К . В . А в р а м о в

МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ БЕГУЩИХ ВОЛН И НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины; ул. Дм. Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина; e-mail: kvavr@kharkov.ua

Abstract. A model is proposed for nonlinear dynamical deformation of cylindrical shell, which takes into account a few united modes. Two regimes of motions are considered in the model – the regime of running waves and the regime of nonlinear normal modes.

Key words: nonlinear modes, running waves, harmonic balance method.

Введение.

Колебания цилиндрических оболочек при геометрически нелинейном деформировании являются весьма актуальными как для исследователей, так и для инженеров [1, 2, 5, 10]. Это объясняется широким использованием цилиндрических оболочек в аэрокосмической технике, энергетике и машиностроении. Анализ полученных к настоящему времени результатов по нелинейным колебаниям цилиндрических оболочек представлен в обзорной статье [6] и монографии [8].

Результаты анализа нелинейных колебаний цилиндрических оболочек можно разделить на две большие группы. К первой группе отнесем данные анализа нелинейных колебаний цилиндрических оболочек на основе маломерных моделей с двумя, тремя степенями свободы. Такие исследования представлены в работах [1, 2, 5, 10]. Ко второй группе относятся многомерные модели нелинейных колебаний цилиндрических оболочек, которые получаем и исследуем с помощью численного моделирования. Такие результаты широко представлены в монографии [8].

Многие цилиндрические оболочки обладают густым спектром собственных частот колебаний. В этом случае для описания динамических процессов при геометрически нелинейном деформировании необходимо учитывать три-четыре моды собственных колебаний. Именно такой случай геометрически нелинейного динамического деформирования оболочек рассмотрен в настоящей статье.

1. Уравнения колебаний оболочек.

Рассмотрим тонкую шарнирно опертую оболочку без учета сдвига и продольной инерции. Предполагается, что оболочка совершает геометрически нелинейное деформирование. Тогда деформации точек оболочек являются малыми, а перемещения умеренными и связь между деформациями и перемещениями является нелинейной. В этом случае напряжения и деформации связаны законом Гука. Оболочка является идеально цилиндрической. Колебания таких оболочек опишем уравнениями Доннела – Муштари – Власова в перемещениях

$$L_X(u,v,w) = -\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1+\nu}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta} +$$

$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh}f_x = 0\,;$$

$$L_{\Theta}(u,v,w) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} +$$

$$+\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1-\nu^2}{Eh} f_{\theta} = 0\,; \qquad (1)$$

$$L_Z(u,v,w) = \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}\right) - q\frac{1-\nu^2}{Eh} + \frac{w}{R^2} - \frac{\nu}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2R^3}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 -$$

$$-\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \left[-\frac{\nu w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\nu}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (1-\nu)\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \left[-\frac{w}{R^3} + \frac{\nu}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2R^4}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0\,,$$

где $q = -\rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$; $u, v-$ продольные и окружные перемещения точек цилиндрической оболочки; $w-$ радиальные перемещения; $R, h-$ радиус и толщина оболочки; $E, \nu-$ модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $f_{\theta}, f_x -$ проекции поверхностных сил. Рассмотрим шарнирно опертые цилиндрические оболочки, удовлетворяющие следующим граничным условиям: $N_X = 0$; $M_X = 0$; $v = w = 0$ ($x = 0$; $x = L$), где $N_X -$ продольная сила; $M_X -$ изгибающий момент.

Колебания оболочки представим так:

$$w_*(x,\theta,t) = \sum_{j=1}^{3}\left(w_j^{(C)}(t)\cos n_j\theta + w_j^{(S)}(t)\sin n_j\theta\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + w_0(t)\sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right);$$

$$v_*(x,\theta,t) = \sum_{j=1}^{3}\left(v_j^{(C)}(t)\cos n_j\theta + v_j^{(S)}\sin n_j\theta\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + v_0(t)\sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right);$$

$$u_*(x,\theta,t) = \sum_{j=1}^{3}\left(u_j^{(C)}(t)\cos n_j\theta + u_j^{(S)}\sin n_j\theta\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \qquad (2)$$

где $\cos n_j\theta\sin(\pi x/L)$; $\sin n_j\theta\sin(\pi x/L)$; $\cos n_j\theta\cos(\pi x/L)$; $\sin n_j\theta\cos(\pi x/L)$ – собственные моды колебаний цилиндрических оболочек; n_j ($j = \overline{1,3}$ – целые положительные числа); $w_j^{(C)}; w_j^{(S)}; w_0; v_j^{(C)}; v_j^{(S)}; v_0; u_j^{(C)}; u_j^{(S)} -$ обобщенные координаты, описывающие колебания. Отметим, что собственные моды $\cos n_j\theta\sin(\pi x/L)$ и $\sin n_j\theta\sin(\pi x/L)$ определяются одной частотой, а их взаимодействие $\left(w_j^{(C)}(t)\cos n_j\theta + w_j^{(S)}(t)\sin n_j\theta\right)\sin(\pi x/L)$ описывает бегущую волну. Базисная функция $\sin^4(\pi x/L)$ не является собственной формой колебаний. Эта функция описывает экспериментальный факт, что изгибные колебания во внутрь оболочки больше, чем наружу [6]. Заметим также, что базисная функция $\sin^4(\pi x/L)$ удовлетворяет граничным условиям.

Применим метод Бубнова – Галеркина к каждому уравнению системы (1). Такой подход использован в анализе пространственных колебаний стержней в статье [9]. При этом используются следующие уравнения:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_Z\left(u_*, v_*, w_*\right); L_\Theta\left(u_*, v_*, w_*\right) \right\} \cos\left(n_\mu \theta\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx d\theta = 0\,; \tag{3}$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_Z\left(u_*, v_*, w_*\right); L_\Theta\left(u_*, v_*, w_*\right) \right\} \sin\left(n_\mu \theta\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx d\theta = 0\,; \tag{4}$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_Z\left(u_*, v_*, w_*\right); L_\Theta\left(u_*, v_*, w_*\right) \right\} \sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx d\theta = 0\,; \tag{5}$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} L_X\left(u_*, v_*, w_*\right) \left\{ \begin{matrix} \cos n_\mu \theta \cos\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) \\ \sin n_\mu \theta \cos\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) \end{matrix} \right\} dx\, d\theta = 0 \quad (\mu = \overline{1,\ 3}). \tag{6}$$

В дальнейшем пренебрегаем продольной и окружной инерциями. Тогда перемещения u_*, v_* определяются из квазистатической задачи, которая получена из уравнений (3) – (6) с операторами L_Θ и L_X. Эти уравнения являются линейными относительно $\left(u_l^{(s)}, u_l^{(c)}, v_l^{(s)}, v_l^{(c)}\right)$ и имеют следующий вид:

$$b_l v_l^{(C)} + a_l \pi u_l^{(S)} = c_l^{(1)} w_0 w_l^{(S)} - d_l w_l^{(S)}; \;\; a_l v_l^{(C)} + f_l u_l^{(S)} = g_l w_0 w_l^{(S)} - h_l w_l^{(S)};$$

$$-b_l v_l^{(S)} + a_l \pi u_l^{(C)} = c_l^{(2)} w_0 w_l^{(C)} - d_l w_l^{(C)}; \;\; a_l v_l^{(S)} - f_l u_l^{(C)} = -g_l w_0 w_l^{(C)} + h_l w_l^{(C)} \;\; (l = \overline{1,\ 3}), \tag{7}$$

где введены обозначения

$$a_l = \frac{(1+\nu)\pi n_l}{4R}; \;\; b_l = \frac{L\pi n_l^2}{2R^2} + \frac{(1-\nu)\pi^3}{4L}; \;\; c_l^{(1,2)} = \frac{(3\nu \pm 1) n_l \pi^3}{8RL}; \;\; d_l = \frac{L\pi n_l}{2R^2};$$

$$f_l = \frac{\pi^2}{2L} + \frac{(1-\nu)L n_l^2}{4R^2}; \;\; g_l = \frac{\pi^3}{4L^2} - \frac{(1-\nu)\pi n_l^2}{8R^2}.$$

Аналитические решения уравнений (7) представим в следующем виде:

$$u_l^{(C,S)} = A_l w_l^{(C,S)} + B_l w_l^{(C,S)} w_0\,; \;\; v_l^{(C)} = -C_l w_0 w_l^{(S)} - D_l w_l^{(S)};$$

$$v_l^{(S)} = C_l w_0 w_l^{(C)} - D_l w_l^{(S)} \;\; (l = \overline{1,3})\,; \; v_0 = 0\,, \tag{8}$$

где принято

$$A_l = \frac{RL\pi\left(L^2 n_l^2 - \nu\pi^2 R^2\right)}{\left(L^2 n_l^2 + R^2\pi^2\right)^2}; \;\; B_l = \frac{\pi\left[2\pi^2 n_l^2 (1+\nu) R^2 L^2 - n_l^4 L^4 + \pi^4 R^4\right]}{2L\left(R^2\pi^2 + L^2 n_l^2\right)^2};$$

$$C_l = \frac{\left(\pi^2 R^2 - L^2 n_l^2 \nu\right) R n_l \pi^2}{\left(L^2 n_l^2 + R^2\pi^2\right)^2}; \;\; D_l = \frac{L^2 n_l\left[\pi^2 R^2 (2+\nu) + L^2 n_l^2\right]}{\left(L^2 n_l^2 + R^2\pi^2\right)^2}.$$

Решения (2) введем в оператор L_Z (уравнение (1)). Используя метод Бубнова – Галеркина (3) – (5), получим динамическую систему

$$\ddot{w}_i^{(C)} + \omega_i^2 w_i^{(C)} + w_i^{(C)} R_i\left(w^{(S)}, w^{(C)}, w_0\right) + G_i^{(C)}\left(w^{(S)}, w^{(C)}\right) = 0\,; \tag{9}$$

$$\ddot{w}_i^{(S)} + \omega_i^2 w_i^{(S)} + w_i^{(S)} R_i\left(w^{(S)}, w^{(C)}, w_0\right) + G_i^{(S)}\left(w^{(S)}, w^{(C)}\right) = 0\,; \tag{10}$$

$$\ddot{w}_0 + \omega_4^2 w_0 + F_4\left(w^{(S)}, w^{(C)}, w_0\right) = 0\,, \tag{11}$$

где использованы обозначения:

$$R_i\left(w^{(S)}, w^{(C)}, w_0\right) = \sum_{\nu=1}^{3} \beta_\nu^{(i)}\left(w_\nu^{(S)2} + w_\nu^{(C)2}\right) + \beta_4^{(i)} w_0 + \beta_5^{(i)} w_0^2\,; \tag{12}$$

$$G_1^{(C,S)} = \beta_6^{(1)}\left(w_2^{(C,S)2} - w_2^{(S,C)2}\right) w_3^{(C,S)} + 2\beta_6^{(1)} w_2^{(S,C)} w_3^{(S,C)} w_2^{(C,S)}\,; \tag{13}$$

$$G_2^{(C,S)} = \beta_6^{(2)}\left(w_3^{(C,S)} w_1^{(C,S)} w_2^{(C,S)} + w_2^{(S,C)} w_1^{(S,C)} w_3^{(C,S)} + w_3^{(S,C)} w_1^{(C,S)} w_2^{(S,C)} - w_1^{(S,C)} w_2^{(C,S)} w_3^{(S,C)}\right); \tag{14}$$

$$G_3^{(C,S)} = \beta_6^{(3)}\left(w_2^{(C,S)2} - w_2^{(S,C)2}\right) w_1^{(C,S)} + 2\beta_6^{(3)} w_2^{(C,S)} w_1^{(S,C)} w_2^{(S,C)}\,; \tag{15}$$

$$F_4\left(w^{(S)}, w^{(C)}, w_0\right) = \sum_{i=1}^{3} \delta_i\left(w_i^{(C)2} + w_i^{(S)2}\right) + \delta_4 w_0^2\,;$$

$$w^{(S)} = \left(w_1^{(S)}, w_2^{(S)}, w_3^{(S)}\right);\; w^{(C)} = \left(w_1^{(C)}, w_2^{(C)}, w_3^{(C)}\right).$$

В уравнениях (13) – (15) берем по очереди первый или второй верхние индексы. Параметры динамической системы (9) – (11) зависят от параметров оболочки. В данной статье они не представлены для краткости изложения. Частоты линейных колебаний оболочки ω_μ $\left(\mu = \overline{1,\,4}\right)$ таковы:

$$\omega_\mu^2 = \frac{E}{\rho}\left[\frac{h^2}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{n_\mu^2}{R^2}\right)^2 + \frac{\pi^4 R^2}{\left(L^2 n_\mu^2 + R^2\pi^2\right)^2}\right] \quad (\mu = \overline{1,\,3})\,;$$

$$\omega_4^2 = \frac{E}{\rho\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{128\pi^4 h^2}{105 L^4} + \frac{1}{R^2}\right). \tag{16}$$

Так как частота ω_4 значительно больше частот ω_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$, в дальнейшем анализе предполагаем, что $\ddot{w}_0 = 0$. Учитывая это условие, из уравнения (11) получаем

$$w_0 = -\omega_4^{-2} \sum_{i=1}^{3} \delta_i\left(w_i^{(C)2} + w_i^{(S)2}\right)^2 + \ldots\,. \tag{17}$$

Функции R_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ уравнений (9, 10) представим так:

$$R_i(w^{(S)}, w^{(C)}) = \sum_{\nu=1}^{3} \gamma_\nu^{(i)}\left(w_\nu^{(C)2} + w_\nu^{(S)2}\right)\left(i = \overline{1,3}\right). \tag{18}$$

Итак, колебания оболочки описываются уравнениями (9, 10) с функцией R_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ в виде (18).

2. Анализ системы с конечным числом степеней свободы.

Исследуем динамическую систему (9, 10). В этой системе существуют две нелинейные нормальные формы колебаний

$$w_i^{(S)} = \pm w_i^{(C)} \left(i = \overline{1,3} \right). \quad (19)$$

Движения на этих формах описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{w}_i^{(C)} + \omega_i^2 w_i^{(C)} + w_i^{(C)} \tilde{R}_i (w^{(C)}) + \tilde{G}_i^{(C)} (w^{(C)}) = 0 \ \left(i = \overline{1,3} \right); \quad (20)$$

$$\tilde{G}_1^{(C)} = \beta_7^{(1)} w_2^{(C)2} w_3^{(C)}; \ \tilde{G}_2^{(C)} = 2\beta_6^{(2)} w_3^{(C)} w_1^{(C)} w_2^{(C)}; \ \tilde{G}_3^{(C)} = \beta_7^{(3)} w_2^{(C)2} w_1^{(C)}; \ \tilde{R}_i = 2\sum_{\nu=1}^{3} \gamma_\nu^{(i)} w_\nu^{(C)2} .$$

Отметим, что движения (19) не являются традиционными нелинейными формами колебаний, так как колебания на нелинейных формах, в основном, описываются динамическими системами с одной степенью свободы [7, 11]. Вид нелинейных форм (19) объясняется присутствием в системе (9), (10) внутренних резонансов. Для исследования системы (20) воспользуемся методом гармонического баланса [3] и ее движение представим так:

$$w_i^{(C)} = B_i \cos \omega t \left(i = \overline{1,3} \right). \quad (21)$$

Решение (21) введем в (20) и приравняем амплитуды при $\cos(\omega t)$. В результате придем к системе трех нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний B_i:

$$\left(\omega_i^2 - \omega^2 \right) B_i + \frac{3}{4} \left(G_*^{(i)} + 2B_i \sum_{\nu=1}^{3} \gamma_\nu^{(i)} B_\nu^2 \right) = 0 \ \ (i = \overline{1,3}); \quad (22)$$

$$G_*^{(1)} = \beta_7^{(1)} B_2^2 B_3 ; \ G_*^{(2)} = 2\beta_6^{(2)} B_1 B_2 B_3 ; \ G_*^{(3)} = \beta_7^{(3)} B_2^2 B_1 .$$

Система (22) имеет следующие типы решений:

$$1.1). \ B_2 = 0; B_1 \neq 0; B_3 \neq 0 ; \quad 1.2). \ B_2 = B_1 = 0; B_3 \neq 0 ; \quad (23)$$

$$1.3). \ B_2 = B_3 = 0; B_1 \neq 0; \quad 1.4). \ B_1 \neq 0; B_2 \neq 0; B_3 \neq 0 .$$

Каждое из движений рассмотрим отдельно. Решение 1.1) определяется такими соотношениями:

$$B_3^2 = \frac{1}{\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}} \left[\frac{2}{3} \left(\omega_3^2 - \omega_1^2 \right) + \left(\gamma_1^{(3)} - \gamma_1^{(1)} \right) B_1^2 \right];$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma_3^{(1)} \omega_3^2 - \gamma_3^{(3)} \omega_1^2}{\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}} + \frac{3\left(\gamma_3^{(1)} \gamma_1^{(3)} - \gamma_1^{(1)} \gamma_3^{(3)} \right) B_1^2}{2\left(\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)} \right)} . \quad (24)$$

Для расчета скелетной кривой по соотношениям (24) параметр B_1 задается с некоторым шагом. Для каждого значения B_1 определяются B_3 и ω.

Далее рассмотрим решения 1.2), которые удовлетворяют уравнению

$$\omega^2 = \omega_3^2 + \frac{3}{2} \gamma_3^{(3)} B_3^2 . \quad (25)$$

В этом случае для расчета скелетной кривой параметр B_3 задаем с некоторым шагом, а ω определяем из уравнения (25).

Рассмотрим решение 1.3). В этом случае выполняется уравнение

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{3}{2}\gamma_1^{(1)} B_1^2 . \tag{26}$$

Тогда при расчете скелетной кривой задаем параметр B_1 с некоторым шагом.

Наконец, рассмотрим решение 1.4). Тогда параметры колебаний удовлетворяют системе (22). Для определения скелетной кривой B_1 задаем с некоторым шагом и из системы (22) находим (B_2, B_3, ω).

Связь динамических радиальных перемещений оболочки $w(x, y, t)$ с параметрами нелинейных нормальных форм имеет такой вид:

$$w(x,\theta,t) = \cos(\omega t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sum_{j=1}^{3} B_j \left(\cos n_j\theta \pm \sin n_j\theta\right) - 2\omega_4^{-2}\sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sum_{i=1}^{3}\delta_i B_i^2 \cos^2(\omega t) . \tag{27}$$

Периодические движения системы (20) представим в виде

$$w_j^{(S)} = A_j \sin\omega t \,;\; w_j^{(C)} = A_j \cos\omega t . \tag{28}$$

Воспользуемся методом гармонического баланса и решение (28) введем в динамическую систему (9, 10). Приравнивая амплитуды при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, придем к системе трех нелинейных алгебраических уравнений:

$$A_j\left[\sum_{\nu=1}^{3}\gamma_\nu^{(j)} A_\nu^2 + \omega_j^2 - \omega^2\right] + \bar{G}_j^{(S)} = 0 \;\left(j = \overline{1,3}\right);$$

$$\bar{G}_1^{(S)} = A_2^2 A_3\left(0,5\beta_6^{(1)} + 0,25\beta_7^{(1)}\right);\;\; \bar{G}_2^{(S)} = \beta_6^{(2)} A_1 A_2 A_3 ;$$

$$\bar{G}_3^{(S)} = A_2^2 A_1\left(0,5\beta_6^{(3)} + 0,25\beta_7^{(3)}\right). \tag{29}$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (29) описывает бегущие волны в цилиндрической оболочке. Эти уравнения имеют сходство с системой (22). В системе (29) существуют следующие виды движений:

2.1). $A_2 = 0; A_1 \neq 0; A_3 \neq 0$; 2.2). $A_2 = A_1 = 0; A_3 \neq 0$;

2.3). $A_2 = A_3 = 0$; $A_1 \neq 0$; 2.4). $A_1 \neq 0; A_2 \neq 0; A_3 \neq 0$. (30)

Рассмотрим свободные колебания 2.1). Из системы (29) получим, что такие колебания описываются уравнениями

$$A_3^2 = \frac{1}{\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}}\left[\omega_3^2 - \omega_1^2 - \left(\gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(3)}\right)A_1^2\right];\; \omega^2 = \frac{\gamma_3^{(1)}\omega_3^2 - \omega_1^2\gamma_3^{(3)}}{\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}} + A_1^2\,\frac{\gamma_3^{(1)}\gamma_1^{(3)} - \gamma_1^{(1)}\gamma_3^{(3)}}{\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(3)}} . \tag{31}$$

Для расчета скелетной кривой параметр A_1 задаем с некоторым шагом, а остальные параметры находим из (31).

Теперь рассмотрим движения 2.2). В этом случае параметры колебаний определяются из уравнения

$$\omega^2 = \omega_3^2 + \gamma_3^{(3)} A_3^2 . \tag{32}$$

Рассмотрим решение 2.3). Задавая параметр A_1 с некоторым шагом, частоту колебаний ω определим из уравнения

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \gamma_1^{(1)} A_1^2 . \qquad (33)$$

Далее рассмотрим решение 2.4). В этом случае параметр A_1 задаем с некоторым шагом. Для каждого значения A_1 численно решаем систему нелинейных алгебраических уравнений (29) относительно $(\omega,\ A_2,\ A_3)$.

В случае бегущих волн динамический изгиб оболочки может быть представлен так:

$$w(\theta,x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sum_{j=1}^{3} A_j \cos\left(\omega t - n_j\theta\right) - \sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right)\omega_4^{-2}\sum_{\nu=1}^{3}\delta_\nu A_\nu^2 . \qquad (34)$$

Отметим, что первый член в разложении (34) описывает взаимодействие трех бегущих волн. Каждая из бегущих волн характеризует вращение деформационной картины оболочки с угловой скоростью $\Omega_j = \omega / n_j$ ($j = \overline{1,3}$).

3. Численный анализ колебаний.

Исследуем колебания оболочки со следующими численными значениями параметров [4]:

$$E = 2\cdot 10^{11}\,\text{Па};\ \rho = 7{,}8\cdot 10^3\,\text{кг}/\text{м}^3;\ \nu = 0{,}3;\ R = 0{,}16\,\text{м};\ h/R = 3{,}125\cdot 10^{-3};\ L/R = 2{,}5. \qquad (35)$$

Тогда собственные частоты колебаний оболочки принимают следующие значения (в $рад/с$): $\omega_4 = 2891$; $\omega_5 = 2041{,}6$; $\omega_6 = 1741{,}7$; $\omega_7 = 1807{,}7$; $\omega_8 = 2105$. Индекс у частоты указывает число волн в окружном направлении оболочки. Колебания по форме $\sin^4(\pi x / L)$ в цилиндрической оболочке соответствуют частоте $\omega_4 = 33176{,}7$ рад/с. В дальнейших расчетах принимаются следующие параметры разложения (2): $n_1 = 5$; $n_2 = 6$; $n_3 = 7$.

Исследуем нелинейные нормальные формы, которые описываются формулами (24) – (26). Результаты расчетов представлены на рис. 1 сплошной линией. На рис. 1, *а* показана нелинейная нормальная форма, которая описывается уравнением (25). На рис. 1, *б* представлена нелинейная нормальная форма, описывающаяся уравнением (26). Нелинейная нормальная форма, которая отвечает случаю 1.4), представлена на рис. 1, *в*. Для параметров оболочки (35) нет движений типа 1.1), так как применение уравнений (24) показывает, что $B_3^2 < 0$.

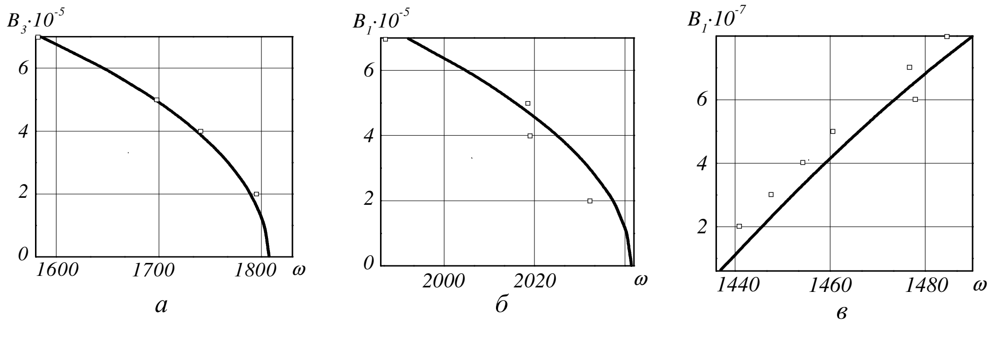

Рис. 1

Прямое численное интегрирование системы (9, 10) производится для подтверждения результатов, которые описываются уравнениями (22). Начальные условия этой системы определены из решений (21). Численное интегрирование произведено на коротких интервалах времени, а по его результатам определяем период колебаний при заданной величине их амплитуды. Результаты расчетов показаны на рис. 1 точками. Итак, аналитические результаты близки к данным прямого численного интегрирования.

Из представленного выше анализа можно сделать следующий вывод. В случае колебаний по нелинейным нормальным формам, мягкие скелетные кривые описывают устойчивые движения, а жесткие кривые – неустойчивые движения.

Проведем численный анализ бегущих волн в цилиндрических оболочках для параметров (35), используя результаты (28) – (33). Данные расчетов показаны на рис. 2. На рис. 2, *а* изображена скелетная кривая, которая получена из уравнений (32). Эта кривая выражает зависимость A_3 от ω. На рис. 2, *б* показана скелетная кривая, выражающая зависимость A_1 от ω и описывающаяся уравнением (33). Произведем численный анализ скелетных кривых, которые описываются системой нелинейных алгебраических уравнений (29). Результаты расчета представлены на рис. 2, *в* в виде зависимости $A_1(\omega)$. Для параметров оболочки (35) движения (31) не наблюдаются, так как из расчетов следует, что $A_3^2 < 0$.

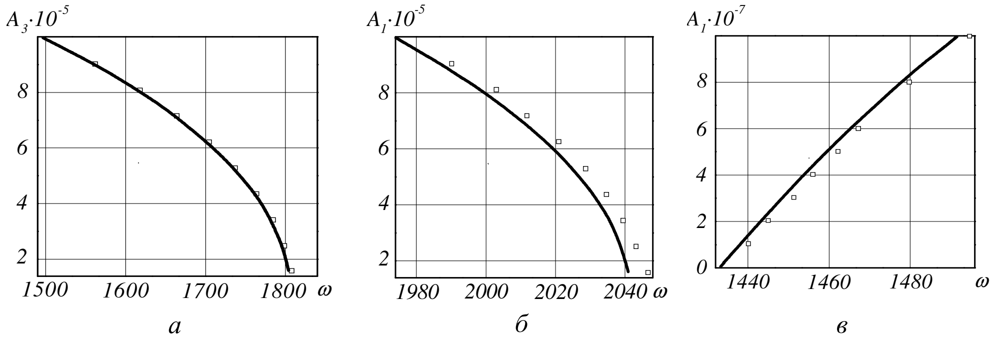

Рис. 2

Полученные аналитически периодические движения проверяются прямым численным интегрированием системы (9, 10). Начальные условия для численного интегрирования выбираются, исходя из решения (28). Данные расчета представлены на рис. 2 точками. Результаты прямого численного интегрирования близки к данным, полученным методом гармонического баланса.

Проведем анализ устойчивости периодических движений, представленных на рис. 2. При этом система уравнений (9, 10) интегрируется численно на интервале времени $t \in [0; \tau]$; $\tau = 200 \pi / \omega$. Как следует из результатов расчета, все периодические движения (рис. 2) являются устойчивыми.

Заключение.

В данной статье предложена математическая модель взаимодействия нескольких сопряженных форм при свободных колебаниях идеально цилиндрической оболочки. Эта модель является дискретной динамической системой с большим числом степеней свободы. В полученной системе исследовано два типа свободных колебаний: нелинейные нормальные формы и бегущие волны. Отметим, что нелинейное динамическое деформирование рассмотренной оболочки описывается как мягкой, так и жесткой скелетной кривыми.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано модель нелінійного динамічного деформування циліндричної оболонки, що враховує декілька спряжених форм коливання. В моделі розглянуто два режими руху: нелінійні нормальні форми та біжучі хвилі.

1. *Аврамов К. В.* Нелинейные вынужденные колебания цилиндрической оболочки при двух внутренних резонансах // Прикл. механика. – 2006. – **44**, № 2. – С. 51 – 59.
2. *Аврамов К. В., Пелликано Ф.* Динамическая неустойчивость цилиндрической оболочки с диском на конце // Докл. НАН Украины. – 2006. – № 5. – С. 41 – 46.

3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л.* Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высш. шк., 1989. – 376 с.
4. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наук. думка, 1984. – 200 с.
5. *Кубенко В.Д., Дзюба В.В.* ‹‹Резонансные›› явления в осесимметричных системах с цилиндрической оболочкой, содержащей сферическое включение и сжимаемую жидкость, при наличии внешней упругой среды // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 7. – С. 82 – 97.
6. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С.* Нелинейные проблемы колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 8. – С. 3 – 31.
7. *Маневич Л. И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М: Наука, 1989. – 280 с.
8. *Amabili M.* Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 402 p.
9. *Avramov K. V., Pierre C., Shyriaieva N.* Flexural-flexural-torsional nonlinear vibrations of pre-twisted rotating beams with asymmetric cross section // J. of Vibrations and Control. – 2007. – № 4. – P. 329 – 364.
10. *Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A.* On Free Nonlinear Vibrations of Fluid-Filled Cylindrical Shells with Multiple Natural Frequencies // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, № 10. – P. 1192 – 1202.
11. *Vakakis A., Manevich L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley Interscience, 1996. – 780 p.

Поступила 05.10.2009 Утверждена в печать 07.12.2010