

ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОГО ЭКВИВАЛЕНТА РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРУГОГО ПЕРИФЕРИЙНОГО ЭЛЕМЕНТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Получены передаточные функции от силовых воздействий со стороны упругого распределенного периферийного элемента (в виде балки) космического аппарата к координатам сечения заделки балки. Эти передаточные функции могут быть использованы при определении параметров конечномерного механического эквивалента распределенного упругого периферийного элемента на основе принципа динамической эквивалентности. Данный принцип предполагает обеспечение близости характеристик передаточных функций «от усилий к перемещениям» для торцевых поперечных сечений периферийного элемента и его эквивалента.

Отримано передавальні функції від силових дій з боку пружного розподіленого периферійного елемента (у вигляді балки) космічного апарата до координат перетину закладення балки. Ці передавальні функції можуть бути використані при визначенні параметрів скінченновимірної механічної еквівалентності розподіленого пружного периферійного елемента на основі принципу динамічної еквівалентності. Даний принцип припускає забезпечення близькості характеристик передавальних функцій «від зусиль до переміщень» для торцевих поперечних перетинів периферійного елемента і його еквівалента.

Transfer functions of the force influence as viewed from an elastically-distributed peripheral element (as a beam) of space vehicle to the coordinates of the section for sealing the beam are obtained. These transfer functions can be used for the parametric determination of a finite dimensional mechanical equivalent of the distributed elastic peripheral element, based on a dynamic equivalence principle. This principle suggests the proximity of transfer functions characteristics "from efforts to displacements" for faced cross-sections of the peripheral element and its equivalent.

Одним из наиболее широко используемых подходов к построению расчетных схем упруго деформируемых конструкций в инженерной практике является представление распределенных упругих элементов совокупностями абсолютно твердых тел, соединенных сосредоточенными упруго-диссипативными элементами [1, 2]. При таком подходе естественно возникает задача сопоставления расчетных схем с распределенными упругими элементами и расчетных схем с твердотельными элементами. В [3] предложено подбор параметров механического эквивалента распределенного упругого периферийного элемента производить на основе принципа динамической эквивалентности, то есть путем обеспечения близости характеристик передаточных функций «от усилий к перемещениям» для торцевых поперечных сечений примыкающих к космическому аппарату (КА) периферийного элемента и его эквивалента. При таком подходе актуальным является выбор расчетных схем в виде КА с распределенными упругими периферийными элементами и определение соответствующих передаточных функций для таких расчетных схем.

В [4] предложена методика составления дифференциальных уравнений углового движения деформируемых спутников Земли, отличительной особенностью которых является наличие упругих элементов с распределенной массой. При этом рассматривался класс механических систем, расчетная схема которых может быть представлена в виде жесткого центрального тела и присоединенных к нему одной или нескольких упругих балок, консольно заделанных в основное тело. В основу методики положено отдельное изучение движений жесткой и упругой частей рассматриваемой системы. Выделена так называемая обособленная координата спутника, характеризующая угловое положение центрального тела в орбитальной системе координат. Рас-

считались антисимметричные поперечные упругие колебания балок в плоскости орбиты спутника для случая двух идентичных симметрично расположенных консольных упругих балок и их влияние на колебания центрального твердого тела спутника вокруг его центра масс. Получены приближенное описание системы с распределенными параметрами обыкновенными дифференциальными уравнениями и передаточные функции деформируемого спутника как объекта регулирования.

Представленная в [4] расчетная схема при исследовании углового движения деформируемых КА широко использовалась в более поздних работах. Например, в [5], где влияние колебаний упругих элементов с распределенными массами на ориентацию спутника сведено к моментам — известным функциям времени, приложенным к центральному твердому телу спутника. Эта расчетная схема использована также в работе [6], где рассматривается задача стабилизации углового положения спутника, несущего гибкие стержни. В работе [7] при рассмотрении аналогичной расчетной схемы с распределенными параметрами, так же как и в [4], получены приближенное описание рассматриваемой системы обыкновенными дифференциальными уравнениями и передаточные функции деформируемого спутника как объекта регулирования. Похожая расчетная схема применена в работе [8], где рассматриваются задачи управляемости системы, состоящей из вращающегося твердого тела и произвольного числа балок Эйлера – Бернулли.

В [4] уравнения движения получены с использованием принципа освобожденности, когда отбрасываются связи, накладываемые на центральное тело со стороны упругих элементов. Центральное тело рассматривается как свободное, к которому приложены силы и моменты реакций связей. При этом в правые части уравнений движения (в реакции связей) входят упругие координаты, для нахождения которых решается краевая задача с использованием метода разделения переменных. Для получения передаточных функций дифференциальные уравнения движения преобразовываются по Лапласу при нулевых начальных условиях. Передаточные функции в [7] получены преобразованием по Лапласу приближенных путем разложения искомым функций в ряды по некоторой полной системе функций уравнений движения с частными производными, полученных с использованием принципа Гамильтона. При внимательном рассмотрении передаточные функции, полученные в [4] и [7], не совпадают. Так, подстановка исходных данных, приведенных в примере в [7], в соответствующие передаточные функции дает различные результаты. Различие в передаточных функциях объясняется тем, что в [4] было принято допущение о малости влияния обусловленных переносным движением составляющих ускорений элементарных участков упругих элементов на реакции связей. При учете этого влияния в соотношениях, приведенных в [4], различие в передаточных функциях [4] и [7] исчезает.

Расчетную схему, описанную в [4], [7], целесообразно рассматривать в качестве тестовой для подтверждения того или иного способа выбора параметров расчетных схем с твердотельными элементами. Выбор этой расчетной схемы объясняется наглядностью методик получения уравнений движения и сравнительной простотой полученных соотношений.

Определим передаточные функций «от усилий к перемещениям» для торцевого поперечного сечения примыкающего к КА распределенного упругого периферийного элемента, используя соотношения, приведенные в [4].

В [4] при получении уравнений движения введены системы координат, представленные на рисунке 1. Здесь $O_0X_0Y_0Z_0$ – орбитальная система координат, начало которой совпадает с центром масс спутника; ось O_0X_0 направлена по геоцентрическому радиус-вектору центра масс спутника; ось O_0Y_0 направлена по касательной к орбите; ось O_0Z_0 – по бинормали к орбите; O_0XYZ – подвижная система координат, жестко связанная с главными осями инерции основного тела. Для описания колебаний упругих связей введена вспомогательная система O_bxy . Начало O_b этой системы координат располагается в центре сечения заделки упругого элемента (балки); ось O_bx проходит через центр масс системы и центр заделки O_b и в исходном состоянии совпадает с продольной осью недеформированной балки; ось O_by ортогональна оси O_bx и лежит в плоскости O_0XY . ϑ – угловая координата центрального тела.

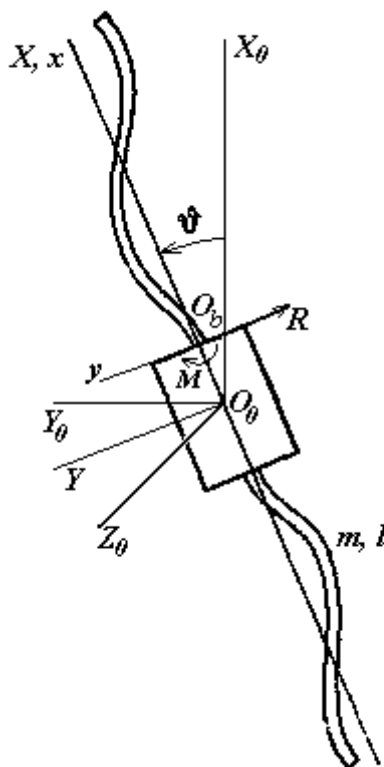


Рис. 1

Для случая антисимметричных поперечных упругих колебаний в плоскости орбиты спутника двух идентичных симметрично расположенных консольных упругих балок уравнение углового движения центрального тела записывается в виде

$$I_0 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_\Sigma + M_C,$$

где I_0 – момент инерции основного тела, M_C – управляющий момент, приложенный к центральному телу. Результирующий момент M_Σ реакций связей относительно центра масс центрального тела с учетом влияния обусловленных переносным движением составляющих ускорений элементарных участков упругих элементов равен

$$M_\Sigma = 2(M + rR), \quad (1)$$

где

$$R = -m \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + (x+r) \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} \right) dx, \quad (2)$$

$$M = -m \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + (x+r) \frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} \right) \cdot x dx, \quad (3)$$

r – расстояние между точками O_0 и O_b ; m – погонная масса балки; $y(x,t)$ – поперечное отклонение элементарного участка упругой балки с координатой x ; l – длина балки.

В правые части соотношений (2), (3) для реакций связей входят упругие координаты $y(x,t)$. Используя решение краевой задачи [4], можно найти приближенное выражение, связывающее упругие координаты $y(x,t)$ и обособленную координату спутника $\vartheta(t)$. С учетом этого выражения реакции связей при нулевых начальных условиях можно записать в виде

$$R = m \sum_{n=1}^N C_n^+ Q_n \left[\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \Omega_n \int_0^t \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} \sin \Omega_n (t - \tau) d\tau \right] - H_{b0} \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}, \quad (4)$$

$$M = m \sum_{n=1}^N C_n^+ P_n \left[\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \Omega_n \int_0^t \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} \sin \Omega_n (t - \tau) d\tau \right] - G_{b0} \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}, \quad (5)$$

$$M_\Sigma = 2m \sum_{n=1}^N C_n^+ M_n \left[\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \Omega_n \int_0^t \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} \sin \Omega_n (t - \tau) d\tau \right] - 2I_{b0} \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}, \quad (6)$$

где

$$Q_n = \int_0^l Y_n dx, \quad P_n = \int_0^l Y_n \cdot x dx, \quad H_{b0} = m \int_0^l (x+r) dx, \quad G_{b0} = m \int_0^l (x+r) \cdot x dx,$$

$$M_n = \int_0^l (x+r) \cdot Y_n dx, \quad C_n^+ = M_n / N_n^2, \quad N_n^2 = \int_0^l Y_n^2 dx, \quad I_{b0} = m \int_0^l (x+r)^2 dx.$$

В соотношениях (4), (5) обозначено: Ω_n , Y_n и N_n – круговая частота, собственная функция и ее норма соответственно для n -го тона колебаний консольной балки; N – число учитываемых тонов колебаний; H_{b0} , G_{b0} , I_{b0} – массо-инерционные характеристики балки, в частности I_{b0} – момент инерции балки относительно центра масс центрального тела.

Обозначим через X_b и Y_b координаты O_b центра сечения заделки упругого элемента в системе координат $O_0 X_0 Y_0$. Для малого угла ϑ при нулевых начальных условиях справедливо

$$Y_b \approx r \cdot \vartheta, \quad X_b \approx const = r. \quad (7)$$

Отметим, что угловое положение сечения заделки упругого элемента в той же системе координат однозначно характеризуется угловой координатой ϑ центрального тела.

С учетом (7), а также учитывая, что

$$C_n^+ M_n = m_n^2 / (m^2 N_n^2), \quad m_n = m \int_0^l (x+r) \cdot Y_n dx,$$

где m_n – приведенная масса n -го тона колебаний, и преобразовывая соотношения (4 – 6) по Лапласу, можно получить передаточные функции от реакций связей R , M и M_Σ к координатам Y_b и ϑ сечения заделки балки в следующем виде

$$W_{Fz} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{F}} = -\frac{1}{J_{b0} \cdot S^2} \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (S^2 + \Omega_n^2)}{-S^2 \cdot \sum_{n=1}^N j_{bn} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N (S^2 + \Omega_i^2) + \prod_{n=1}^N (S^2 + \Omega_n^2)}, \quad (8)$$

где S – переменная Лапласа, знак « \sim » означает изображение по Лапласу соответствующей временной зависимости, N – число учитываемых тонов колебаний. Переменная F обозначает реакцию связи и может принимать значения R , M и M_Σ . Переменная z обозначает координату сечения и может принимать значения Y_b и ϑ . Соотношения для переменных J_{b0} и j_{bn} приведены в таблице.

	$F = R$		$F = M$		$F = M_\Sigma$
	$z = Y_b$	$z = \vartheta$	$z = Y_b$	$z = \vartheta$	$z = \vartheta$
W_{Fz}	W_{RY}	$W_{R\vartheta}$	W_{MY}	$W_{M\vartheta}$	$W_{M_\Sigma\vartheta}$
J_{b0}	H_{b0} / r	H_{b0}	G_{b0} / r	G_{b0}	I_{b0}
j_{bn}	$\frac{m_n}{N_n^2} \cdot \frac{Q_n}{H_{b0}}$		$\frac{m_n}{N_n^2} \cdot \frac{P_n}{G_{b0}}$		$\frac{2 \cdot m_n^2}{N_n^2} \cdot \frac{1}{m \cdot I_{b0}}$

Соотношения (8) могут быть записаны также в виде

$$W_{Fz} = -\frac{1}{J_{b0} \cdot S^2} \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (S^2 + \Omega_n^2)}{\prod_{n=1}^N (S^2 + \omega_{bn}^2)},$$

где ω_{bn} – частоты соответствующие полюсам передаточных функций (8), $n = 1, 2, \dots, N$.

При учете только первого тона упругих колебаний, имеем:

$$W_{Fz} = -\frac{1}{J_{b0} \cdot S^2} \cdot \frac{S^2 + \Omega_1^2}{(1 - j_{b1}) \cdot S^2 + \Omega_1^2}.$$

Подставляя (4) в (1), получим уравнения колебаний рассматриваемой механической системы при нулевых начальных условиях:

$$(I_0 + 2I_{b0}) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - 2m \sum_{n=1}^N C_n^+ M_n \left[\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \Omega_n \int_0^t \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} \sin \Omega_n(t - \tau) d\tau \right] = M_C.$$

Передаточная функция от управляющего воздействия M_C к обособленной координате центрального тела ϑ имеет вид

$$W_{M_C \vartheta} = \frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{M}_C} = \frac{1}{I_{c0} \cdot S^2} \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (S^2 + \Omega_n^2)}{-S^2 \cdot \sum_{n=1}^N j_{cn} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N (S^2 + \Omega_i^2) + \prod_{n=1}^N (S^2 + \Omega_n^2)} \quad (9)$$

или

$$W_{M_C \vartheta} = \frac{1}{I_{c0} \cdot S^2} \cdot \frac{\prod_{n=1}^N (S^2 + \Omega_n^2)}{\prod_{n=1}^N (S^2 + \omega_{cn}^2)},$$

$$j_{cn} = 2 \cdot m_n^2 / (m \cdot N_n^2 \cdot I_{c0}), \quad I_{c0} = I_0 + 2I_{b0}.$$

При учете только первого тона колебаний:

$$W_{M_C \vartheta} = \frac{1}{I_{c0} \cdot S^2} \cdot \frac{S^2 + \Omega_1^2}{(1 - j_{c1}) \cdot S^2 + \Omega_1^2}.$$

Полученные передаточные функции $W_{RY}, W_{R\vartheta}, W_{MY}, W_{M\vartheta}$ (8) от реакций связи к перемещениям центра сечения заделки упругого элемента для расчетных схем КА с распределенными упругими периферийными элементами в виде, представленном на рисунке 1, могут служить теми функциями, к характеристикам которых следует приближать характеристики передаточных функций от усилий к перемещениям для торцевого поперечного сечения примыкающего к КА эквивалента периферийного элемента в виде совокупностей абсолютно твердых тел, соединенных сосредоточенными упругими элементами.

Параметры j_{bn} , входящие в передаточные функции (8), а также j_{cn} , $n = 1, 2, \dots, N$, входящие в передаточную функцию (9), зависят от такого конструктивного параметра, как расстояние r между центром масс спутника и центром сечения заделки периферийного элемента. Проанализируем влияние этих зависимостей на изменение частот, соответствующих полюсам передаточных функций, на примере конкретных значений параметров рассматриваемой расчетной схемы. Взяты значения параметров, которые приведены в одном из примеров в [7]: $I_0 = 4000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $l = 10 \text{ м}$; $r = 0,5 \text{ м}$; $EI = 9000 \text{ Н} \cdot \text{м}$, где EI – жесткость балки на изгиб. На рисунке 2 приведены

графики изменения частот ω_{bn} передаточных функций (8) в зависимости от расстояния r для реакций R (штриховая линия) и M (сплошная линия). На рисунке 3 приведены графики изменения частот для реакции M_{Σ} .

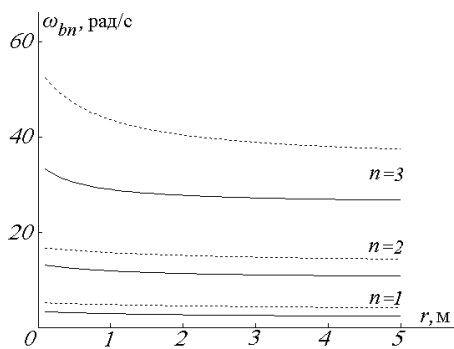


Рис. 2

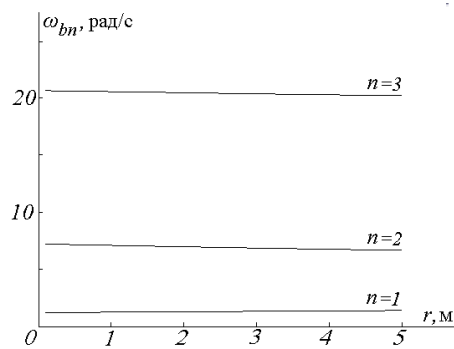


Рис. 3

Как видно из приведенных графиков, такой конструктивный параметр, как расстояние от центра масс центрального тела до центра сечения заделки упругого элемента может оказывать заметное влияние на характеристики рассматриваемых передаточных функций. Вопрос о том, следует ли учитывать этот параметр при определении параметров механического эквивалента периферийного упруго распределенного элемента КА, требует более тщательного изучения.

1. Дмитроченко О. Н. Моделирование геометрически нелинейных упругих стержневых систем твердотельными конечными элементами / О. Н. Дмитроченко, Н. Н. Михайлов, Д. Ю. Погорелов // Динамика и прочность транспортных машин // Сб. научн. трудов под ред. В. И. Сакало. – Брянск : Изд-во БГТУ, 1998. – С. 33 – 39.
2. Molenaar D. P. Cost effective design and operation of variable speed wind turbines / D. P. Molenaar. – DUP Science, Delft, The Netherlands, 2003 // <http://repository.tudelft.nl/file/80647/007206>.
3. Белоножко П. А. Об эквивалентности механических расчетных схем с распределенными и сосредоточенными параметрами для пространственно развитых периферийных элементов космических аппаратов / П. А. Белоножко, П. П. Белоножко, А. А. Фоков // Техническая механика. – 2009. – № 3. – С. 77 – 86.
4. Рутковский В. Ю. Управление угловым движением деформируемого спутника с распределенными массами. I. / В. Ю. Рутковский, В. М. Суханов // Космические исследования. – 1970. – Т. 8, № 1. – С. 71 – 79.
5. Злочевский С. И. О влиянии колебаний упругих элементов с распределенными массами на ориентацию спутника / С. И. Злочевский, Е. П. Кубышкин // Космические исследования. – 1987. – Т. 25, № 4. – С. 537 – 544.
6. Злочевский С. И. О стабилизации спутника с гибкими стержнями / С. И. Злочевский, Е. П. Кубышкин // Космические исследования. – 1989. – Т. 27, № 5. – С. 643 – 651.
7. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г. Л. Дегтярев, Т. К. Сиразетдинов. – М. : Машиностроение, 1986. – 216 с.
8. Управление и стабилизация движения бесконечномерных механических систем с упругими элементами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Зув Александр Леонидович http://www.icmm.ru/PH/newsfiles/abstract_zal.pdf

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 30.06.09,
в окончательном варианте 22.09.09