

В.И.Гуляев<sup>1</sup>, П.З.Луговой<sup>2</sup>, Ю.А.Заец<sup>1</sup>, М.Набиль<sup>1</sup>

**ПЕРЕСТРОЙКА ФРОНТОВ КВАЗИПРОДОЛЬНЫХ И КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ  
РАЗРЫВНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-  
ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ**

<sup>1</sup> *Национальный транспортный университет,*

*ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: valery@gulyayev.com.ua*

<sup>2</sup> *Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,*

*ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: string@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A problem on propagation and rearrangement of fronts of discontinuous waves in inhomogeneous transversally isotropic elastic media is considered. A technique of constructing the evolable system of rays and fronts is proposed. The cases of forming the geometrical singularities on the front surfaces are studied for different values of parameters of elastic medium anisotropy and inhomogeneity.

**Key words:** elastic anisotropic medium; discontinuous wave; ray method; front bifurcation.

**Введение.**

Лучевой метод, используемый в теории распространения фронтов разрывностей полевых функций в недиспергирующих средах, позволяет отслеживать перестройку их поверхностей и устанавливать эффекты возникновения на них геометрических особенностей. Он связан с применением лучевой системы координат, в которой совокупность координатных поверхностей совпадает с эволюционирующими поверхностями фронтов [6 – 8]. Формально этот подход реализуется посредством представления решения волнового уравнения членами ряда по лучевой координате. При его использовании конструируется система уравнений эйконала и транспортных уравнений. Первое из них представляет собой нелинейное уравнение с частными производными, описывающее поверхность фронта и систему лучей, поэтому называется кинематическим уравнением. Транспортные уравнения составляют систему нелинейных уравнений с частными производными. Они определяют полевые функции на поверхности фронта и позади его. Поэтому эти уравнения являются динамическими. Очевидно, что разрывы полевых функций на поверхности фронта описываются нулевыми членами лучевых рядов [7].

С помощью нулевого приближения лучевого метода в работах [3 – 5, 11, 13, 15] решены задачи о распространении разрывных волн и их фокусировки выпуклыми и вогнутыми линзами в однородных трансверсально-изотропных упругих средах. Показано, что если среда однородная, то лучи являются прямолинейными, но в общем случае, не ортогональными поверхностям фронтов. Однако задача построения системы лучей и фронтов усложняется, если среда является неоднородной. Тогда лучи искривляются, формы волновых фронтов имеют сложный вид и на их поверхностях возникают более сложные геометрические сингулярности. Некоторые вопросы дифракции нестационарных волн рассмотрены в публикациях [10, 12, 14, 16].

В данной работе выполнено исследование перестройки волновых фронтов в неоднородных упругих средах при некоторых законах изменения их параметров упругости вдоль пространственных координат.

**§1. Состояние проблемы.**

Одним из наиболее актуальных направлений механики нестационарных волновых процессов является проблема распространения разрывных волн в акустических средах. Специфика возникающих в этих случаях динамических явлений связана с крат-

ковременностью высокоинтенсивного начального поля давления, как правило, сконцентрированного на начальном этапе времени в малой области, примыкающей к свободной граничной поверхности среды. В результате такого воздействия возникает движущая поверхность фронта разрыва первой производной от функции перемещений, обычно называемая в линейной теории упругости слабой ударной (или разрывной) волной [8]. По мере распространения поверхность фронта перестраивается и граница выделенной для расчета области эволюционирует. Поэтому для анализа таких процессов оказываются малоэффективными традиционные методы решения краевых задач математической физики.

При исследовании слабых ударных волн наибольшее внимание уделяется вопросам геометрического построения поверхностей разрывов полевых функций и вычислением значений этих разрывов, дающих наиболее полную информацию о фронте слабой ударной волны и интенсивности переносимого ею импульса в каждой точке фронта. Поэтому для постановки и решения таких задач важную роль играют методы геометрической оптики, в частности, нулевое приближение лучевого метода, обеспечивающее хорошее количественное описание широкого круга волновых явлений различной физической природы [6], в том числе и упругих разрывных волн [7].

Первые исследования в этой области относятся к разработке методов геометрического построения системы лучей и фронтов таких волн. Они базируются на принципе Гюйгенса, в соответствии с которым каждый элемент поверхности фронта, достигнутый волной в данный момент времени, является центром (источником) новых элементарных волн, огибающая которых будет волновой поверхностью (фронтом) в следующий момент времени. В однородной изотропной акустической среде фронт каждой порожденной элементарной волны является сферическим, поэтому, например, в плоском случае задача исследования движущихся фронтов сводится к построению огибающих семейства окружностей одинакового радиуса с центром, лежащим на исходной кривой, представляющей собой геометрическое место точек начальных волновых источников (рис. 1). При этом важным становится вопрос о возникновении особых (сингулярных) точек на поверхности фронта, связанных с нарушением ее гладкости и дифференцируемости. В связи с тем, что интенсивности волновых характеристик в рамках линейной теории волн в таких точках неограниченны, определение мест и моментов их возникновения составило отдельную научную дисциплину – геометрическую оптику [6]. Одно из основных ее направлений связано с построением огибающих систем лучей, называемых каустиками. Особенности каустик, эволют и эвольвент систем лучей и фронтов подробно изучены еще Гюйгенсом в 1654 г. [9]. Однако, общая теория систем лучей была построена во второй половине прошлого века [2, 9], которая затем стала одним из разделов теории катастроф [1]. Это оказалось возможным, при рассмотрении задачи о распространении фронтов в изотропных однородных средах, в которых лучи прямолинейны и ортогональны фронту разрывной волны. Однако, если среда анизотропна, то лучи, оставаясь прямолинейными, перестают быть ортогональными фронтам и многие результаты, полученные ранее в теории лучей, теряют свою общность. Некоторые вопросы анализа процессов распространения систем лучей – фронтов в упругих трансверсально-изотропных средах рассмотрены в работах [3, 13, 15].

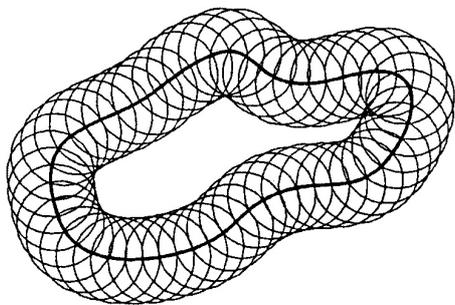


Рис. 1

Задача еще более усложняется, если анизотропная среда неоднородна. Тогда лучи становятся криволинейными и анализ процесса формирования систем лучей и фронтов, по-видимому, становится возможным только методами компьютерного моделирования. Учитывая, что решения таких задач могут быть использованы в сейсмологии, которая изучает распространение упругих волн в тектонических структурах, неоднородных в силу их неоднородного преднапряжения, можно отметить, что они актуальны как с научной, так и прикладной точек зрения.

## §2. Постановка задачи.

Рассмотрим в прямоугольной системе координат  $Ox_1, x_2, x_3$  неоднородную трансверсально-изотропную среду с осью симметрии  $Ox_2$ , которая характеризуется тензором упругих постоянных

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu - p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $l, m, p$  – параметры анизотропии, отличающие среду от изотропной с коэффициентами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ .

Самым простым для рассмотрения является случай, когда неоднородность среды заключается в подчинении ее плотности некоторой функции координат  $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ . Ниже рассмотрен более общий случай, когда переменной есть матрица  $(C_{\alpha\beta})$ . Возбужденное состояние такой среды, исходя из условий идеальной упругости, описывается уравнениями движения (2)

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + \sum_{k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_k} \frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где  $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}(x_1, x_2, x_3) / \rho(x_1, x_2, x_3)$  – приведенные параметры упругости;  $c_{ik,pq}$  – функции, выражаемые через элементы переменного тензора  $(C_{\alpha\beta})$  [7];  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора упругих перемещений.

Решение системы уравнений (2) с постоянными параметрами упругости при известных начальных условиях

$$\bar{u} \Big|_{t=0} = \bar{u}_0(x_1, x_2, x_3, 0); \quad \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = \bar{v}_0(x_1, x_2, x_3, 0) \quad (3)$$

можно строить в виде плоской монохроматической волны с волновым числом  $k$  и фазовой скоростью  $v$ , фронтами которой являются поверхности постоянных фаз

$$\bar{n} \cdot \bar{r} - vt = \text{const}, \quad (4)$$

которые движутся со скоростью  $\bar{v} = v \cdot \bar{n}$  и локально перпендикулярны к орту  $\bar{n}$ .

Для произвольно выбранного направления  $\bar{n}$  фазовая скорость волны  $v$  и вектор ее поляризации  $\bar{A}$  определяется из системы линейных алгебраических уравнений [7]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Решением задачи на собственные значения при симметричной положительно определенной матрице коэффициентов системы

$$\Lambda_{iq} \equiv \sum_{k,p} \lambda_{ik,pq} n_k n_p \quad (i, q = 1, 2, 3) \quad (6)$$

для каждого направления  $\vec{n}$  определяются квадраты скоростей трех по разному поляризованных волн  $[v^{(r)}]^2$ ,  $r = 1, 2, 3$ , и для каждого значения фазовой скорости – компоненты вектора поляризации  $\vec{A}$  волны как собственные векторы матрицы (6). Независимо от направления  $\vec{n}$  луча векторы поляризации должны удовлетворять условиям ортогонализации

$$\vec{A}^{(i)}(\vec{n}) \cdot \vec{A}^{(k)}(\vec{n}) = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Величины фазовых скоростей нумеруются в порядке уменьшения их модулей. Волна, имеющая наибольшую фазовую скорость и номер  $r = 1$ , называется квазипродольной. Две другие,  $r = 2, 3$  – квазипоперечными, фронты которых всегда отстают от фронта квазипродольной волны.

В анизотропных средах, кроме фазовой скорости  $\vec{v}$ , не меньший интерес вызывает лучевая скорость  $\vec{\xi}$  – скорость распространения энергии волнового поля. Эти скорости связаны соотношением

$$(\vec{n} \cdot \vec{\xi}^{(r)}) = v^{(r)} \quad (r = 1, 2, 3), \quad (8)$$

откуда видно, что лучевая скорость по модулю больше фазовой или равна ей при совпадении направлений их векторов. Компоненты вектора лучевой скорости

$$\xi_k^{(r)} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^{(r)} \vec{i}_k \quad (r = 1, 2, 3) \quad (9)$$

вычисляется по формуле [7]

$$\xi_k^{(r)} = \frac{1}{v^{(r)}} \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \quad (r, k = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Поверхность фронта ударной волны с учетом (4) может быть представлена соотношением

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (11)$$

где  $\tau$  – функция, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (12)$$

где обозначено:  $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(\vec{n})$  – компоненты вектора рефракции [7].

Уравнение (12) с помощью метода характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} = \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad \frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} = \eta_m \equiv 0 \quad (r, m = 1, 2, 3) \quad (13)$$

с начальными условиями

$$x_k^{(r)} \Big|_{t=0} = x_k^0; \quad p_k^{(r)} \Big|_{t=0} = \frac{n_k}{v_k^{(r)}}, \quad (14)$$

интегрируя которые для последовательности заранее выбранных начальных направлений можно построить семейство  $m$  прямолинейных лучей, вдоль которых в упругой анизотропной среде со скоростями  $\vec{\xi}_m$  распространяется энергия волнового поля.

Однако, если упругая среда неоднородна, то соотношения (4) – (12) перестают быть одинаковыми в каждой точке луча, поскольку при переходе от одной точки на луче к другой свойства среды меняются. Поэтому каждое из этих равенств может быть использовано лишь локально. Тогда при переходе к неоднородной среде уравнения (13) следует заменить системой [7]

$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} = \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)};$$

$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} = \eta_m \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \quad (r, m = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Вторая группа уравнений этой системы свидетельствует о том, что в данном случае величины  $\eta_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) перестают быть равными нулю, а  $p_m$  не равны константам. Поэтому из первой группы уравнений следует, что  $\xi_m$  и  $x_m^{(r)}$  становятся нелинейными функциями и лучи, вдоль которых переносится энергия волны, приобретают искривленность. Явление распространения фронтов разрывных волн в неоднородных упругих средах отличается тем, что в зависимости от направления движения даже фронт исходно плоской волны может испытывать искривления по мере смещения. Однако, наиболее ярко процессы трансформирования фронтов, их бифуркаций и образования геометрических сингулярностей проявляются на исходно криволинейных замкнутых фронтовых поверхностях. Поэтому в данной работе исследованы явления излучения разрывных волн из сферических источников. При этом более сложные формы принимают и фронты волн.

### §3. Методика численного исследования.

Рассмотрим случаи, когда размеры источника достаточно малы по сравнению с геометрией волновых фронтов, что позволяет принять его в виде точки. Поместим в него начало прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , ось  $Ox_2$  которой совпадает с осью симметрии упругих характеристик и плотности трансверсально-изотропной среды. Тогда для исследования эволюции поверхностей фронтов ударной волны достаточно построения их сечений любой плоскостью, которой принадлежит ось  $Ox_2$ , т.е. решать плоскую задачу. Выберем в плоскости решения задачи некоторую последовательность  $m$  направлений фазовых скоростей волны заданной поляризации, определяемые векторами  $\vec{n}_m^{(0)}$ . Для каждого из них построим матрицу (6) и определим ее собственные значения и векторы. Для трансверсально-изотропных упругих сред, упругие характеристики которых имеют ту же ось симметрии, что и константы упругости, фазовая скорость  $v_m^{(3)}$  всегда равна нулю. Поэтому векторы поляризации и компоненты векторов рефракции вычисляются только для скоростей  $v_m^{(1)}$  и  $v_m^{(2)}$ . Частные производные приведенных параметров упругости по координатам  $\partial \lambda(x_1, x_2) / \partial x_k$  для  $k = 1, 2$  вычисляются аналитически или численно в зависимости от вида функции  $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}(x_1, x_2) / \rho(x_1, x_2)$ . Дальнейшие действия заключаются в определении для каждого направления  $\vec{n}_m$  по формулам (15) величин  $\xi_k^{(m)}$  и  $\eta_k^{(m)}$  и численном интегрировании уравнений методом Рунге – Кутты. Полученные координаты  $x_k^{(m)}$  точек лучей позволяют построить сетку лучей-фронтов импульсной разрывной волны вплоть до рассматриваемого значения параметра  $\tau$ .

### §4. Анализ результатов.

В общем случае динамические свойства неоднородной трансверсально-изотропной упругой среды определяются пятью функциями ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $p$ ) ее упругих характеристик и функцией ( $\rho$ ) ее плотности. Анализ особенностей перестройки фрон-

тов разрывных волн при различных сочетаниях разных видов этих функций представляется необозримой задачей. Поэтому ниже представлены результаты расчетов для простейших случаев, для которых параметры анизотропии  $l$ ,  $m$ ,  $p$  изменяются линейно вдоль оси  $Ox_3$ .

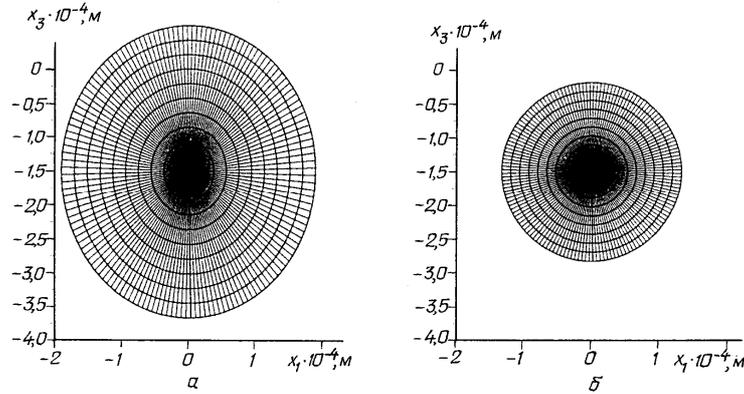


Рис. 2

На рис. 2 в плоскости  $x_1Ox_3$  показаны сетки лучей и фронтов для квазипродольной (а) и квазипоперечной (б) разрывных волн, инициированных мгновенным приложением к поверхности сферической плоскости равномерно распределенного нормального давления. Отметим, что в связи с анизотропией физических свойств породы при приложении к ее свободной поверхности нормального давления, в общем случае, от нее отходит не только квазипродольная волна (как это бывает в изотропных средах), но и квазипоперечная волна. Формы сечений фронтов этих волн отражены на рис. 2 (а, б), соответственно. Физические характеристики среды приняты в виде:  $\lambda = 3,4 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 1,36 \cdot 10^{11}$  Па;  $m = -0,1\mu$ ;  $l = \lambda(\beta_0 + \beta x_3)$ ;  $p = -0,3(\lambda + 2\mu)$ ;  $\beta_0 = -0,5$ ;  $\beta = 6 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ ;  $\rho = 2760 \text{ кг/м}^3$ . При этом матрица  $(C_{\alpha\beta})$  имеет структуру

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_3) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_3) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_3) & \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_3) & \lambda + 2\mu - p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

четыре ее элемента являются переменными, а формы фронтов как  $qP$ -, так и  $qS$ -волн остаются почти сферическими и на них не возникают особенности; незаметно также и искривление лучей. Однако, если придать новые значения параметрам  $m = 0,1\mu$ ,  $\beta_0 = 0,3$ ,  $p = 0,5(\lambda + 2\mu)$ , то формы фронтов заметно перестраиваются (рис. 3), а на поверхности  $qS$ -волны образовались бифуркационные особенности типа ласточкиных хвостов (рис. 3, б).

Трансформирование фронтов становится более заметным при изменении параметра  $p$  по закону  $p = (\lambda + 2\mu)(\gamma_0 + \gamma x_3)$ ;  $\gamma_0 = 0,3$ ;  $\gamma = 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  (рис. 4), хотя эта функция входит лишь в один диагональный коэффициент; заметно также искривление лучей и общая асимметрия фронтов вдоль оси  $Ox_3$ .

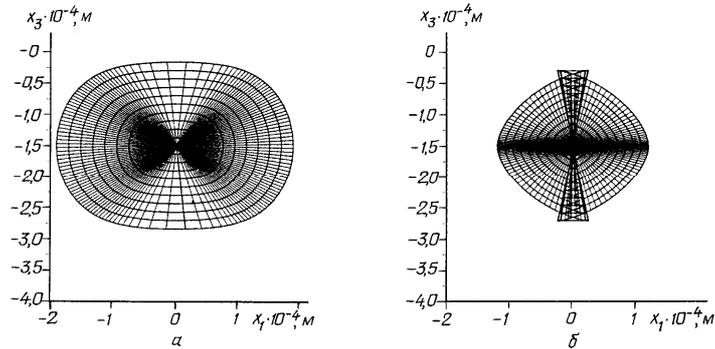


Рис. 3

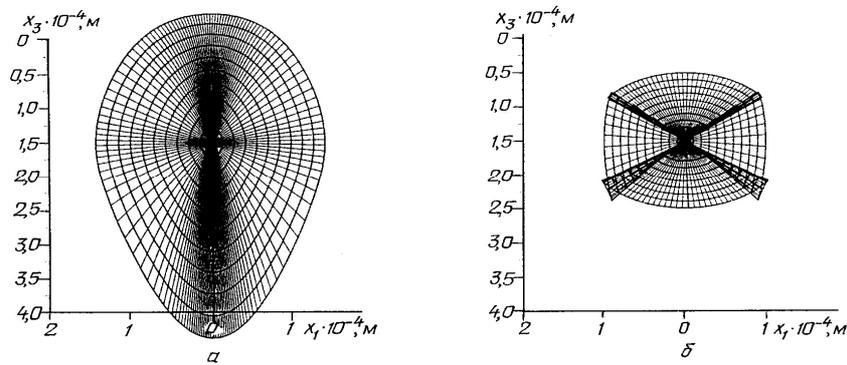


Рис. 4

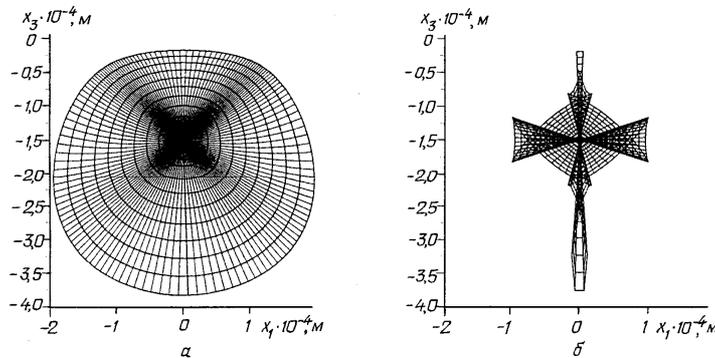


Рис. 5

В наибольшей мере свойства неоднородности среды проявляются с изменением параметра  $m$ , который входит в два диагональных элемента матрицы (1). Рис. 5, а, б иллюстрирует сетку лучей и фронтов при  $m = \mu(0,1 + 5 \cdot 10^{-4} x_3)$ . Здесь лучи  $qP$ -волны являются более криволинейными (рис. 5, а), а фронты  $qS$ -волны настолько искажаются, что каустики накладываются друг на друга (рис. 5, б). Отметим, что в рамках идеальной теории упругости интенсивности напряжений на каустиках стремятся к бесконечности.

При решении задач о распространении упругих волн в неоднородных средах необходимо также учитывать, что характер неоднородности упругих свойств среды не может быть произвольным и компоненты тензора  $(C_{\alpha\beta})$  должны удовлетворять неравенствам

$$c_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |C_{\alpha\beta}| > 0, \quad (16)$$

обеспечивающим положительную определенность квадратичной формы потенциальной энергии элемента упругой среды в рассматриваемой точке  $x_1, x_2, x_3$ .

Невыполнение условий (16) приводит к появлению комплексных корней в системе (5), что противоречит смыслу задачи, поскольку величины скорости  $v^{(r)}$  распространения волн могут быть только действительными числами. На практике такие эффекты могут возникать в упругой среде с так называемой искусственной анизотропией, вызванной преднапряжением среды. Тогда в области, где условия (16) не удовлетворяются, среда оказывается нестабильной и упругие волны в ней распространяться не могут.

### Заключение.

1. На основе нулевого приближения лучевого метода поставлена задача о распространении и перестройке фронтов разрывных квазипродольных и квазипоперечных волн, испускаемых из сферического источника в неоднородной трансверсально-изотропной упругой среде.

2. Методом компьютерного моделирования установлено, что в зависимости от значений параметров анизотропии и их неоднородности по пространственным координатам волновые лучи могут испытывать слабые или существенные искривления, а перестройка фронтов может сопровождаться образованием на них геометрических особенностей, на которых в рамках идеальной теории упругости напряжения неограниченно возрастают.

3. Показано, что в некоторых зонах упругой среды в силу неоднородности ее физических свойств могут не выполняться критерии положительной определенности квадратичной формы ее потенциальной энергии. Упругие волны в таких зонах не распространяются.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про поширення і трансформування фронтів розривних хвиль у неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах. Запропоновано методику побудови еволюціонуючої системи променів і фронтів. Для різних значень параметрів анізотропії та неоднорідності пружного середовища досліджено випадки формування геометричних особливостей на поверхнях фронтів.

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Едиториал, 2004. – 128 с.
2. Арнольд В.И. Особенности систем лучей // Успехи мат. наук. – 1983. – 38, № 2. – С. 77 – 147.
3. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, № 3. – С. 394 – 402.
4. Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболическими поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофиз. журнал. – 2005. – 27, № 3. – С. 418 – 426.
5. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Дифракция разрывных волн на эллипсоидных поверхностях раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 10. – С. 98 – 106.
6. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
7. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Л.: Наука, 1980. – 280 с.
8. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К.: Наук. думка, 1988. – 220 с.
9. Bruce W.J., Giblin P.G. Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
10. Baranovski Z., Lugovoy P.Z. Stress-Strain State near Mine Workings in Anisotropic Rock Masses under the Action of Discontinuous Waves // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 4 – P. 406 – 412.
11. Gulyaev V.I., Vashchilina E.V., Borshch E.I. Spiral Waves in Rotating Twisted Elastic Pipes // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 3 – P. 345 – 352.
12. Gulyaev V.I., Ivanchenko G.M. Critical States in Interaction of Discontinuous Waves with Interface between Elastic Media // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 2 – P. 177 – 186.
13. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – 40. – P. 237 – 247.
14. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Diffraction of a Plane Acoustic Wave by a Rigid Sphere in a Cylindrical Cavity: An Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 4 – P. 424 – 432.
15. Lugovoy P.Z., Gulyaev V.I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505. Shock Compression of Condensed Matter – 1999 / Eds. M.D. Furnish, L.C. Chhildas and R.S. Nixon // Proc. Conf. Amer. Phys. Soc. – Snowbird, Utah, USA. – P. 1287 – 1290.

Поступила 10.11.2009

Утверждена в печать 21.10.2010