

АНАЛИЗ ДОСТОВЕРНОСТИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ХАРАКТЕРЕ ИЗМЕНЕНИЯ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

На основе гармонического анализа предложен простой способ оценки достоверности решения граничной обратной задачи. Используется априорная информация о монотонности или выпуклости искомым зависимостей при заданном уровне случайных погрешностей экспериментальных данных.

На основі гармонічного аналізу запропонований простий спосіб оцінювання вірогідності рішення граничної зворотної задачі. Використовується априорна інформація про монотонність або опуклість шуканих залежностей при заданому рівні випадкових погрешностей експериментальних даних.

Based on harmonic analysis, a simple approach to solution reliability estimation for a boundary-value inverse problem is proposed. Use is made of a priori information on the monotony or convexity of the desired functions at a given level of random errors in experimental data.

В практике инженерных и научных исследований нашли широкое применение граничные обратные задачи (ОЗ) для уравнений параболического типа – восстановление условий на границе в процессах нестационарного переноса массы или тепла по результатам измерений характерных параметров в отдельных точках области [1, 2]. Для таких некорректно поставленных задач особое значение приобретает достоверность получаемых решений. В настоящей работе рассматривается простой подход, позволяющий получить оценки допустимых отклонений решений граничных ОЗ по имеющейся априорной информации о качественном поведении искомым функций – монотонность, выпуклость. Такого рода информация имеется, например, для характерных процессов теплообмена с окружающей средой – нагрев, охлаждение тел, описываемые граничными условиями I – III-го рода [3].

Пусть некоторый непрерывный физический процесс описывается простейшей краевой задачей без начальных условий (прямая задача)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1); \quad (1)$$

$$G(\tau, u, u'_x)|_{x=1} = 0; \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

где $G(\tau, u, u'_x)$ – линейная относительно искомой величины $u(x, \tau)$ и ее пространственной производной u'_x и непрерывная по τ функция. При этом решение задачи $u(x, \tau)$ и функция $G(\tau)$ всюду ограничены, откуда следует единственность решения [4].

Пусть в результате наблюдений в граничной точке $x = 0$ получены с некоторой случайной погрешностью, не превышающей ε , значения искомой величины

$$u|_{x=0} \approx f_0(\tau). \quad (4)$$

Рассмотрим ОЗ восстановления величины u и ее производной u'_x в граничной точке $x = 1$ по результатам наблюдений в граничной точке $x = 0$ за физическим процессом (1) – (3). При этом полагаем, что условие (4) получено вдали от начального значения $\tau = 0$ и ОЗ можно рассматривать как задачу без начальных условий. Т.е., математическая постановка граничной ОЗ, соответствующая прямой задаче (1) – (3), включает уравнение (1) для $x \in (0, 1]$ и условия (3), (4) на границе $x = 0$.

Обозначив через $u_T(x, \tau)$ точное решение прямой задачи (1) – (3) и через $u_3(x, \tau)$ – решение граничной ОЗ (1), (3), (4), рассмотрим функцию $v(x, \tau) = u_T(x, \tau) - u_3(x, \tau)$. В силу линейности задач функция v удовлетворяет уравнениям (методическую погрешность решения ОЗ не учитываем)

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1); \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (6)$$

$$v|_{x=0} = \delta_0(\tau) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad (7)$$

где $\delta_0(\tau) = u_T|_{x=0} - f_3(\tau)$ – случайная погрешность наблюдений (4). Т.о., введенная функция $v(x, \tau)$ определяет погрешность восстановления решения прямой задачи $u_T(x, \tau)$ для $x \in (0, 1]$ решением граничной ОЗ $u_3(x, \tau)$.

Известно, что для некорректных по Адамару задач [5], к которым принадлежит и рассматриваемая ОЗ, увеличение частоты возмущений функции $f_3(\tau)$ при неизменном уровне погрешности ε приводит к неограниченному росту ошибки $v(x, \tau)$ восстановления функции $u(x, \tau)$. Практически все методы решения граничных ОЗ основаны на ограничении высокочастотных составляющих экспериментально полученных функций. Из постановки прямой задачи следует [6], что функция $\delta_0(\tau)$ достаточно гладкая. Для ее аппроксимации воспользуемся тригонометрическими многочленами степени n . В этом случае решение задачи (5) – (7) будет представлять собой тригонометрический многочлен той же степени по переменной τ и при $x = 1$. Известное неравенство Бернштейна [7], позволяющее оценить производные тригонометрического многочлена, точно выполняется, когда такой многочлен представляется лишь одним слагаемым с наивысшей гармоникой. Поэтому для получения верхних оценок допустимых изменений искомых величин u и u'_x в граничной точке $x = 1$ при аппроксимации функции $\delta_0(\tau)$ достаточно использовать одну наивысшую гармонику.

Представим случайную погрешность наблюдений (4) в виде

$$\delta_0(\tau) = \varepsilon \cos(2\gamma^2\tau + \beta), \quad (8)$$

где $2\gamma^2$, β – соответственно частота и сдвиг фазы колебаний. Из решения задачи (5) – (8) [4] найдем соответствующие изменения в точке $x = 1$ искомой величины u .

$$\delta_1(\tau) \equiv v(\mathbf{1}, \tau) = \frac{\varepsilon}{2} \left[e^\gamma \cos(2\gamma^2\tau + \beta + \gamma) + e^{-\gamma} \cos(2\gamma^2\tau + \beta - \gamma) \right], \quad (9)$$

и пространственной производной u'_x –

$$\delta_2(\tau) \equiv v'_x(\mathbf{1}, \tau) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \gamma \left[e^\gamma \cos(2\gamma^2\tau + \beta + \pi/4 + \gamma) - e^{-\gamma} \cos(2\gamma^2\tau + \beta + \pi/4 - \gamma) \right]. \quad (10)$$

Параметр β в (8) может принимать произвольные значения из интервала $[-\pi, \pi]$, что моделирует случайную погрешность в локальной точке наблюдений τ .

Очевидно, что наибольшая амплитуда гармонических функций $\delta_1(\tau)$ и $\delta_2(\tau)$ достигается при максимально возможной частоте $2\gamma^*$. Пусть априори известно, что точное решение $u_\tau(\mathbf{1}, \tau)$ (или $u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)$) и найденное $u_3(\mathbf{1}, \tau)$ (или $u'_{x,3}(\mathbf{1}, \tau)$) описываются монотонной или (и) выпуклой функциональной зависимостью от τ . Параметр γ^* определим как наибольший, при котором соответствующее возмущение (8) искомой величины u при $x = 0$ не выводит в точке $x = 1$ функцию $u_3(\mathbf{1}, \tau) + \delta_1(\tau)$ или $u'_{x,3}(\mathbf{1}, \tau) + \delta_2(\tau)$ из соответствующего множества функций. В рамках принятого нами гармонического анализа для этого достаточно выполнения при каждом τ соответствующих условий:

$$\|\delta_1^{(n)}(\tau)\|_C \leq \left| \frac{\partial^n u_3(\mathbf{1}, \tau)}{\partial \tau^n} \right| \quad \text{или} \quad \|\delta_2^{(n)}(\tau)\|_C \leq \left| \frac{\partial^{n+1} u_3(\mathbf{1}, \tau)}{\partial x \partial \tau^n} \right|, \quad n = 1, 2, \quad (11)$$

где верхний индекс (n) обозначает производную n -го порядка по τ ($n=1$ для монотонной и $n=2$ для выпуклой зависимости от τ функций $u_3(\mathbf{1}, \tau)$ или $u'_{x,3}(\mathbf{1}, \tau)$).

Расписывая выражения для соответствующих производных функций (9), (10), оценивая их амплитуды и подставляя в (11), получим соотношения для предельных значений параметра γ^* :

$$\begin{aligned} & 2^{n-1+k/2} \gamma^{2n+k} \left| e^\gamma \cos\left((2-n)\pi/2 - \text{Arctg}\left(\left(\text{cth}^{(1-2k)} \gamma \text{ctg } \gamma \right)^{(3-2n)} \right) - (3-2n)\gamma \right) + \right. \\ & \left. + (1-2k)e^{-\gamma} \cos\left((2-n)\pi/2 - \text{Arctg}\left(\left(\text{cth}^{(1-2k)} \gamma \text{ctg } \gamma \right)^{(3-2n)} \right) + (3-2n)\gamma \right) \right| = \\ & = \left| \frac{\partial^{k+n} u_3(\mathbf{1}, \tau)}{\partial x^k \partial \tau^n} \right| / \varepsilon, \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь параметр n определяет тип априорной информации – $n=1$ для монотонной и $n=2$ для выпуклой функции, а параметр k определяет функцию, для которой используется априорная информация – $k=0$ для $u_3(\mathbf{1}, \tau)$ и $k=1$ для $u'_{x,3}(\mathbf{1}, \tau)$.

Таким образом, имея приближенное решение ОЗ $u_3(x, \tau)$ и зная уровень ε случайных погрешностей наблюдений (4), из соотношения (12) можем определить величину γ^* для каждого значения переменной τ . Зная значение γ^* , из (9), (10) найдем оценки допустимых отклонений решения ОЗ при наличии априорной информации (11):

$$\begin{aligned} \max |u_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - u_3(\mathbf{1}, \tau)| &= \|\delta_1(\tau)\|_C = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left| e^{\gamma^*} \cos(-\text{Arctg}(\text{th } \gamma^* \text{ tg } \gamma^*) + \gamma^*) + e^{-\gamma^*} \cos(\text{Arctg}(\text{th } \gamma^* \text{ tg } \gamma^*) + \gamma^*) \right|, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \max |u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - u'_{x,3}(\mathbf{1}, \tau)| &= \|\delta_2(\tau)\|_C = \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \gamma^* \left| e^{\gamma^*} \cos(-\text{Arctg}(\text{cth } \gamma^* \text{ tg } \gamma^*) + \gamma^*) - e^{-\gamma^*} \cos(\text{Arctg}(\text{cth } \gamma^* \text{ tg } \gamma^*) + \gamma^*) \right|. \end{aligned} \quad (14)$$

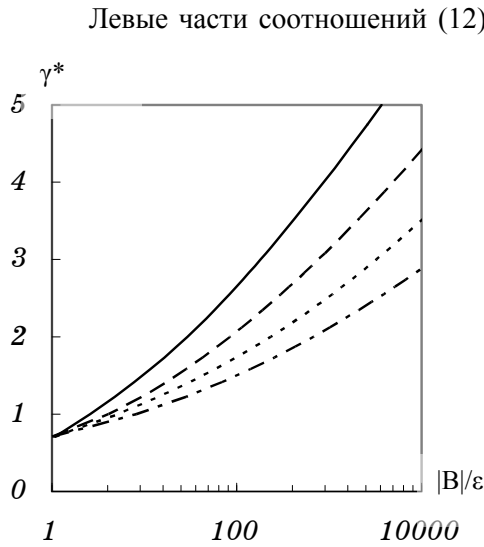


Рис. 1

Левые части соотношений (12) представляют собой гладкие, монотонно возрастающие, выпуклые вниз функции переменной γ ($\gamma > 0$) при всех рассматриваемых значениях параметров k и n , правые же части этих соотношений постоянны для каждого значения переменной τ . Корни нелинейных уравнений (12) эффективно вычисляются методом Ньютона.

На рис. 1 приведены зависимости предельных значений параметра γ^* от значений $|B|$ соответствующих производных функции $u_3(\mathbf{1}, \tau)$, отнесенных к уровню случайных погрешностей наблюдений ε , для априорной информации о монотонности и выпуклости искомой величины $u_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)$ и

производной $u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)$. Сплошная кривая соответствует монотонному изменению по τ функции $u_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - B = \partial u_3(\mathbf{1}, \tau) / \partial \tau$; штриховая кривая – выпуклости по τ функции $u_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - B = \partial^2 u_3(\mathbf{1}, \tau) / \partial \tau^2$; пунктирная кривая – монотонному изменению по τ функции $u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - B = \partial^2 u_3(\mathbf{1}, \tau) / \partial x \partial \tau$; штрихпунктирная кривая – выпуклости по τ функции $u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - B = \partial^3 u_3(\mathbf{1}, \tau) / \partial x \partial \tau^2$.

На рис. 2, 3 представлены зависимости предельных изменений решения граничной ОЗ $u_3(\mathbf{1}, \tau)$ (рис. 2, формула (13)) и $u'_{x,3}(\mathbf{1}, \tau)$ (рис. 3, формула (14)) от значений соответствующих производных функции $u_3(\mathbf{1}, \tau)$, отнесенных к уровню случайных погрешностей наблюдений ε , для априорной информации о монотонности и выпуклости искомой величины $u_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)$ и производной $u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)$. Кривые на рис. 2 и рис. 3 соответствуют обозначениям рис. 1.

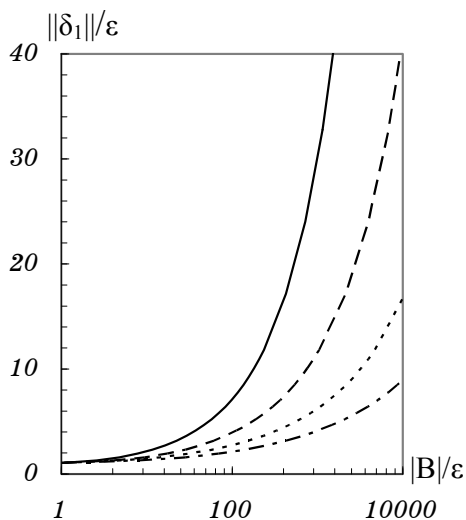


Рис. 2

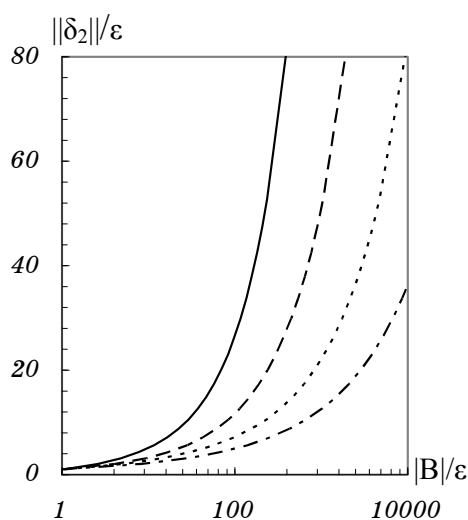


Рис. 3

Анализ показывает, что при $\gamma > 2,5$ с точностью до долей процента вместо соотношений (12) для определения предельно допустимых значений параметра γ^* можно использовать уравнение

$$2^{n-1+k/2} \gamma^{2n+k} e^\gamma = \left| \frac{\partial^{k+n} u_3(\mathbf{1}, \tau)}{\partial x^k \partial \tau^n} \right| / \varepsilon, \quad (n=1, 2; k=0, 1),$$

а оценки погрешности решений ОЗ при допущениях (11) проводить по соотношениям:

$$\max |u_{\tau}(\mathbf{1}, \tau) - u_3(\mathbf{1}, \tau)| = \|\delta_1(\tau)\|_C = \varepsilon \operatorname{ch} \gamma^* ;$$

$$\max |u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau) - u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)| = \|\delta_2(\tau)\|_C = \sqrt{2} \varepsilon \gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* .$$

Для практического применения предлагаемого способа оценки достоверности восстановления искомым зависимостей $u_{\tau}(\mathbf{1}, \tau)$ и $u'_{x,\tau}(\mathbf{1}, \tau)$ по результатам наблюдений (4) требуются оценки значений производных функции $u_3(x, \tau)$ до первого порядка по x и второго порядка по τ (см. соотношение (12)). Такие оценки производных могут быть получены либо простым дифференцированием при аналитическом решении ОЗ [8] или использовании мажорантной (с наиболее "напряженными" граничными условиями) прямой задачи [9], либо методами численного дифференцирования при численном решении ОЗ [2, 8].

Для иллюстрации возможностей предлагаемого способа оценки достоверности результатов решения граничных ОЗ рассмотрим процесс теплопереноса (величины u , u'_x – соответственно безразмерные температура и тепловой поток), описываемый задачей с граничными условиями третьего рода [3] – задача (1)–(3) с нулевым начальным распределением температур $u(x, 0) = 0$ и функцией $G(\tau, u, u'_x) = u'_x(\mathbf{1}, \tau) + 0,4(u(\mathbf{1}, \tau) - 1)$. Такого рода режимы теплообмена широко распространены в теплофизической практике и характеризуются монотонностью и выпуклостью функций изменения во време-

ни температуры $u(1, \tau)$ и теплового потока $u'_x(1, \tau)$. Поэтому соответствующая граничная обратная задача восстановления нестационарной температуры $u(1, \tau)$ и теплового потока $u'_x(1, \tau)$ по результатам измерений температуры (4) может быть дополнена априорной информацией о монотонности и выпуклости искомых функций. При таком определении граничного условия (2) – $G(\tau, u, u'_x)|_{x=1} = 0$ – функции $u(1, \tau)$ и $u'_x(1, \tau)$ оказываются линейно зависимыми. Поэтому ограничимся восстановлением только функции $u(1, \tau)$.

Как правило, получаемые решения граничных ОЗ по "сложности" функциональной зависимости от времени не превосходят искомые (точные) зависимости, поскольку в основе большинства методов их решения заложен принцип "наибольшей гладкости". Поэтому исследование эффективности априорной информации о характере изменения искомых величин при известном уровне случайных погрешностей измерений для рассматриваемого примера проведем полагая, что найденное решение граничной ОЗ совпало с точным – $u_3(1, \tau) = u_T(1, \tau)$, т.е. методическую погрешность решения ОЗ не рассматриваем. Тогда, воспользовавшись точным аналитическим решением задачи [3], нетрудно вычислить значения производных, входящих в правые части уравнений (12), и воспользоваться полученными соотношениями (12), (13) для оценивания допустимых изменений функции $u_3(1, \tau)$ в зависимости от уровня случайных погрешностей измерений температуры (4). Полученные результаты такого оценивания для восстанавливаемой температуры при уровне случайных погрешностей измерений $\varepsilon = 0,01$ и $0,03$ приведены на рис. 4. Поскольку соотношения (12) – (14) получены для задачи без начальных условий, малые времена ($\tau < 0,2$) не рассматривались. Приведенные кривые характеризуют допустимые изменения температуры поверхности $u_3(1, \tau)$ (сплошная кривая) для различных видов априорной информации. Штрихпунктирные

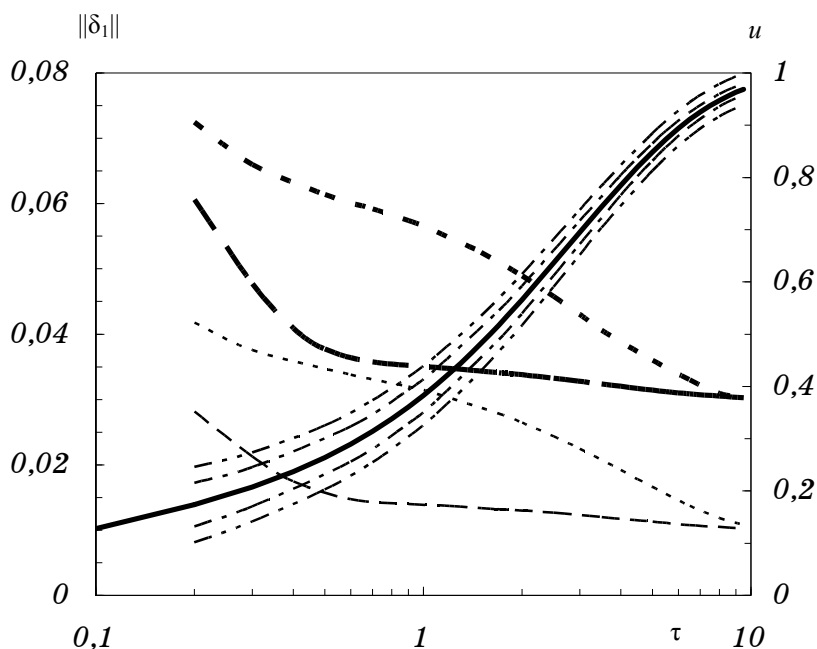


Рис. 4

кривые определяют допустимые коридоры изменения функции $u_3(\mathbf{1}, \tau)$, не выводящие решение прямой задачи в точке $x = \mathbf{0}$ за уровни погрешностей наблюдений $\varepsilon = 0,01$ и $0,03$, для априорной информации о монотонности искомой величины $u_\tau(\mathbf{1}, \tau)$. Пунктирными кривыми показаны допустимые отклонения $\delta_1(\tau)$ решения ОЗ $u_3(\mathbf{1}, \tau)$ при наличии априорной информации о монотонности, штриховыми кривыми – о выпуклости искомой величины $u_\tau(\mathbf{1}, \tau)$. Тонкие линии соответствуют уровню случайных погрешностей наблюдений $\varepsilon = 0,01$, толстые линии – $\varepsilon = 0,03$.

Анализ приведенных на рис. 4 результатов показывает, что использование априорной информации о выпуклости искомой зависимости (штриховые линии) позволяет для рассмотренного примера существенно повысить достоверность решений ОЗ по сравнению с использованием информации о монотонности $u_\tau(\mathbf{1}, \tau)$ (пунктирные линии).

Таким образом, полученные на основе гармонического анализа оценки позволяют при наличии априорной информации о монотонности и (или) выпуклости искомых функций строить допустимый коридор изменения решений граничных ОЗ в зависимости от уровня случайных погрешностей наблюдений. Предложенный способ оценки достоверности результатов решения нетрудно распространить на другие постановки граничных ОЗ для линейных уравнений параболического типа с постоянными и переменными коэффициентами. Полученные результаты могут быть использованы при планировании и интерпретации экспериментальных исследований процессов нестационарного теплопереноса.

1. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – М. : Машиностроение, 1988. – 284 с.
2. Шмукин А. А. Об использовании сплайнов при решении граничных обратных задач теплопроводности / А. А. Шмукин, Н. М. Лазученков // Инж.-физ. журн. – 1978. – 34, № 2. – С. 338 – 343.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
5. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
6. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1967. – 454 с.
7. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
8. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности. / Дж. Бек, Б. Блэкуэлл, Ч. Сент-Клэр. – М. : Мир, 1989. – 312 с.
9. Лазученков Н. М. О влиянии погрешностей экспериментальных данных на результаты решения граничной обратной задачи теплопроводности / Н. М. Лазученков // Гидрогазодинамика и теплообмен летательных аппаратов : Сб. науч. тр. – Киев : Наук. думка, 1988. – С.132 – 137.