УДК 531.44: 625.2.001: 629.2: 629.46.015

М.М. ЖЕЧЕВ

ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЗАКЛИНИВАНИЯ В СИСТЕМАХ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

В некоторых механических системах с кулоновым трением может возникать явление, получившее название “wedging”. Хотя оно известно уже около 40 лет, в настоящее время все еще отсутствуют не только сколь-нибудь стройная развитая теория, но и общепринятое формальное определение данного явления. В данной статье исследованы определения и условия возникновения “wedging” в системах с кулоновым трением. Показана эквивалентность двух различных существующих определений для систем с различным числом фрикционных контактов. Получены наглядные геометрические условия заклинивания для плоских систем с тремя фрикционными контактами и аналитические условия для пространственных систем с произвольным числом фрикционных контактов. Эффективность применения полученных условий проиллюстрирована на различных примерах.

В деяких механічних системах з кулоновим тертям може виникати явище, що отримало назву “wedging”. Хоча воно відомо вже біля 40 років, у нинішній час все ще відсутні не тільки скільки-небудь розвинута теорія, а й загальноприйняте визначення цього явища. У даній статті досліджено визначення й умови виникнення “wedging” в системах з кулоновим тертям. Показано еквівалентність двох різних існуючих визначень для систем з різним числом фрикційних контактів. Отримано наочні геометричні умови заклинювання для плоских систем з трьома фрикційними контактами та аналітичні умови для просторових систем з довільним числом фрикційних контактів. Ефективність застосування отриманих умов проілюстровано на різних прикладах.

In some mechanical systems a phenomenon referred to as wedging can occur. Although this phenomenon has been known as long as about forty years, its generally accepted formal definition is still lacking, to say nothing of its coherent theory. In this paper, definitions of wedging and conditions for its possibility in systems with the Coulomb friction are analyzed. The equivalence of two different definitions of wedging for systems with different numbers of frictional contacts is examined. Clear geometrical wedging conditions for two-dimensional systems with three frictional contacts and analytical wedging conditions for three-dimensional systems with an arbitrary number of frictional contacts are obtained. The efficiency of these conditions is illustrated using various examples.

Введение. В некоторых положениях (конфигурациях) механических систем с кулоновым трением может возникать явление, получившее название “wedging”. Хотя с момента первого упоминания о “wedging” прошло уже около 40 лет (этот момент принято связывать с публикацией [1]), а число публикаций исчисляется многими десятками (см., к примеру, список литературы в [2 – 12]), в настоящее время все еще отсутствует общепринятое формальное определение данного явления, что серьезно тормозит развитие соответствующей теории.

Зачастую вместо определения “wedging” авторы попросту используют свои представления об отдельных свойствах этого явления. К примеру, как отмечается в [13]:

- S. Simunovic понимал под заклиниванием такое статическое явление, при котором "любая возможная активная сила уравновешивается контактными (реактивными) силами" [1];
- P.E. Dupont и S.P. Yamajako говорят о заклинивании как о “статическом явлении, которое возникает, когда реакции связей линейно зависимы” [4];
- J.P. Baartman пишет, что "заклинивание характеризуется таким геометрическим расположением точек контакта, при котором возникающие в результате упругих деформаций реактивные силы могут значительно возрастать по абсолютной величине, оставаясь внутри соответствующих конусов трения" [5];

- M. Callegari и A. Suardi указывают, что "заклинивание является следствием геометрически неточной установки деталей, поэтому оно не может быть устранено изменением активных сил и моментов" [6].

Ясно, что с использованием таких понятий сложно исследовать формальные условия возможности (или невозможности) возникновения данного явления.

В данной статье исследованы определения и условия возникновения “wedging” в системах с кулоновым трением. Показана эквивалентность двух различных существующих определений для систем с различным числом фрикционных контактов. Получены наглядные геометрические условия заклинивания для плоских систем с тремя фрикционными контактами и аналитические условия для пространственных систем с произвольным числом фрикционных контактов. Эффективность применения полученных условий проиллюстрирована на различных примерах.

1. Два определения системы, допускающей заклинивание. Приведенные ниже результаты получены в предположении, что все входящие в систему тела являются абсолютно твердыми. Это предположение, однако, не является критичным и использовано только для простоты изложения. Подобные же результаты можно было бы получить и для деформируемых тел, если только деформации достаточно малы, чтобы можно было пренебречь их влиянием на геометрические и инерционные характеристики системы.

Связи в фрикционных контактах считаются односторонними, а трение – кулоновым. Традиционно (см., к примеру, [1 – 6]) полагается, что силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами реакции, что позволяет использовать при анализе заклинивания уравнения равновесия.

Для таких систем, как показано в [13], можно указать лишь необходимые условия заклинивания. Поэтому в дальнейшем будем говорить не о системах, в которых заклинивание возникает, а о системах, в которых оно при определенных условиях может возникнуть, то есть о системах, допускающих заклинивание.

1.1. Определение I. Одним из наиболее удачных, по-видимому, следует считать понятие wedging как явления, "при котором контактирующие тела могут оставаться в самоподдерживающемся напряженном состоянии даже после прекращения действия внешних сил" ("in which the contacting bodies may remain in a self-sustaining stressed state even when the externally applied forces are removed") [12]. И хотя в общем случае такая формулировка вряд ли может рассматриваться как строгая (поскольку, в принципе, допускает различную трактовку, в частности слов "may remain"), она может быть уточнена так, чтобы рассматриваться как формальное определение.

Если приведенную выше цитату понимать как то, что в отсутствие активных (внешних) сил система может находиться в состоянии покоя не только при нулевых, но и при некоторых ненулевых значениях сил реакции во фрикционных контактах (в пределах соответствующих конусов трения), то понятие wedging из [12] можно привести к следующему определению.

<u>Определение I.</u> Система допускает заклинивание, если в отсутствие активных сил ее равновесие может быть обеспечено не равными одновременно нулю силами реакции.

Примечание 1. Здесь и далее конусы трения рассматриваются без своих границ.

1.2. Определение II. Проведенные в [13, 14] исследования условий равновесия системы peg-in-hole позволили ввести отличное от предыдущего определение системы, допускающей заклинивание. Использование этого понятия сделало возможным строгое обоснование известного условия заклинивания в механических системах с двумя фрикционными контактами, а также формулировку и обоснование условия заклинивания для механических систем с тремя фрикционными контактами. Несколько расширив, это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение II. Система допускает заклинивание, если не существует активных сил, которые бы гарантированно (т.е. независимо от того, какие именно значения сил реакции будут реализованы во фрикционных контактах в пределах соответствующих конусов трения) вывели систему из состояния покоя.

Отметим, что данное определение наиболее близко к упомянутой во введении трактовке заклинивания S. Simunovic.

2. Плоские системы с двумя и тремя фрикционными контактами. Рассмотрим систему, состоящую из абсолютно твердого тела (втулки), контактирующего в двух (рис. 1) или трех (рис. 2) точках с неподвижным основанием. Действующие на систему активные силы приведем к главному вектору F и главному моменту M. Реактивную силу в i-ой точке контакта будем обозначать через R_i, а соответствующий конус трения – через K_i^+.

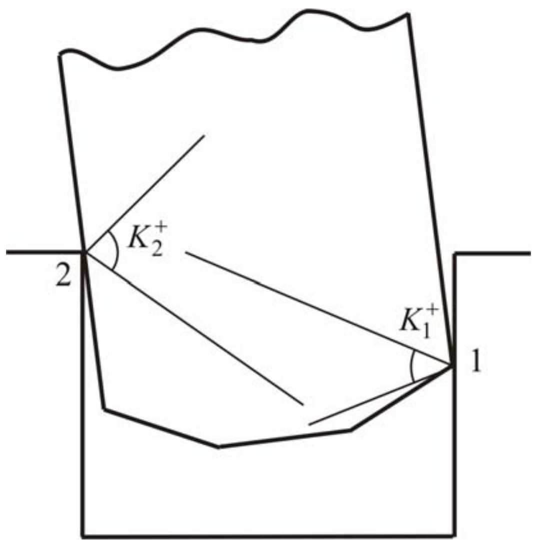

Рис. 1

Для данной системы заклинивание в смысле определения I, очевидно, означает, что в пределах конусов трения существуют не равные одновременно нулю силы реакции, образующие равновесную систему сил.

Покажем эквивалентность определения I и II при двух и трех фрикционных контактах.

2.1. Два фрикционных контакта. Как доказано в [13], система с двумя фрикционными контактами допускает заклинивание в смысле определения II в том и только в том случае, если конусы трения накладываются, то есть если отрезок, соединяющий точки контакта (рис. 3), лежит внутри обоих конусов трения ($1 \in K_2^+$ и $2 \in K_1^+$).

Пусть система допускает заклинивание в смысле определения II. Поскольку в этом случае конуса накладываются, то в пределах конусов трения, очевидно, существуют ненулевые силы реакции $R_i \in K_i^+$, $i=1,2$, образующие равновесную систему сил – это лежащие на указанном отрезке равные по величине и противоположно направленные векторы. Следовательно, система допускает заклинивание также и в смысле определения I.

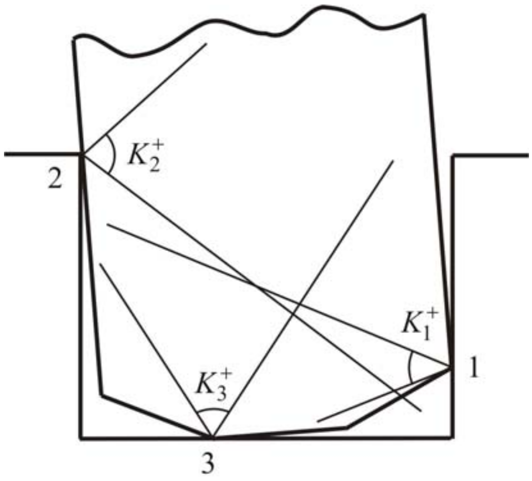

Рис. 2

Предположим теперь, что система допускает заклинивание в смысле определения I. Тогда согласно этому определению существуют ненулевые силы реакции R_1 и R_2, образующие равновесную систему сил. Поскольку две силы образуют равновесную систему сил в том и только в том случае, если они лежат на одной линии, то эти силы реакции лежат на отрезке, соединяющем точки контакта. А поскольку каждая из сил реакции принадлежит своему конусу трения, то есть $R_i \in K_i^+$, $i=1,2$, то каждый конус содержит указанный отрезок, то есть конуса накладываются и, значит, система допускает заклинивание в смысле определения II.

2.2. Три фрикционных контакта. Две плоские фигуры могут иметь 3 контакта только в особых случаях. И только в исключительных случаях количество контактов сохраняется таким же после взаимного перемещения этих тел. Тем не менее, рассматривать плоские системы с 3 фрикционными контактами все же имеет смысл [13]. Во-первых, если система имеет в состоянии покоя 3 контакта, а после начала движения число контактов уменьшается, то для ответа на вопрос о возможности заклинивания в указанном состоянии покоя следует рассматривать систему в исходном состоянии, то есть с 3 фрикционными контактами. А, во-вторых, указанные выше исключительные случаи все-таки могут иметь место.

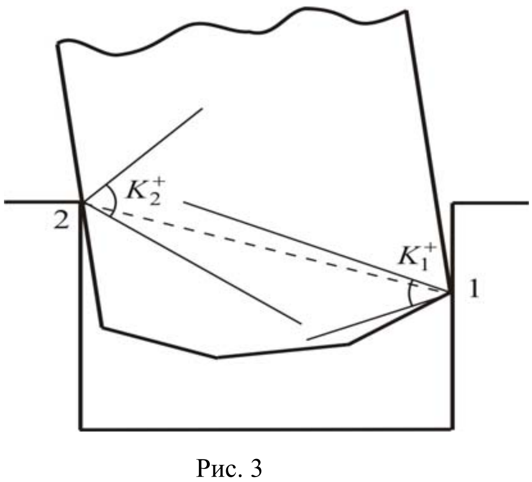

Рис. 3

При наложении любых двух из трех конусов трения система с тремя фрикционными контактами также допускает заклинивание, поскольку равновесие втулки может быть обеспечено реактивными силами в соответствующих двух контактах при нулевой реакции в третьем. Однако системы с тремя фрикционными контактами могут допускать заклинивание и в случае, когда ни одна пара конусов трения не накладывается. Рассмотрим далее именно такой случай.

Заклинивание в смысле определения I означает, что в пределах конусов трения существуют не равные одновременно нулю силы реакции $\overline{R}_i \in K_i^+$, $i = 1, 2, 3$, образующие равновесную систему сил, то есть

$$\sum_{i=1}^{3} M_i = 0\,, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{R}_i = 0\,, \tag{2}$$

где M_i – моменты сил $\overline{R}_i$ относительно некоторой точки.

Покажем, что условия (1), (2) являются необходимыми и достаточными и для того, чтобы система допускала заклинивание в смысле определения II.

Необходимость. Пусть система допускает заклинивание в смысле определения II. Отсутствие активных сил, которые бы гарантированно вывели систему из состояния покоя, означает, что для любых активных сил найдутся уравновешивающие их силы реакции (в пределах своих конусов трения). Поэтому, если к системе в некоторой точке приложена ненулевая активная сила $F^{(1)}$, то найдутся такие не равные одновременно нулю $R_i^{(1)} \in K_i^+$, $i = 1, 2, 3$, что $\sum_{i=1}^{3} R_i^{(1)} = -F^{(1)}$ и $\sum_{i=1}^{3} M_i^{(1)} = 0$, где $M_i^{(1)}$ – момент сил $R_i^{(1)}$ относительно точки приложения силы $F^{(1)}$. А если в той же точке приложена другая ненулевая сила $F^{(2)}$, тогда точно так же найдутся такие не равные одновременно нулю $R_i^{(2)} \in K_i^+$, $i = 1, 2, 3$, что $\sum_{i=1}^{3} R_i^{(2)} = -F^{(2)}$ и $\sum_{i=1}^{3} M_i^{(2)} = 0$, где $M_i^{(2)}$ – момент сил $R_i^{(2)}$ относительно той же точки. Складывая соответствующие равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{3} M_i = 0\,, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{3} R_i = -F^{(1)} - F^{(2)}\,, \tag{4}$$

где $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$, $M_i = M_i^{(1)} + M_i^{(2)}$. Ясно, что силы R_i не равны одновременно нулю. Кроме этого, поскольку $R_i^{(1)} \in K_i^+$ и $R_i^{(2)} \in K_i^+$, то, очевидно, и $R_i \in K_i^+$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Выбирая $F^{(2)} = -F^{(1)}$ и $\overline{R}_i = R_i$, получим из (3), (4) равенства (1), (2), что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть система допускает заклинивание в смысле определения I, то есть пусть выполняются условия (1) и (2). Покажем, что в этом случае для любых активных сил, всегда найдутся уравновешивающие их силы реакции $R_i \in K_i^+$, $i = 1, 2, 3$.

Будем искать эти силы реакции в виде $R_i = k\overline{R}_i + \rho_i$, где $k > 0$ – произвольный коэффициент, а ρ_i – некоторые неизвестные 2- векторы. Для того чтобы главный вектор и главный момент всех действующих на систему сил (и активных, и реактивных), равнялись нулю, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы ρ_i удовлетворяли соотношениям:

$$\begin{gathered} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + F = 0, \\ M_1^\rho + M_2^\rho + M_3^\rho + M = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где M_i^ρ – момент силы ρ_i относительно точки пересечения сил $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$. Соотношения (5) представляют собой 3 скалярных уравнения относительно шести неизвестных проекций векторов ρ_i, и, как несложно видеть, всегда имеют решение. Поэтому всегда найдутся силы реакции R_i, $i = 1, 2, 3$, при которых главный вектор и главный момент всех сил, действующих на систему (и активных, и реактивных), равны нулю. При этом выбором коэффициента k всегда можно добиться, чтобы $R_i \in K_i^+$. Действительно, поскольку при $k \to \infty$ угол между векторами R_i и $\overline{R}_i$ стремится к нулю, а $\overline{R}_i \in K_i^+$, то при достаточно большом k будут выполняться условия $R_i \in K_i^+$, $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, для рассмотренной системы определения I и II эквивалентны.

2.3. Геометрическое условие заклинивания в случае трех фрикционных контактов. Как уже отмечалось, условие заклинивания для систем с двумя фрикционными контактами имеет наглядную геометрическую форму – наложение конусов трения.

В [13] также наглядное геометрическое условие заклинивания было получено для одной конкретной системы peg-in-hole с тремя фрикционными контактами. В данной работе данное условие распространяется на плоские системы peg-in-hole более общего вида.

В силу эквивалентности определений I и II далее в пределах этого пункта термин "система допускает заклинивание" используется без уточнения.

В дальнейшем через K_i^- будем обозначать конус, состоящий из всех векторов из K_i^+, взятых с противоположным знаком, то есть $K_i^- = \left\{-R_i : R_i \in K_i^+\right\}$. Объединение K_i^+ и K_i^- обозначим через K_i, иными словами $K_i = K_i^+ \bigcup K_i^-$.

Как известно, для того чтобы главный момент любых трех сил равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы линии действия всех трех сил пересекались в одной точке. Поэтому для выполнения (1) необходимо и достаточно, чтобы конусы K_i имели непустое пересечение, то есть

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{3} K_i \neq \varnothing. \tag{6}$$

Для одновременного выполнения (1) и (2) необходимо и достаточно, чтобы непустое множество Σ содержало такую точку, что для некоторых проходящих через нее ненулевых векторов $\overline{R}_i \in K_i^+$, $i = 1,2,3$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{R}_i = 0 . \qquad (7)$$

Таким образом, система допускает заклинивание в том и только в том случае, если выполняются условия (6) и (7) [13].

Обозначим через Δ область (без границы), ограниченную сторонами треугольника с вершинами в точках контакта 1, 2 и 3, а через Σ^+ пересечение конусов K_i^+, то есть $\Sigma^+ = \bigcap_{i=1}^{3} K_i^+$ (рис. 4).

Теорема 1. Если втулка представляет собой выпуклое тело и каждый из конусов трения K_i^+, $i = 1, 2, 3$ пересекается с областью Δ, то система допускает заклинивание в том и только в том случае, если

$$\Delta \bigcap \Sigma^+ \neq \varnothing \text{ (см. рис. 4).} \qquad (8)$$

Доказательство. Достаточность данных условий очевидна. Действительно, условие (6) следует из (8), а условие (7) выполняется для любой точки из Δ.

Необходимость. Пусть система допускает заклинивание. Тогда в силу (6) $\Sigma \neq \varnothing$. Выберем произвольную точку α из Σ. Если эта точка принадлежит Δ, то $\Delta \bigcap \Sigma \neq \varnothing$, откуда в силу выпуклости втулки следует (8).

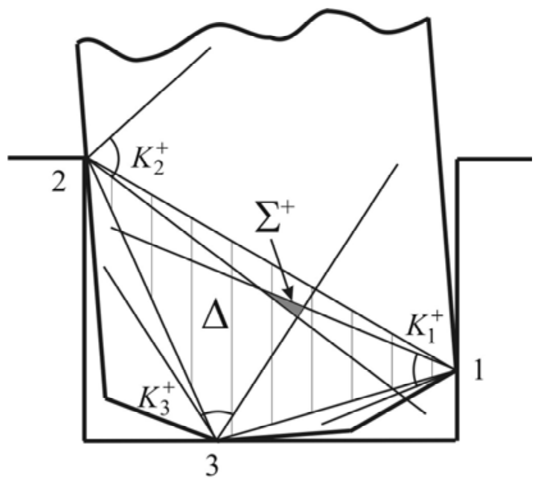

Рис. 4

Рассмотрим подробно случай, когда точка α лежит вне Δ. Нетрудно видеть, что любая точка плоскости обязательно принадлежит либо некоторому углу треугольника Δ, либо некоторому внешнему по отношению к нему углу.

В первом случае (в силу выпуклости втулки) условие (7) может быть удовлетворено только при таких направлениях сил реакции, как это показано на рис. 5 (на этом рисунке α принадлежит углу треугольника Δ с вершиной в точке 1). Это (учитывая, что по условию теоремы каждый конус пересекается с Δ) означает, что точка контакта 1 принадлежит обоим конусам K_2^+ и K_3^+, откуда следует, что все три конуса K_i^+ пересекаются внутри Δ, то есть следует условие (8).

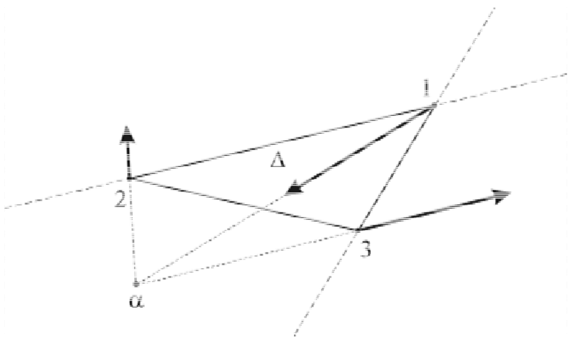

Рис. 5

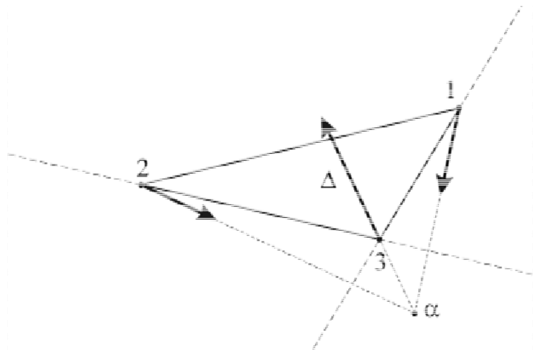

Рис. 6

Во втором случае, приведенном на рис. 6 (на этом рисунке α принадлежит углу, внешнему по отношению к углу треугольника Δ с вершиной в точке 3), рассуждая подобным образом, получим, что точка контакта 3 принадлежит обоим конусам K_1^+ и K_2^+, откуда также следует справедливость условия (8).

Примечание 2. Требование выпуклости втулки является несколько избыточном. Вместо него достаточно было потребовать, чтобы конусы K_i^-, $i = 1, 2, 3$ не пересекались с областью Δ.

3. Системы тел с произвольным числом фрикционных контактов. Исследуем общий случай пространственных систем тел, с произвольным (n) числом фрикционных контактов. Освободимся от связей в фрикционных контактах и рассмотрим получившуюся систему с k степенями свободы. Очевидно, что в этом случае $k > n$.

Введем обозначения:

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ – вектор независимых обобщенных координат системы;

$r_i = r_i(q)$ – радиус-вектор, соединяющий начало инерциальной системы координат с точкой приложения силы реакции в i - ом контакте;

$T = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ – вектор, где R_i – трехмерные векторы сил реакции;

$\Theta(q) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial q} & \dfrac{\partial r_2}{\partial q} & \ldots & \dfrac{\partial r_n}{\partial q} \end{pmatrix}$ – якобиева матрица размера $(k \times 3n)$;

τ – k -вектор обобщенных (активных) сил.

В этих обозначениях уравнение равновесия системы можно представить в виде

$$\Theta T + \tau = 0 . \tag{9}$$

Заклинивание в смысле определения I означает, что при $\tau = 0$ уравнение

(9) имеет нетривиальное решение, то есть, что существует $\bar{T} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_n \end{pmatrix} \neq 0$,

$\bar{R}_i \in K_i^+$, $i = 1,\ldots,n$, удовлетворяющее уравнению $\Theta\bar{T} = 0$.

Заклинивание в смысле определения II означает, что для любого вектора τ найдется вектор T, $R_i \in K_i^+$, $i = 1,\ldots,n$, удовлетворяющий уравнению (9). Отсюда следует, что для того чтобы система допускала заклинивание в смысле определения II, прежде всего необходимо, чтобы уравнения равновесия были совместны при любых обобщенных силах τ. В рассмотренных выше случаях тела с двумя и тремя фрикционными контактами это условие выполнялось. В случае систем нескольких тел это имеет место только в случае, если $\mathrm{rank}\,\Theta = k$. Действительно, если $r = \mathrm{rank}\,\Theta < k$, то найдется $(k-r)\times k$ - матрица B, такая что $B\Theta = 0$, откуда следует, что уравнение (9) совместно только для τ, удовлетворяющих условию $B\tau = 0$. К примеру, $\mathrm{rank}\,\Theta < k$, если в системе есть изолированное тело, не имеющее фрикционных контактов. Ясно, что активные силы, действующие на изолированное тело, не могут быть скомпенсированы силами реакции в фрикционных контактах между другими телами. При сравнении определений исключим такого рода экзотические случаи и будем полагать, что $\mathrm{rank}\,\Theta = k$.

3.1. Эквивалентность определений. Пусть система допускает заклинивание в смысле определения II. Покажем, что в этом случае она допускает заклинивание и в смысле определения I.

Согласно определению II, для любых $\tau = \hat{\tau}$ и $\tau = \breve{\tau}$ найдутся такие ненулевые $\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \\ \vdots \\ \hat{R}_n \end{pmatrix}$, $\hat{R}_i \in K_i^+$ и $\breve{T} = \begin{pmatrix} \breve{R}_1 \\ \breve{R}_2 \\ \vdots \\ \breve{R}_n \end{pmatrix}$, $\breve{R}_i \in K_i^+$, $i = 1,\ldots,n$, что $\Theta\hat{T} + \hat{\tau} = 0$ и $\Theta\breve{T} + \breve{\tau} = 0$. Тогда для очевидно ненулевого вектора $\bar{T} = \hat{T} + \breve{T}$ справедливо (9), где $\tau = \hat{\tau} + \breve{\tau}$. Выбирая $\breve{\tau} = -\hat{\tau}$, получим $\Theta\bar{T} = 0$, где $\bar{R}_i \in K_i^+$, $i = 1,\ldots,n$.

Пусть теперь система допускает заклинивание в смысле определения I, и пусть при этом $\mathrm{rank}\,\Theta = k$. Покажем, что в этом случае она допускает заклинивание и в смысле определения II.

Будем искать R_i, $i = 1,\ldots,n$ в виде: $R_i = k\bar{R}_i + \rho_i$, где $k > 0$. Подставляя это выражение в (9), получим уравнение для определения неизвестных 3-х векторов ρ_i, $i = 1,\ldots,n$

$$\Theta \mathrm{P} + \tau = 0, \text{ где } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Поскольку $\operatorname{rank}\Theta = k$, то уравнение (10) совместно. Выбором достаточно большого k угол между векторами R_i и $\overline{R}_i$, очевидно, можно сделать сколь угодно малым, а поскольку $\overline{R}_i \in K_i^+$, $i = 1,\ldots,n$, то это означает, что при достаточно большом k векторы R_i не только будут удовлетворять уравнению равновесия (9), но и будут лежать внутри своих конусов трения, то есть $R_i \in K_i^+$, $i = 1,\ldots,n$.

3.2. Аналитические условия заклинивания. В разделе 2 были приведены простые *геометрические* условия заклинивания для плоского тела с двумя и тремя фрикционными контактами. Для систем тел вряд ли можно указать подобные условия, однако в некоторых случаях можно привести достаточно простые *аналитические* условия заклинивания.

Далее будем рассматривать системы с фиксированными линиями действия сил трения [15], когда в каждой точке контакта однозначно определено направление не только нормальной силы, но и силы трения, благодаря чему реакция связи R_i в фрикционном контакте однозначно характеризуется двумя скалярными величинами: нормальной силой λ_i и силой кулонова трения $f_i = \mu_i \lambda_i$ (μ_i – коэффициент трения).

Поскольку контактные силы R_i зависят от λ_i и f_i линейно, то заменой переменных уравнение равновесия (9) можно преобразовать к виду

$$\Phi\lambda + \tau = 0\,, \tag{11}$$

где $\Phi = \Phi(\mu)$ – $k \times n$ - матрица, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Как и в предыдущем пункте, будем считать, что $\operatorname{rank}\Theta = k$. Тогда, учитывая, что $k > n$, в общем случае $\operatorname{rank}\Phi = n$. В связи с эквивалентностью определений I и II далее будем говорить только об определении I.

Заклинивание в смысле определения I в этом случае означает, что уравнение (10) имеет при $\tau = 0$ нетривиальное решение, то есть, существует $\lambda \neq 0$, удовлетворяющее при некоторых μ_i: $-\overline{\mu}_i < \mu_i < \overline{\mu}_i$, $i = 1,\ldots,n$ ($\overline{\mu}_i$ – коэффициент трения скольжения) уравнению

$$\Phi(\mu)\lambda = 0\,. \tag{12}$$

Поскольку $k > n$, то уравнение (12), очевидно, может иметь при некотором μ нетривиальное решение λ в том и только в том случае, когда Φ при этих значениях μ является матрицей неполного ранга. То есть, справедлива теорема.

Теорема 2. Чтобы система допускала в положении q заклинивание в смысле определения I, необходимо, чтобы при некоторых μ_i: $-\overline{\mu}_i < \mu_i < \overline{\mu}_i$, $i = 1,\ldots,n$

$$\operatorname{rank}\Phi(\mu) < n\,. \tag{13}$$

Примечание 3. В силу односторонности фрикционных контактов нормальные реакции удовлетворяют условию

$$\lambda_i \geq 0\,,\ i = 1,\ldots,n\,. \tag{14}$$

Поскольку условие (13) не гарантирует, что среди ненулевых решений уравнения (12) найдется решение, удовлетворяющее условию (14), то теорема 2 дает только необходимые условия. Подобное утверждение впервые было приведено в [4]. Однако в [4] отсутствует формальное определение wedging, в связи с чем данное утверждение приведено без должного доказательства, один из вариантов которого был предложен в [16].

Примечание 4. Достаточным условием в случае (13) является наличие ненулевого решения λ уравнения (12), удовлетворяющего (14). В случае, когда все фрикционные контакты двусторонние, условие (14) не обязано выполняться, поэтому в этом случае условие (13) является как необходимым, так и достаточным.

4. Анализ возможности заклинивания в конкретных системах

4.1. Два фрикционных контакта. На рис. 7 приведена простейшая расчетная схема фрикционной системы демпфирования одного из типов трехэлементных тележек грузового вагона (в частности тележки Barber S-2H-D), состоящей из надрессорной балки (НБ) и фрикционных клиньев.

В данной расчетной схеме клинья считаются неподвижными, а трение в фрикционных контактах (1 и 2) – кулоновым с коэффициентами трения скольжения $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$, соответственно.

Как несложно видеть из рисунка, чтобы конусы трения накладывались, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 > \mathrm{tg}(\pi/2-\alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$. К примеру, для тележки Barber S-2H-D $\alpha = 58^\circ$, поэтому фрикционная система демпфирования этой тележки допускает заклинивание, если $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 > \mathrm{ctg}58^\circ \approx 0{,}62$.

4.2. Три фрикционных контакта. Если для остановки грузового вагона дополнительно к штатному торможению (с использованием тормозных коло-

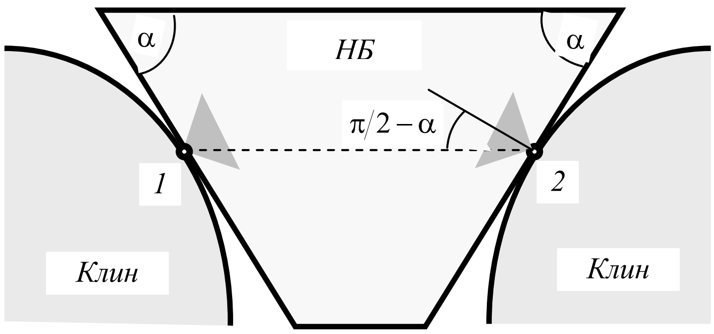

Рис. 7

док) используется также тормозной башмак, то соответствующее колесо вагона имеет три фрикционных контакта (рис. 8). В этом случае система удовлетворяет условиям теоремы 1, то есть допускает заклинивание. Как видно из рис. 8, это возможно даже при малых значениях коэффициента трения скольжения, причем добавление к трем имеющимся каких-либо других фрикционных контактов сохраняет данное свойство.

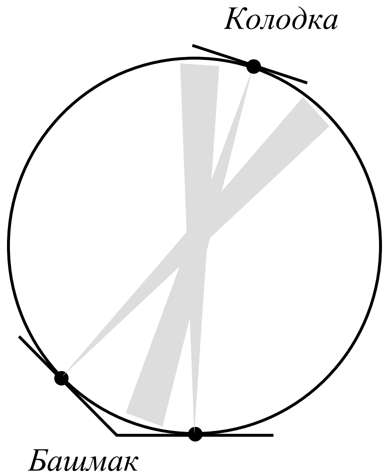

Рис. 8

Примечание 5. Несложно видеть, что при достаточно больших коэффициентах трения скольжения система допускает заклинивание и в отсутствие башмака, т.е. когда в нижней части имеется только один контакт (между колесом и рельсом).

4.3. Четыре фрикционных контакта. На рис. 9 приведена более детальная (по сравнению с п. 4.1) расчетная схема фрикционной системы демпфирования тележки грузового вагона. На этой схеме фрикционные клинья могут перемещаться (с трением) в вертикальном направлении. Исследуем возможность заклинивания в данной системе с помощью теоремы 2.

После освобождения от связей во фрикционных контактах ($n=4$) получим систему с $k=7$ степенями свободы. Составив уравнения равновесия для случая, изображенного на рис. 9, найдем, что с точностью до постоянного множителя матрица $\Phi(\mu)$ может быть представлена в виде

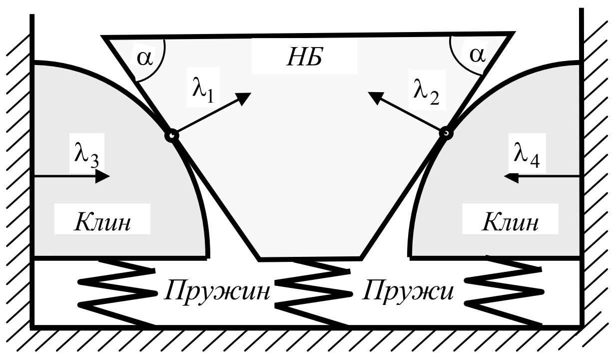

Рис. 9

$$\Phi(\mu)=\begin{pmatrix} \sin\alpha+\mu_1\cos\alpha & -\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha-\mu_1\sin\alpha & \cos\alpha-\mu_2\sin\alpha & 0 & 0 \\ -\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha & 0 & \mu_3 & 0 \\ -\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha+\mu_2\sin\alpha & 0 & \mu_4 \\ 0 & \sin\alpha+\mu_2\cos\alpha & 0 & -1 \\ -\mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко установить, что при $\mu_1=\mu_2=\mathrm{ctg}\alpha$, $\mu_3=\mu_4=0$ и $\lambda=(1,1,\sec\alpha,\sec\alpha)$ справедливо $\Phi(\mu)\lambda=0$. Это означает, что при указанных значениях μ_i $\mathrm{rank}\,\Phi<4$. Отсюда в силу теоремы 2 (с учетом примечания 4) следует, что система допускает заклинивание в смысле определения I (а значит, и в смысле определения II в силу их эквивалентности), если коэффициенты трения скольжения удовлетворяют неравенствам $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 > \mathrm{ctg}\alpha$, $\bar{\mu}_3 = \bar{\mu}_4 > 0$, что очевидно согласуется с результатом п. 4.1.

5 Заключение. В традиционной постановке задачи о заклинивании, когда тела полагаются абсолютно твердыми, а трение – кулоновым, понятие "системы, допускающей заклинивание" может быть определено по-разному. В статье детально рассмотрены два определения, одно из которых характеризует поведение системы с фрикционными контактами при отсутствии активных сил (определение I), а другое – при произвольных активных силах (определение II), и доказана эквивалентность этих определений. Полученные в статье условия заклинивания, как показывают рассмотренные примеры, могут эффективно использоваться при анализе различных технических систем с фрикционными контактами.

1. *Simunovic S. H.* Force information in assembly processes / *S. H. Simunovic* // The 5th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, Illinois : 1975 : the Proceedings. – Chicago, 1975. – P. 415 – 431.
2. *Whitney D. E.* Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts / *D. E. Whitney* // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1982. – № 104. – P. 65 – 77.
3. *Mason M. T.* 23. Assembly. Mechanics of Manipulation [Электронный ресурс] / *M. T. Mason.* – Режим доступа к ресурсу http://www.cs.rpi.edu/ ~ trink/Courses/Robot/Manipulation/lectures/lecture23.pdf.
4. *Dupont P. E.* Jamming and Wedging in Constrained Rigid-body Dynamics / *P. E. Dupont, S. P. Yamajako* // IEEE International Conference on Robotics and Automation, May, 1994, San Diego : the Proceedings. – San Diego, 1994. – P. 2349 – 2354.
5. *Baartman J. P.* Automation of assembly operations on parts [Электронный ресурс] */ J. P. Baartman.* – Режим доступа к ресурсу http://www.wbmt.
6. *Callegari M.* On the force-controlled assembly operations of a new parallel kinematics manipulator / *M. Callegari, A. Suardi* // Mediterranean Conf. on Control and Automation : June 18 – 20, 2003, Rhodes : the Proceedings. – Rhodes, 2003. – IV06 – 02.
7. *Nguyen T. A.* Analysis of dynamic assembly using passive compliance / *Nguyen T., Betemps M. and Jutard* // IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 1995 : the Proceedings. – 1995. – P. 1997 – 2002.
8. *De Meester.* Conditions for initiating the translation of a rigid cylinder in a tube / *De Meester B., Raucent B. and Dumont E.* // Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME. – 1996.– № 118(2). – P. 235 – 242.
9. *Sturges R. H.* Virtual Wedging in Three Dimensional Peg Insertion Tasks / *R. H. Sturges, S. Laowattana* // IEEE / RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems : 1992 : the Proceedings. – American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE, 1992. – V. 48. – P. 49 – 55.
10. *Maeda Y.* Analysis of internal force in robotic contact tasks / *Maeda Y., Aiyama Y. and Arai T.* // Journal of the Japan Society for Precision Engineering. – 2001. – № 67(12). – P. 1996 – 1999.
11. *Xia Y.* Dynamic analysis for peg-in-hole assembly with contact deformation / *Xia Y., Yin Y. and Chen Z.* // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2006. – № 30(1 – 2). – P. 118 – 128.
12. *Barber J. R.* On wedged configurations with Coulomb friction / *Barber J. R. and Hild P.* // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. – 2006. – № 27. – P. 205 – 213.
13. *Zhechev M. M.* Geometrical conditions for wedging in mechanical systems with coulomb friction / *M. M. Zhechev, M. V. Khramova* // Proc. Instn Mech. Engrs, Part C : J. Mechanical Engineering Science. – 2009. – № 223(C5). – P. 1171 – 1179 (доступна на электронном ресурсе http://mzhecheve.web.optima.com.ua).
14. *Zhechev M. M.* Formal definition of wedging and conditions for its possibility in systems with coulomb friction / *Zhechev M. M.* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – № 52. – P. 541 – 547.
15. *Иванов А. П.* Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением / *Иванов А. П.* // Прикладная математика и механика. – 2008. – № 72 (4). – С. 531 – 546.
16. *Скатенок М. В.* Аналитические условия заклинивания в системах с фрикционными контактами / *М. В. Скатенок* // Механика твёрдого тела. – 2005. – № 35. – С. 145 – 153.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 07.05.10,
в окончательном варианте 07.05.10