений малых поперечных колебаний в нерезонансных случаях.

Розглядаються малі просторові коливання супутника під впливом аеродинамічного й гравітаційного моментів. В моделі аеродинамічного моменту враховуються змінність густини атмосфери при орбітальному русі, обертання атмосфери та залежність коефіцієнта аеродинамічного моменту від кута атаки. Показано, що коливання в площині орбіти не залежать від поперечних коливань супутника. Визначено умови виникнення резонансів в поперечних коливаннях і побудовані аналітичні розв'язки рівнянь малих поперечних коливань у нерезонансних випадках.

Small three-dimensional oscillations of a satellite under the action of the aerodynamic and gravitational moments are considered. Variations in an atmospheric density with an orbital motion, rotation of the atmosphere and the dependence of the moment coefficient on the angle of attack are considered in the aerodynamic moment model. It is shown that oscillations in an orbital plane do not depend on lateral oscillations of a satellite. Conditions of resonances in lateral oscillations are determined and analytical solutions of the equations of small lateral oscillations in non-resonance cases are constructed.

В постановке задачи, аналогичной [1, 2], рассматривается движение относительно центра масс класса космических аппаратов (КА) с гравитационной системой стабилизации (ГСС). ГСС представляет собой прикрепленную к КА штангу с гравитационным грузом на конце. Исследуется движение КА в режиме гравитационной стабилизации, т.е. в таком режиме, при котором продольная ось КА движется в окрестности местной вертикали и амплитуды колебаний невелики. Предполагается, что центр масс КА движется по круговой орбите на высотах 550 – 750 км.

Повышение точности стабилизации углового движения является важной задачей создания платформ КА. Ее решение предполагает тщательный анализ условий функционирования КА и выбор обоснованных конструктивных решений, необходимых для обеспечения требуемой точности. Поэтому при разработке ГСС важным является анализ влияния одного из основных возмущающих воздействий в рассматриваемом диапазоне высот – аэродинамического воздействия.

Исследованию пространственного движения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов посвящено множество работ (см., например, [3 – 7]). Было показано, что вращение атмосферы приводит к возникновению так называемых поперечных колебаний (колебаний, перпендикулярных плоскости орбиты). В работах [3 – 5] указывалась необходимость учета в угловом движении КА непостоянства плотности атмосферы при орбитальном движении и изменений ориентации КА относительно набегающего потока, которые приводят к дополнительной переменности аэродинамического момента. Однако к настоящему времени качественный анализ влияния переменной аэродинамического воздействия, обусловленной названными причинами, не был выполнен.

В работах [8, 9] авторами была разработана модель аэродинамического момента, позволяющая выполнить анализ влияния переменной аэродинамического момента на динамику КА с ГСС. Показано, что плотность атмосферы на одном витке орбитального движения может меняться на порядок

© А.И. Маслова, А.В. Пироженко, 2010

[9]. В [1, 2] были исследованы закономерности движения КА в плоскости орбиты. Показано, что в силу близости частот орбитального движения и колебаний спутника относительно центра масс (низкой динамической жесткости) вынужденные колебания КА из-за переменности плотности атмосферы могут быть весьма существенны и в разы превосходить отклонения КА при стационарной плотности. При определенных параметрах ГСС, когда удвоенная частота собственных колебаний КА в гравитационном поле близка к утроенной частоте орбитального движения, в движении КА имеет место параметрический резонанс и система теряет устойчивость.

Целью данной статьи является исследование основных закономерностей влияния переменности аэродинамического момента на пространственное движение КА с ГСС с учетом, в том числе, вращения атмосферы.

Математическая модель движения. Рассмотрим движение осесимметричного КА относительно центра масс, движущегося по круговой кеплеровой орбите. Гравитационный момент, действующий на КА, запишем в виде [10]

$$\vec{M}^g = 3\omega_0^2 \vec{e}_R \times (\overline{\overline{J}} \vec{e}_R), \quad (1)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения; $\overline{\overline{J}}$ – тензор инерции КА; $\vec{e}_R = \vec{R}/R$, \vec{R} – радиус-вектор центра масс КА относительно центра Земли, $R = |\vec{R}|$.

Следуя [8], при движении КА с ГСС в режиме гравитационной стабилизации аэродинамический момент будем описывать зависимостью

$$\vec{M}^a = a_0 (1 + \sigma_a \cos \beta) q \vec{b}_m, \quad (2)$$

где a_0 – постоянный коэффициент, характеризующий среднее аэродинамическое воздействие на КА; σ_a – постоянный коэффициент, характеризующий переменность аэродинамического момента в зависимости от ориентации КА к набегающему потоку; β – угол между осью симметрии КА и вектором скорости КА относительно потока; $q = \rho V^2 / 2$ – скоростной напор, ρ – плотность атмосферы, $V = |\vec{V}|$, \vec{V} – скорость КА относительно потока; \vec{b}_m – орт, сонаправленный $\vec{k} \times \vec{e}_V$, где \vec{k} – орт оси симметрии КА, направленный от Земли, $\vec{e}_V = \vec{V}/V$.

Выражение (2) можно записать в виде

$$\vec{M}^a = a_0 (1 + \sigma_a \vec{e}_V \cdot \vec{k}) q \frac{\vec{k} \times \vec{e}_V}{\sqrt{1 - (\vec{e}_V \cdot \vec{k})^2}}. \quad (3)$$

Плотность атмосферы ρ при движении КА по орбите будем описывать следующим образом [9]

$$\rho = b_0 \left[1 + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\omega_0 t + f_n) \right] = b_0 (1 + \tilde{\rho}), \quad (4)$$

где b_0 – средняя на орбите плотность атмосферы; \bar{b}_n, f_n – коэффициенты, характеризующие распределение плотности при движении КА по орбите; t – время; $\tilde{\rho}$ характеризует переменность плотности атмосферы на орбите.

Введем правые системы координат с началом в центре масс КА (точка O).

Орбитальная система координат (ОСК) $Oxyz$, ось Ox направлена по трансверсали к орбите, ось Oz – по \vec{R} .

Связанная система координат (ССК) $Ox_c y_c z_c$, оси совпадают с главными центральными осями инерции КА.

Переход от ОСК к ССК осуществляется тремя последовательными поворотами на углы φ, ψ и θ (тангажа, рысканья и крена) соответственно (см. рис.1).

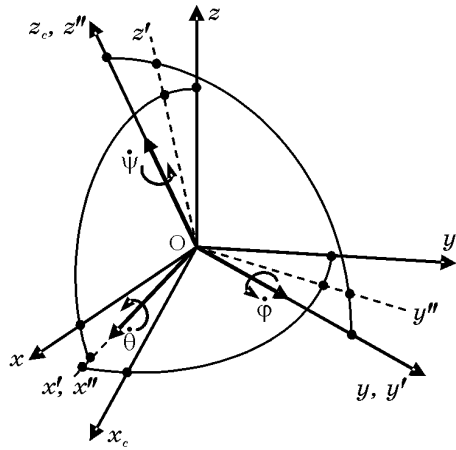


Рис. 1

Матрица T_{c0} перехода от ОСК к ССК имеет вид

$$T_{c0} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \sin \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \psi & \sin \psi \cos \theta & \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \varphi \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Для рассматриваемых высот будем считать, что атмосфера полностью увлекается вращением Земли, тогда проекции \vec{V} на оси ОСК имеют вид

$$V_x = \omega_0 R - \omega_3 R \cos i, \quad V_y = \omega_3 R \sin i \cos u, \quad V_z = 0,$$

где ω_3 – угловая скорость вращения атмосферы; i – наклонение орбиты; u – аргумент широты.

Поскольку для рассматриваемых высот угловая скорость орбитального движения значительно превосходит угловую скорость вращения Земли ($\omega_3/\omega_0 < 0,07$), то в дальнейшем будем пренебрегать квадратом отношения ω_3/ω_0 по сравнению с единицей. Тогда для \vec{V} можно записать

$$\vec{e}_V = \vec{e}_1 \tilde{V} + \vec{e}_2 \varepsilon \cos u, \quad V = \omega_0 R \sqrt{1 - 2 \frac{\omega_3}{\omega_0} \cos i}, \quad (5)$$

где $\tilde{V} = (\omega_0 R - \omega_3 R \cos i)/V$ – постоянная величина, близкая к единице; $\varepsilon = (\omega_3/\omega_0) \sin i$ – малая величина; \vec{e}_1, \vec{e}_2 – орты осей Ox и Oy соответственно.

Из выражений (2) – (5) следует, что аэродинамический момент имеет некоторую постоянную составляющую, которая, как известно [6], приводит к отклонению продольной оси КА от местной вертикали. Вследствие этого, исследование малых колебаний КА приходится проводить не относительно гравитационно устойчивого положения, а относительно «косого» положения КА,

определяемого равенством гравитационного и квазистационарного аэродинамического моментов.

В классических работах [4, 6, 7], посвященных исследованию пространственного движения КА под действием гравитационного и аэродинамического моментов, рассматривались колебания для случая, когда в равновесном положении ССК совпадает с ОСК. Поэтому ранее разработанные методики исследования малых колебаний КА в рассматриваемом случае требуют своего развития. Дело в том, что использование уравнений Эйлера для исследования колебаний относительно «косого» положения приводит к крайне громоздким выражениям. Это связано с зависимостью проекций моментов на оси ССК от вращения КА относительно оси симметрии (угла рысканья). Вместе с тем, из выражений (1), (3) видно, что рассматриваемые моменты не влияют на вращение КА относительно оси симметрии и вращение КА относительно этой оси не изменяет моментов. Поэтому удобно ввести следующую полусвязанную систему координат (ПСК) $O\xi\eta\zeta$: ось $O\zeta$ совпадает с осью симметрии КА Oz_c и направлена по \vec{k} , ось $O\xi$ лежит в плоскости орбиты и совпадает с осью Ox' (см. рис. 1), ось $O\eta$ дополняет систему до правой прямоугольной и совпадает с осью Oy'' .

Введенная таким образом ПСК не связана неизменно с твердым телом и не вращается относительно оси Oz_c . Угловые скорости ССК и ПСК относительно ОСК связаны соотношением

$$\vec{\omega}_{CO} = \vec{\omega}_{IO} + \dot{\psi}\vec{k}, \quad (6)$$

где $\vec{\omega}_{CO}$ – вектор угловой скорости вращения ССК относительно ОСК; $\vec{\omega}_{IO}$ – вектор угловой скорости вращения ПСК относительно ОСК.

Матрица перехода от ОСК к ПСК получается из матрицы T_{CI} при $\psi = 0$.

Уравнения движения. Для исследования пространственного движения КА построим уравнения движения в ПСК – в системе координат, жестко связанной с КА. Согласно теореме об изменении кинетического момента [11]

$$\dot{\vec{L}} = \vec{L}' + \vec{\omega}_{PI} \times \vec{L} = \vec{M}, \quad (7)$$

где \vec{L} – вектор кинетического момента; $\vec{\omega}_{PI}$ – угловая скорость ПСК относительно ИСК; \vec{M} – вектор момента внешних сил; точка и штрих означают абсолютную и относительную производную по времени соответственно.

При любом положении осесимметричного КА оси ПСК будут главными центральными, следовательно, вектор кинетического момента \vec{L} можно записать в виде

$$\vec{L} = A(\omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta) + C\omega_\zeta \vec{k},$$

где A – момент инерции КА относительно осей $O\xi$, $O\eta$; C – момент инерции КА относительно оси $O\zeta$; ω_ξ , ω_η , ω_ζ – проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения КА $\vec{\omega}$ на оси ПСК; \vec{e}_ξ , \vec{e}_η , \vec{k} – орты ПСК.

Выше было отмечено, что моменты (1), (3) не влияют на вращение КА относительно оси симметрии, т.е. $\omega_\zeta = \text{const}$. Рассматривая случай, когда те-

ло не закручено относительно оси симметрии в начальный момент времени, примем, что $\omega_\zeta = \text{const} = 0$, тогда $\vec{L} = A(\omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta)$.

Вектор абсолютной угловой скорости вращения тела найдем как сумму вектора $\vec{\omega}_{OI}$ угловой скорости вращения ОСК относительно ИСК и вектора $\vec{\omega}_{CO}$ угловой скорости вращения ССК относительно ОСК. Учитывая (4), можно записать

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{OI} + \vec{\omega}_{IO} + \psi \vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_{II} + \psi \vec{k},$$

где $\vec{\omega}_{OI} = \omega_0 \vec{e}_2$; $\vec{\omega}_{IO} = \dot{\theta} \vec{e}_\xi + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\eta - \dot{\phi} \sin \theta \vec{k}$; $\vec{\omega}_{II} = \vec{\omega}_{IO} + \vec{\omega}_{OI}$.

Тогда проекции абсолютной угловой скорости на оси ПСК имеют вид

$$\omega_\xi = \dot{\theta}, \quad \omega_\eta = (\dot{\phi} + \omega_0) \cos \theta, \quad \omega_\zeta = \dot{\psi} - (\dot{\phi} + \omega_0) \sin \theta.$$

Учитывая, что $\omega_\zeta = 0$, т.е. $\dot{\psi} = (\dot{\phi} + \omega_0) \sin \theta$, можно записать

$$\vec{\omega}_{II} = \dot{\theta} \vec{e}_\xi + (\dot{\phi} + \omega_0) \cos \theta \vec{e}_\eta - (\dot{\phi} + \omega_0) \sin \theta \vec{k}.$$

Подставляя выражения для \vec{L} и $\vec{\omega}_{II}$ в (7), получим уравнения движения КА в проекциях на ПСК

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} + A(\dot{\phi} + \omega_0)^2 \sin \theta \cos \theta = M_{II1}, \\ A[\ddot{\phi} \cos \theta - 2(\dot{\phi} + \omega_0)\dot{\theta} \sin \theta] = M_{II2}, \end{cases} \quad (8)$$

где M_{II1} , M_{II2} – проекции внешних моментов на оси ПСК.

Проекции гравитационного момента (1) на оси ПСК имеют вид

$$\begin{aligned} M_{II1}^g &= 3\omega_0^2(C - A)\cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta, \\ M_{II2}^g &= 3\omega_0^2(C - A)\cos \varphi \sin \varphi \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Проекции аэродинамического момента (2) имеют вид

$$\begin{aligned} M_{II1}^a &= a_0(1 + \sigma_a \cos \beta) b_{m1} q, \\ M_{II2}^a &= a_0(1 + \sigma_a \cos \beta) b_{m2} q, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\cos \beta = \tilde{V} \sin \varphi \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \cos u$; b_{m1} , b_{m2} – проекции \vec{b}_m на соответствующие оси ПСК; $b_{m1} = -\frac{\tilde{V} \sin \varphi \sin \theta + \varepsilon \cos \theta \cos u}{\sin \beta}$; $b_{m2} = \frac{\tilde{V} \cos \varphi}{\sin \beta}$.

Подставляя (9), (10) в (8), получим уравнения движения осесимметричного КА относительно центра масс на кеплеровой круговой орбите

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} + A(\dot{\phi} + \omega_0)^2 \sin \theta \cos \theta = 3\omega_0^2(C - A)\cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta + \\ + a_0(1 + \sigma_a(\tilde{V} \sin \varphi \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \cos u)) b_{m1} q, \\ A[\ddot{\phi} \cos \theta - 2(\dot{\phi} + \omega_0)\dot{\theta} \sin \theta] = 3\omega_0^2(C - A)\cos \varphi \sin \varphi \cos \theta + \\ + a_0(1 + \sigma_a(\tilde{V} \sin \varphi \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \cos u)) b_{m2} q. \end{cases} \quad (11)$$

Добавляя к (11) уравнение, описывающее изменение угла ψ ($\dot{\psi} = (\dot{\varphi} + \omega_0) \sin \theta$), получим систему, определяющую ориентацию КА.

Квазистатическое решение. Движение спутника в режиме гравитационной стабилизации будем рассматривать как колебания относительно некоторого косоного положения продольной оси КА, смещенного относительно местной вертикали, т.е.

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(t), \quad \theta = \theta_0 + \tilde{\theta}(t),$$

где φ_0, θ_0 определяют косоное положение оси симметрии КА относительно местной вертикали; $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\theta}(t)$ описывают колебания относительно φ_0, θ_0 .

Косоное положение КА определяется равенством гравитационного и квазистационарного аэродинамического моментов. Пренебрегая периодическими составляющими в (11), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{2} A \omega_0^2 \sin 2\theta_0 = \frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) \cos^2 \varphi_0 \sin 2\theta_0 - \\ - a_0 \left(1 + \sigma_a \tilde{V} \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \right) \frac{\tilde{V} \sin \varphi_0 \sin \theta_0}{\sqrt{1 - \tilde{V}^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \theta_0}} \frac{b_0 V^2}{2}, \\ 0 = 3 \omega_0^2 (C - A) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \theta_0 + \\ + a_0 \left(1 + \sigma_a \tilde{V} \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \right) \frac{\tilde{V} \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - \tilde{V}^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \theta_0}} \frac{b_0 V^2}{2}. \end{cases} \quad (12)$$

Из первого уравнения (12) видно, что одним из его решений является $\theta_0 = 0$. Поскольку для режима гравитационной стабилизации предпочтительно, чтобы продольная ось КА была как можно ближе к местной вертикали, то задача о нахождении каких-либо других положений равновесия $\theta_0 \neq 0$ в данном случае не представляет интереса.

Поскольку $\theta_0 = 0$ и $1 - \tilde{V}^2 \sin^2 \varphi_0 \approx \tilde{V}^2 \cos^2 \varphi_0$ (с точностью до ε^2), второе уравнение (12) для определения φ_0 принимает вид

$$\cos \varphi_0 \sin \varphi_0 = s \left(1 + \sigma_a \tilde{V} \sin \varphi_0 \right), \quad (13)$$

где $s = \frac{\lambda H}{6I}$ – безразмерный коэффициент; $\lambda = \frac{a_0}{A}$ – величина, характеризующая отношение между аэродинамическими и инерционными свойствами КА; $H = b_0 V^2 / \omega_0^2$ – усредненный скоростной напор на орбите, $I = 1 - C/A$. Величины s, λ, H, I и σ_a были рассмотрены в [1], где дана их характеристика. Там же рассмотрена их зависимость от конструкции КА и высоты орбиты, определен диапазон изменения этих параметров для рассматриваемого типа КА с ГСС: $|s| < 0,37$; $\lambda \leq 0,01$ м/кг; $0,4$ кг/м $\leq H \leq 110$ кг/м; $I \in [0,5, 1)$; $\sigma_a \leq 0,5$.

Уравнение (13) отличается лишь наличием множителя \tilde{V} от выражения для определения φ_0 , полученного при исследовании движения КА в плоско-

сти круговых орбит [1]. Поскольку $\tilde{V} \approx 1$, то наличие этого коэффициента не изменит ранее сделанных качественных выводов относительно φ_0 . В [1] проведен анализ уравнения, аналогичного (13), и показано, что угол отклонения продольной оси КА от местной вертикали может составлять более 30° . Это объясняется широтой рассматриваемого диапазона изменения параметров, в первую очередь диапазона изменения плотности атмосферы (параметра H).

В дальнейшем, аналогично [1], будем предполагать, что параметры КА и плотности атмосферы таковы, что $|\varphi_0|$ не превышает единиц градусов ($|\varphi_0| \leq 6^\circ$ при $|s| < 0,1$). Это предположение означает, что для достижения гравитационной стабилизации движения КА его конструкция должна соответствовать ожидаемой средней плотности атмосферы.

Уравнения малых колебаний. Предположим, что колебания вне плоскости орбиты имеют порядок ε (движение вне плоскости орбиты вызвано вращением атмосферы), тогда $\varepsilon \tilde{\theta} \sim \varepsilon^2$ и этими членами можно пренебречь. Линеаризуя уравнения (11) возле положения равновесия φ_0 , $\theta_0 = 0$ и переходя к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, для уравнений малых колебаний КА получим порядок ошибок

$$\begin{cases} \tilde{\theta}'' + (k_\theta^2 + \delta_\theta \tilde{\rho}) \tilde{\theta} = -\varepsilon \cos u (1 + \tilde{\rho}) (c_1 + c_2 \tilde{\varphi}), \\ \tilde{\varphi}'' + (k_\varphi^2 - \delta_\varphi \tilde{\rho}) \tilde{\varphi} = d_\varphi \tilde{\rho}, \end{cases} \quad (14)$$

где $k_\theta^2 = 1 + 3I \cos^2 \varphi_0 + \delta_\theta$; $\delta_\theta = d_\varphi \operatorname{tg} \varphi_0$; $c_1 = \frac{d_\varphi}{\tilde{V} \cos \varphi_0}$; $c_2 = c_1 \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\delta_\varphi \tilde{V}}{\cos \varphi_0}$;
 $k_\varphi^2 = 3I (\cos 2\varphi_0 - s \sigma_a \tilde{V} \cos \varphi_0)$; $\delta_\varphi = 3I s \sigma_a \tilde{V} \cos \varphi_0$; $d_\varphi = 3I s (1 + \sigma_a \tilde{V} \sin \varphi_0)$.

Система (14) представляет собой систему уравнений с переменными коэффициентами и переменной правой частью (уравнения типа Хилла). Из (14) видно, что колебания в плоскости орбиты не зависят от поперечных колебаний КА. Уравнение для $\tilde{\varphi}$ аналогично уравнению малых колебаний КА, полученному при исследовании движения КА в плоскости круговых орбит [1]. Отличия заключаются лишь в наличии множителя \tilde{V} (близкого к единице) при коэффициенте σ_a . В [1] показано, что при удаленности системы от резонансов колебания в плоскости орбиты с большой точностью описываются следующей зависимостью

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} = & \tilde{\varphi}^0 \cos k_\varphi \tau + \frac{\tilde{\varphi}'^0}{k_\varphi} \sin k_\varphi \tau + \\ & + \sum_{O=1}^3 A_O \left[\frac{O}{k_\varphi} \sin k_\varphi \tau \sin f_O - \cos k_\varphi \tau \cos f_O + \cos(O\tau + f_O) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{\varphi}^0$, $\tilde{\varphi}'^0$ – начальные условия; $A_O = d_\varphi \bar{b}_O / (k_\varphi^2 - O^2)$ – амплитуда вынужденных колебаний с частотой O .

Подставляя решение (15) в первое уравнение (14), получаем уравнение, описывающее поперечные колебания КА.

Численное интегрирование систем (11), (14) показало, что для малых колебаний $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$ при отсутствии резонансов решения этих систем хорошо совпадают. Колебания вне плоскости орбиты, действительно малы и могут составлять всего лишь десятые доли градуса.

На рисунке 2 представлено сравнение численных решений систем (11) и (14) (кривые 1 и 2 соответственно). Расчеты проводились для КА с параметрами, близкими к параметрам КА «Сич-1М», движущегося по полярной орбите на высоте 600 км при высокой солнечной активности (для φ представлено решение (15) – кривая 3). Как видно из рисунков, при отсутствии резонансов отличия между решениями (11) и (14) пренебрежимо малы.

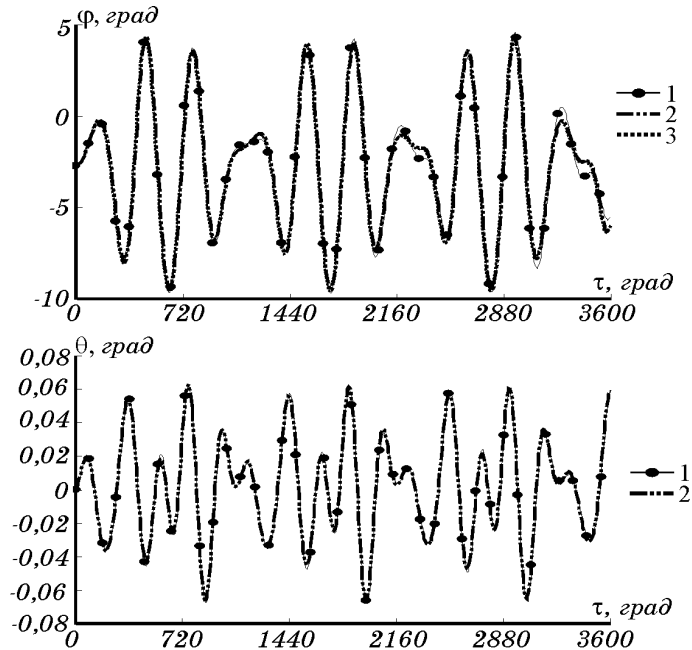


Рис. 2

Частоты и резонансы. В [1] показано, что приведенная частота колебаний КА в плоскости орбиты изменяется в диапазоне $1,17 \leq k_\varphi \leq 1,76$ и что в системе возможен параметрический резонанс, когда $2k_\varphi \approx 3$. Такой резонанс обусловлен переменностью плотности атмосферы и переменностью аэродинамического момента при изменении ориентации КА. Рассмотрим возможность возникновения резонансов в поперечных колебаниях, обусловленных переменностью аэродинамического момента.

Оценки диапазона возможных изменений частоты свободных колебаний k_θ показали, что для $0,5 \leq I < 1$, $\sigma_a \leq 0,5$ и $s \leq 0,1$ выполняется условие $2,455 \leq k_\theta^2 \leq 4,017$, тогда $1,567 \leq k_\theta \leq 2,004$.

С учетом того, что $\tilde{\varphi}$ содержит гармоники с частотами $\{k_\varphi, O\}$, где $O = 1, 2, 3$, правая часть уравнения для $\tilde{\theta}$ будет содержать гармоники с частотами $\eta = \{k_\varphi, |k_\varphi \pm m|, O\}$, где $m = 1, 2, 3, 4$; $O = 1, \dots, 7$. Так как $1,17 \leq k_\varphi \leq 1,76$ и $1,567 \leq k_\theta \leq 2,004$, то теоретически возможны два линейных резонанса, когда $k_\theta = k_\varphi$ и $k_\theta = 2$. Однако, отбрасывая малые величины, легко

видеть, что для одних и тех же КА и орбиты k_θ и k_φ не могут принимать одинаковых значений, так как $k_\varphi^2 = 3I \cos^2 \varphi_0 + \delta_\varphi$, а $k_\theta^2 = 1 + 3I \cos^2 \varphi_0 + \delta_\theta$, где $\delta_\varphi = -3I(\sin^2 \varphi_0 + s\sigma_a \tilde{V} \cos \varphi_0)$, δ_θ – малые величины. Более того, для рассматриваемого случая частоты собственных колебаний в плоскости орбиты и перпендикулярных плоскости орбиты не образуют резонансных соотношений низкого порядка [10].

Таким образом, в колебаниях КА возможен линейный резонанс только при $k_\theta = 2$. Этот резонанс обусловлен совместным влиянием вращения атмосферы и переменности плотности атмосферы при движении КА по орбите. Условие резонанса имеет вид $I \cos^2 \varphi_0 = 1 - \delta_\theta/3$ и может выполняться только при $I \approx 1$, что соответствует случаю, когда соотношение моментов инерции КА близко к соотношению моментов инерции гантели ($C/A \ll 1$). Отметим, что возможность возникновения такого резонанса была обнаружена при исследовании динамики космических тросовых систем [12], для которых всегда выполняется условие $I \approx 1$. Было показано, что совместное влияние вращения атмосферы и переменности плотности атмосферы при движении КА по орбите может приводить к возникновению колебаний с большой амплитудой [12, 13].

Амплитуда колебаний в плоскости орбиты может значительно превосходить амплитуду поперечных колебаний. Поэтому для исследований эффектов подкачки энергии в поперечные колебания корректно будет рассмотреть уравнение поперечных колебаний, в котором более полно учтена их связь с колебаниями в плоскости орбиты

$$\tilde{\theta}'' + [k_\theta^2 + \delta_\theta \tilde{\rho} + 2\tilde{\varphi}' + (c_3 + c_4 \tilde{\rho}) \tilde{\varphi}] \tilde{\theta} = -\varepsilon \cos u (1 + \tilde{\rho}) [c_1 + c_2 \tilde{\varphi}], \quad (16)$$

где $c_3 = d_\varphi \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg} \varphi_0 \right) + \delta_\varphi \operatorname{tg} \varphi_0$, $c_4 = \frac{d_\varphi}{\cos^2 \varphi_0} + \delta_\varphi \operatorname{tg} \varphi_0$.

Частично линеаризованное уравнение (16) содержит малые величины $\tilde{\varphi}' \tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi} \tilde{\theta}$ – «перевязку» между колебаниями в плоскости орбиты и поперечными колебаниями КА, и позволяет оценить влияние колебаний в плоскости орбиты на возможность возникновения резонансов. Уравнение (16) позволяет более широко, по сравнению с первым уравнением (14), исследовать возможность возникновения параметрических резонансов, так как содержит дополнительные частоты изменения параметра при $\tilde{\theta}$. Спектр частот изменения параметра для первого уравнения (14) имеет вид $\eta_\theta = \{O\}$, где $O = 1, 2, 3$, в то время как спектр изменения параметра уравнения (16) – $\eta_\theta = \{k_\varphi; k_\varphi \pm m; O\}$, где $m = 1, 2, 3$; $O = 1, \dots, 6$.

Как известно, при соотношениях частот $k_\theta/\eta_\theta = 0,5; 1; 1,5; \dots$ в уравнениях типа (16) будут наблюдаться параметрические резонансы [14, 15]. Рассматривая усеченный спектр частот $\eta_\theta = \{O\}$, $O = 1, 2, 3$, получим, что возможен только один параметрический резонанс при $k_\theta \approx 2$ ($k_\theta/\eta_\theta \approx 1$). Это рассмотренный выше случай линейного резонанса.

При рассмотрении более полного спектра частот $\eta_\theta = \{k_\varphi; k_\varphi \pm m; O\}$, где $m = 1, 2, 3$; $O = 1, \dots, 6$, обнаруживается целое множество соотношений

частот, при которых возможен параметрический резонанс. На рисунке 3 для $\delta k_\theta = 0$ и $\delta k_\varphi = 0$ при $\varphi_0 = 0^\circ$, показаны возможные значения соотношения частот k_θ/η_θ при изменении отношения моментов инерции КА I . На рисунке представлены только такие соотношения, при которых $k_\theta/\eta_\theta \leq 1,5$, так как при более высоких значениях соотношений частот (возможен случай $k_\theta/\eta_\theta = 7$) эффекты параметрических резонансов практически не наблюдаются.

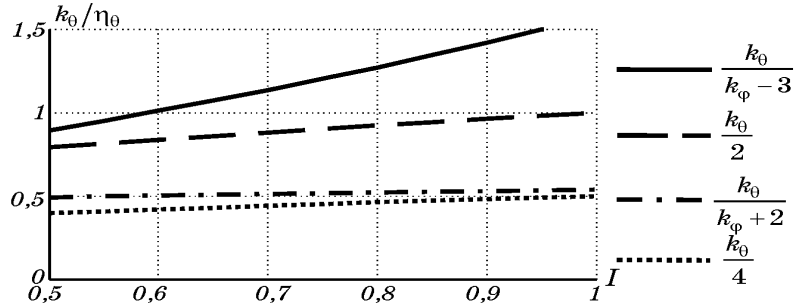


Рис. 3

Из рисунка видно, что возможны параметрические резонансы, связанные с колебаниями КА в плоскости орбиты (когда резонансные соотношения частот содержат k_φ). Наиболее сильное влияние на движение могут оказывать параметрический резонанс $k_\theta/4 \approx 0,5$ и резонанс $k_\theta/(k_\varphi + 2) \approx 0,5$. Резонанс $k_\theta/4 \approx 0,5$ возможен при $k_\theta \approx 2$, т.е. при близости системы к линейному резонансу. Параметрический резонанс $k_\theta/(k_\varphi + 2) \approx 0,5$ может наблюдаться практически при любом соотношении моментов инерции I . Как видно из рисунка, даже при принятых упрощениях, кривая для $k_\theta/(k_\varphi + 2)$ очень близка к 0,5 на всем диапазоне изменения I .

Отметим, что возможные параметрические резонансы обусловлены совместным влиянием на движение КА переменности коэффициента аэродинамического момента и изменений плотности атмосферы на орбите. Аналитические [16] и численные исследования показали, что для широкого класса КА области этих резонансов очень узки, а эффекты подкачки энергии крайне незначительны. Вообще говоря, возможность существования резонансных режимов движения и их эффектов необходимо исследовать для каждого конкретного случая.

Поперечные колебания КА в нерезонансных случаях. Следуя методике, изложенной в [1], уравнение поперечных колебаний в первом приближении по малым параметрам можно записать в виде

$$\ddot{\tilde{\theta}} + k_\theta^2 \tilde{\theta} = -\frac{\varepsilon C_1}{2} [C_1 \cos(\tau + \gamma_1) + C_2 \cos(2\tau + \gamma_2)],$$

$$\text{где } C_1 = \sqrt{4 + (\bar{b}_2)^2 + 4\bar{b}_2 \cos(u_0 - \tilde{f}_2)}; \quad C_2 = \sqrt{(\bar{b}_1)^2 + (\bar{b}_3)^2 + 2\bar{b}_1\bar{b}_3 \cos(u_0 + f_1 - \tilde{f}_3)};$$

$$\text{tg}\gamma_1 = \frac{2\sin(u_0) + \bar{b}_2 \sin(\tilde{f}_2)}{2\cos(u_0) + \bar{b}_2 \cos(\tilde{f}_2)}; \quad \text{tg}\gamma_2 = \frac{\bar{b}_1 \sin(f_1 + u_0) + \bar{b}_3 \sin(\tilde{f}_3)}{\bar{b}_1 \cos(f_1 + u_0) + \bar{b}_3 \cos(\tilde{f}_3)}; \quad \tilde{f}_i = f_i - u_0,$$

$i = 2, 3$; u_0 – значение аргумента широты в начальный момент времени $\tau = 0$.

Решение данного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} = & \theta^0 \cos k_0 \tau + \frac{\theta'^0}{k_0} \sin k_0 \tau + \\ & + \sum_{n=1}^2 B_n \left(\cos k_0 \tau \cos \gamma_n - \frac{n}{k_0} \sin k_0 \tau \sin \gamma_n - \cos(n\tau + \gamma_n) \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где θ^0, θ'^0 – начальные условия; $B_0 = \frac{\varepsilon c_1 C_0}{2(k_0^2 - O^2)}$ – амплитуда вынужденных колебаний с частотой O .

Численное сравнение решения системы (11) с решением (16) показывает хорошую точность аналитического решения. На рисунке 4 представлено изменение угла θ (кривая 1 – расчет по (11), кривая 2 – решение (16)) для КА с параметрами, близкими к КА «Сич-1М», который движется по полярной орбите на высоте 550 км в условиях высокой солнечной активности.

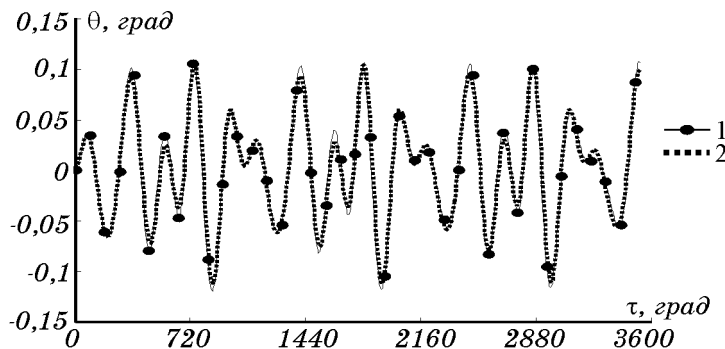


Рис. 4

Из решения (17) видно, что в нерезонансных случаях амплитуда поперечных колебаний значительно меньше амплитуды колебаний в плоскости орбиты. Для рассматриваемого случая изменений параметров системы приведенная динамическая жесткость системы для орбитальной частоты находится приблизительно в диапазоне от 1,5 до 3,1, т.е. амплитуда вынужденных поперечных колебаний КА с орбитальной частотой всегда будет меньше амплитуды возмущающего приведенного аэродинамического момента с данной частотой. Амплитуда колебаний с удвоенной частотой может меняться на порядки, так как при $k_0 = 2$ динамическая жесткость системы равна нулю и наблюдаются линейный и параметрический резонансы.

Выводы. Рассмотрено влияние переменности аэродинамического момента на пространственное движение осесимметричного КА относительно центра масс. Предложена методика построения уравнений движения в форме, удобной для проведения их последующей линеаризации.

Построены уравнения малых колебаний КА относительно косоугольного положения продольной оси КА, определяемого равенством гравитационного и квазистационарного аэродинамического моментов. Показано, что малые колебания в плоскости орбиты не зависят от поперечных колебаний и описываются уравнением, с высокой точностью совпадающим с уравнением малых колебаний, полученным ранее при исследовании движения КА в плоскости орбиты [1]. Показано, что поперечные колебания КА, так же как и колебания

в плоскости орбиты, описываются уравнением типа Хилла с периодической правой частью.

Проведен анализ возможности возникновения резонансов в движении КА с ГСС и показано, что в поперечных колебаниях КА возможны линейный и параметрический резонансы при $k_0 = 2$, обусловленные совместным влиянием вращения атмосферы и переменности плотности атмосферы при движении КА по орбите. Такой резонанс возможен при $I \approx 1$, что соответствует случаю, когда соотношение моментов инерции КА близко к соотношению моментов инерции гантели. Показано, что в поперечных колебаниях КА возможно возникновение параметрических резонансов, связанных с колебаниями КА в плоскости орбиты.

Построено приближенное аналитическое решение уравнения малых поперечных колебаний в нерезонансном случае. Показано, что в нерезонансных случаях амплитуда поперечных колебаний КА значительно меньше амплитуды колебаний в плоскости орбиты.

1. *Маслова А. И.* Влияние переменности аэродинамического момента на динамику гравитационно-стабилизированного КА в плоскости круговой орбиты / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // *Техническая механика*. – 2009. – № 3. – С. 87 – 97.
2. *Маслова А. И.* Влияние переменности аэродинамического момента на динамику гравитационно-стабилизированного КА в плоскости слабоэллиптической орбиты / *А. И. Маслова* // *Техническая механика*. – 2009. – № 4. – С. 68 – 76.
3. *Ковтуненко В. М.* Аэродинамика орбитальных космических аппаратов / *В. М. Ковтуненко, В. Ф. Камеко, Э. П. Яскевич*. – Киев : Наукова думка, 1977. – 156 с.
4. *Сарычев В. А.* Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника / *В. А. Сарычев, В. В. Сазонов* // *Космические исследования*. – 1982. – Т. 20, № 5. – С. 659 – 673.
5. *Сазонов В. В.* Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника / *В. В. Сазонов* // *Космические исследования*. – 1989. – Т. 27, № 6. – С. 836 – 848.
6. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс / *В. В. Белецкий*. – М. : Наука, 1965. – 416 с.
7. *Сарычев В. А.* Влияние сопротивления атмосферы на систему гравитационной стабилизации искусственных спутников Земли / *В. А. Сарычев* // *Космические исследования*. – 1964. – Т. 2, № 1. – С. 23 – 32.
8. *Маслова А. И.* Аппроксимация момента аэродинамических сил, действующих на космический аппарат с гравитационной системой стабилизации / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // *Техническая механика*. – 2008. – 1. – С. 9 – 20.
9. *Маслова А. И.* Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // *Космічна наука і технологія*. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 13 – 18.
10. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / *В. В. Белецкий*. – М. : Издательство Московского университета, 1975. – 308 с.
11. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 1. Кинематика, статика, динамика. – М. : Наука, 1972. – 456 с.
12. *Белецкий В. В.* Динамика космических тросовых систем / *В. В. Белецкий, Е. М. Левин*. – М. : Наука, 1990. – 329 с.
13. *Kokubun K.* Resonated libration of tethered subsatellite by atmospheric density variation / *K. Kokubun* // *Journal of guidance, control and dynamics*. – 1999. – Vol. 22, № 6. – P. 910 – 911.
14. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний / *Я. Г. Пановко*. – М. : Наука, 1991. – 256 с.
15. *Якубович В. А.* Параметрический резонанс в линейных системах / *В. А. Якубович, В. М. Старжинский*. – М. : Наука, 1987. – 328 с.
16. *Маслова А. И.* Параметрический резонанс в колебаниях КА при воздействии переменного аэродинамического момента / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // *Механика твердого тела*. – 2010 (в печати).

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 21.04.10,
в окончательном варианте 11.05.10