

Н. В. Никитина

О существовании гомоклинической траектории с симметрией в трехмерных системах

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Приводятся условия существования гомоклинической траектории в системе, заданной в трехмерном пространстве. Рассмотрена диссипативная система с симметрией.

Работа нацелена на классификацию трехмерных систем, которые порождают периодические орбиты из гомоклинических петель. Эти вопросы широко обсуждались в работах [1, 2]. Гомоклинические траектории (ГТ) играют важную роль в теории бифуркаций и в механизме образования странного аттрактора [1–7]. Напомним (см. [8]), что траектория $x(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in R^n,$$

с гладкой вектор-функцией $F(x)$ называется гомоклинической, если существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_2. \quad (1)$$

Рассмотрим геометрический аспект проблемы. *Нахождение геометрической симметрии двумерной системы тождественно выполнению условия (1).* Представим в виде двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y),$$

где $x, y \in R$ и $F_x \in C(R^2, R)$, $F_y \in C(R^2, R)$ и $F_i(0, 0) = 0$ ($i = 1, 2$), нелинейный осциллятор $\ddot{x} - a\dot{x} + x + ax^3 = 0$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = ay - x - ay^3. \quad (2)$$

Колесания осциллятора (2), имеющего особую точку — неустойчивый фокус, образуют аттрактор благодаря нелинейной составляющей ($-ay^3$).

Нелинейная система (2) имеет на плоскости xy кососимметрию траектории, так как удовлетворяет определенным условиям [9]

$$F_1(-x, y) = -F_1(x, -y), \quad F_2(-x, y) = -F_2(x, -y). \quad (3)$$

Линейная система, соответствующая системе (2), имеет тенденцию к кососимметрии, так как удовлетворяет условию (3), но выполнение условия (1) возможно лишь в нелинейной системе. Удовлетворение условию (3) приводит к кососимметрии траектории на плоскости xy в том случае, когда нелинейность имеет вид $(-x^2y)$ (осциллятор Ван дер Поля)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = ay - x - ax^2y.$$

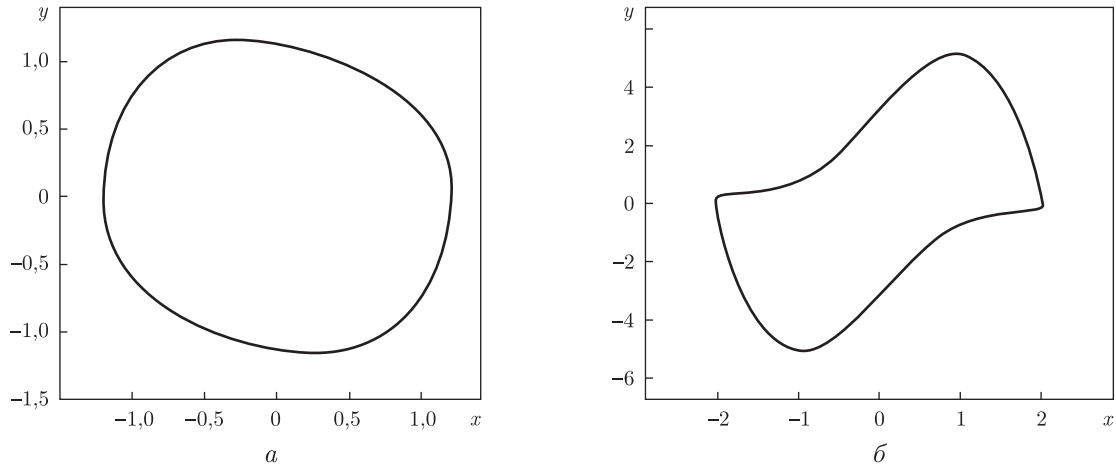


Рис. 1

На рис. 1, *a*, *б* приведены фазовые портреты с кососимметрией осциллятора (2) (параметр $a = 0,7$) и осциллятора Ван дер Поля (параметр $a = 3$).

Трехмерные системы. Траектории простых трехмерных систем обнаруживают симметрию проекций на координатные плоскости и этим качеством можно пользоваться для установления существования ГТ с определенной формой симметрии. Рассмотрим систему, которая носит название “модель устойчивости средней фирмы” [10, 11]

$$\dot{x} = -\nu x + \epsilon y, \quad \dot{y} = \mu(x + y) - \beta xz, \quad \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy. \quad (4)$$

Система (4) связывает величины кредита x , капитала y и численности сотрудников z с помощью положительных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \mu, \nu$. Определим особые точки системы (4). Их будет три:

$$O(0, 0, 0), \quad A\left(\sqrt{\frac{\gamma\mu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\nu}}, \sqrt{\frac{\gamma\mu\nu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\epsilon^2}}, \frac{\mu(\nu + \epsilon)}{\beta\epsilon}\right),$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{\gamma\mu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\nu}}, -\sqrt{\frac{\gamma\mu\nu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\epsilon^2}}, \frac{\mu(\nu + \epsilon)}{\beta\epsilon}\right).$$

Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ в системе (4) от частных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и составим уравнения в вариациях

$$\delta\dot{x} = -\nu\delta x + \epsilon\delta y, \quad \delta\dot{y} = (\mu - \beta\bar{z})\delta x + \mu\delta y - \beta\bar{x}\delta z, \quad \delta\dot{z} = -\gamma\delta z + \alpha(\bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y). \quad (5)$$

Характеристическое уравнение системы (5) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(\gamma + \nu - \mu) + \lambda(\gamma(\nu - \mu) - \mu(\nu + \epsilon) + \beta(\alpha\bar{x}^2 + \epsilon\bar{z})) + \gamma(-\mu(\nu + \epsilon) + \epsilon\beta\bar{z}) + \alpha\beta\bar{x}(\nu\bar{x} + \epsilon\bar{y}) = 0. \quad (6)$$

С помощью уравнения (6) можно определить характеристические показатели любой точки в поле трехмерного пространства системы (4). В точке O , например, уравнение (6) приобретает вид

$$(\lambda + \gamma)(\lambda^2 + \lambda(\nu - \mu) - \mu(\nu + \epsilon)) = 0,$$

из которого находим корни

$$\lambda_{1,2} = -(\nu - \mu)/2 \pm \sqrt{(\nu - \mu)/2)^2 + \mu(\nu + \epsilon)}, \quad \lambda_3 = -\gamma. \quad (7)$$

Поскольку система подвергалась качественному исследованию, воспользуемся выбором параметров, приведенном, например, в [11],

$$(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \nu) = (4; 8; 1; 2, 1; 4, 1); \quad \gamma \in (2, \dots, 2, 3345). \quad (8)$$

Особая точка O системы (4) является седлоузлом для интервала рассматриваемых параметров (8). Будем рассматривать *седловую величину* системы (4) для особых точек и точек, находящихся на траектории (термин *седловая величина* взят из [1, 2]). Седловая величина в точке O , согласно (7), равна

$$\sigma_O = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0 \quad (9)$$

для параметров (8).

Выделим в правой части уравнения (5) слагаемые, которые определяют линейную часть системы (4). Остальные слагаемые содержат частные решения \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} . Анализ последних может показать, что эти члены могут влиять лишь на мнимую часть характеристических показателей. Тогда седловая величина для всех точек пространства, которое порождено системой дифференциальных уравнений, будет одинаковой.

О бифуркациях системы (4). Приведем теорему Гробмана–Хартмана (см. [1]), которая будет полезна далее.

Пусть точка O есть грубое состояние равновесия. Тогда существуют окрестности U_1 и U_2 , в которых исходная и линеаризованная системы топологически эквивалентны.

Запишем уравнения в вариациях (5) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & \epsilon & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta\bar{z} & 0 & -\beta\bar{x} \\ \alpha\bar{y} & \alpha\bar{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В уравнениях (10) справа первая матрица тождественна линейной матрицы системы (4), вторая соответствует той части уравнений (5), которая содержит частные решения \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} . Докажем следующее утверждение

Утверждение 1. *Пусть вторая матрица в системе в вариациях (10) имеет такие характеристические числа: мнимые и одно нулевое. Тогда в окрестности точки O системы (4) существует поле седлоузловых точек, которые переходят в седлофокусные и седловая величина σ , полученная в соответствии с определенными значениями параметров, будет одинаковой для всех точек трехмерного пространства, включая особые точки.*

Доказательство. Первая матрица системы (10) имеет спектр, согласно формулам (7). Вторая матрица имеет следующие характеристические числа:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\beta\bar{x}^2}, \quad \bar{\lambda}_3 = 0. \quad (11)$$

Таким образом, бифуркационный процесс в поле трехмерной системы (4) происходит в соответствии с теоремой Гробмана–Хартмана. Окрестность, заполненная седлоузловыми точками, переходит седлофокусный континуум. Седлофокусная петля имеет отрицательную седловую величину σ_i во всех точках траектории (для рассматриваемых параметров (8))

$$\sigma_i = \sigma_A = \sigma_B = \sigma_O < 0. \quad (12)$$

Спектр характеристических показателей Ляпунова системы (4) удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0.$$

Полагаем, что утверждение 1 устанавливает, что седлофокусная петля, для которой справедливо утверждение 1, имеет гомоклиническую траекторию, т.е. выполнение условий (1).

О симметрии системы (4). В пределах параметров (8) рассмотрим движение изображающей точки на плоскости xy , которое представим двухмерной системой

$$\dot{x} = -\nu x + \epsilon y, \quad \dot{y} = \mu(x + y). \quad (13)$$

Движение по двум плоскостям xz , yz представлены двумя уравнениями, которые не связаны друг с другом: $\dot{x} = -\nu x$, $\dot{z} = -\gamma z$; $\dot{y} = \mu y$, $\dot{z} = -\gamma z$.

Утверждение 2. Пусть трехмерная система, согласно утверждению 1, имеет седловую петлю с отрицательной седловой величиной (12). Уравнения движения на одной из плоскостей удовлетворяют условиям (3). Тогда гомоклиническая траектория системы (4) может иметь кососимметрию в соответствующей плоскости.

Доказательство. Линейная система (13) имеет тенденцию к кососимметрии, так как удовлетворяет условию (3). В плоскостях xz , yz траектория по переменным z стремится к нулю, по переменной y — уходит. При расширении окрестности нуля траектория системы (4) становится седлофокусной и притягивающей петлей, так как точки на траектории имеют такие характеристические показатели: $Re\lambda_1 < 0$, $Re\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. Система (13) не показывает проекцию системы (4) на плоскость xy , но указывает на то, что эта проекция может иметь кососимметрию.

На рис. 2 приведены кососимметричные проекции системы (4) на плоскость xy (рис. 2, а при $\gamma = 2$, рис. 2, б, в при $\gamma = 2,3345$). При увеличении параметра, влияющего на диссипацию системы ($\gamma = 2,3345$), точка O включена в петлю траектории (рис. 2, б, в). На рис. 2, б полужирной линией обозначены траектории, содержащие седлофокусные точки, тонкой линией — седлоузловые. Этот численный результат получен при решении уравнения (6). Частные решения \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , которые включены в уравнение (6), соответствуют решению системы (4).

Дальнейшее увеличение параметра γ приводит к тому, что система организует траектории относительно особых точек A , B . На уровне физических представлений: увеличение диссипации вызывает увеличение притяжения, увеличение отрицательной седловой величины σ_i во всех точках траектории, что приводит к разделению предельного цикла на два.

На рис. 3, а, б, в представлены проекции на координатные плоскости при $\gamma = 2,4$.

Заметим, что странный аттрактор рождается за пределами параметров (8). При сравнительно невысокой диссипации области существования замкнутой траектории относительно

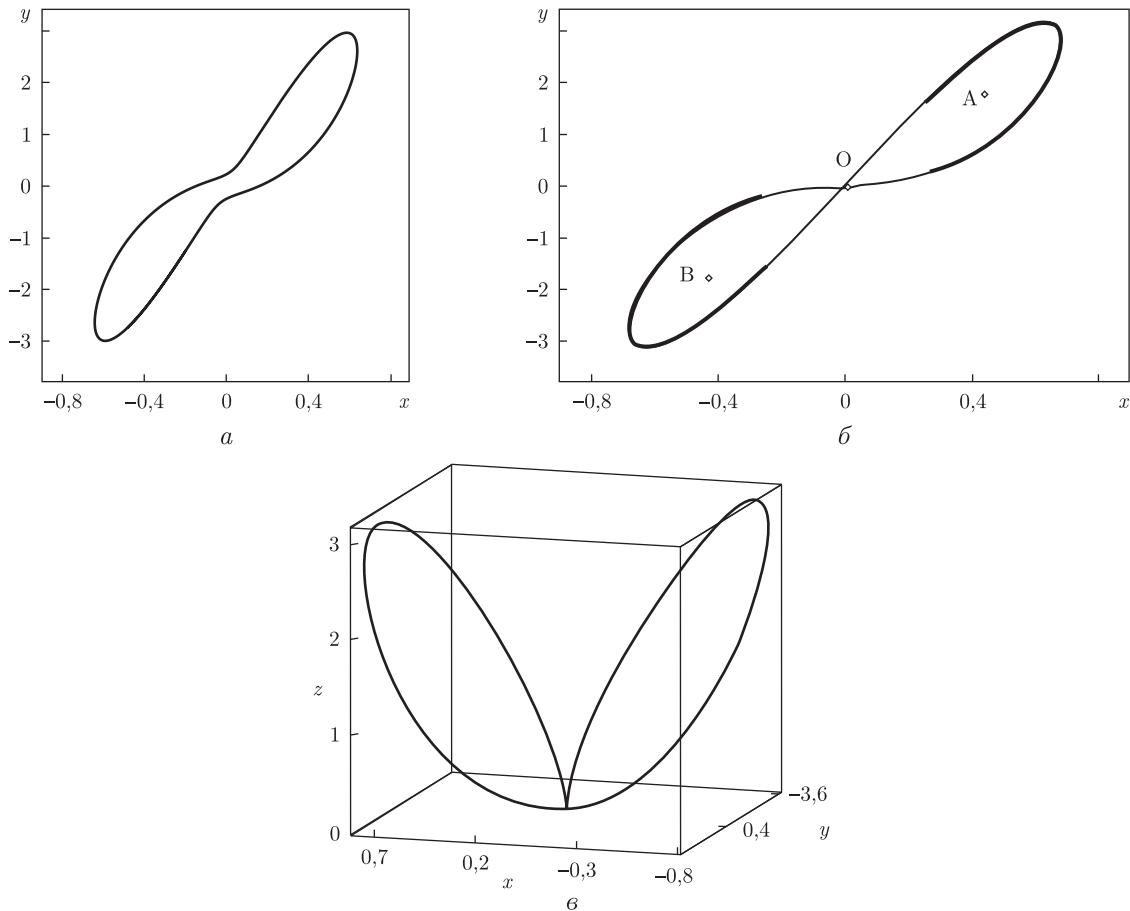


Рис. 2

точек A и B пересекаются. Порождается орбитная неустойчивость, которая сопровождается перескоком изображающей точки с одной орбиты на другую.

Система Лоренца. Покажем, что схожесть двух систем (Лоренца и модели устойчивости средней фирмы) связана с топологией трехмерного пространства. Система Лоренца

$$\dot{x} = s(-x + y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy, \quad (14)$$

где b, r, s — положительные параметры, имеет следующие уравнения в вариациях:

$$\delta\dot{x} = -s\delta x + s\delta y, \quad \delta\dot{y} = (r - \bar{z})\delta x - \delta y - \bar{x}\delta z, \quad \delta\dot{z} = -b\delta z + \bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y.$$

Система (14) имеет такие особые точки:

$$\begin{aligned} O(0, 0, 0), \quad A\left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right), \\ B\left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right). \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}.$$

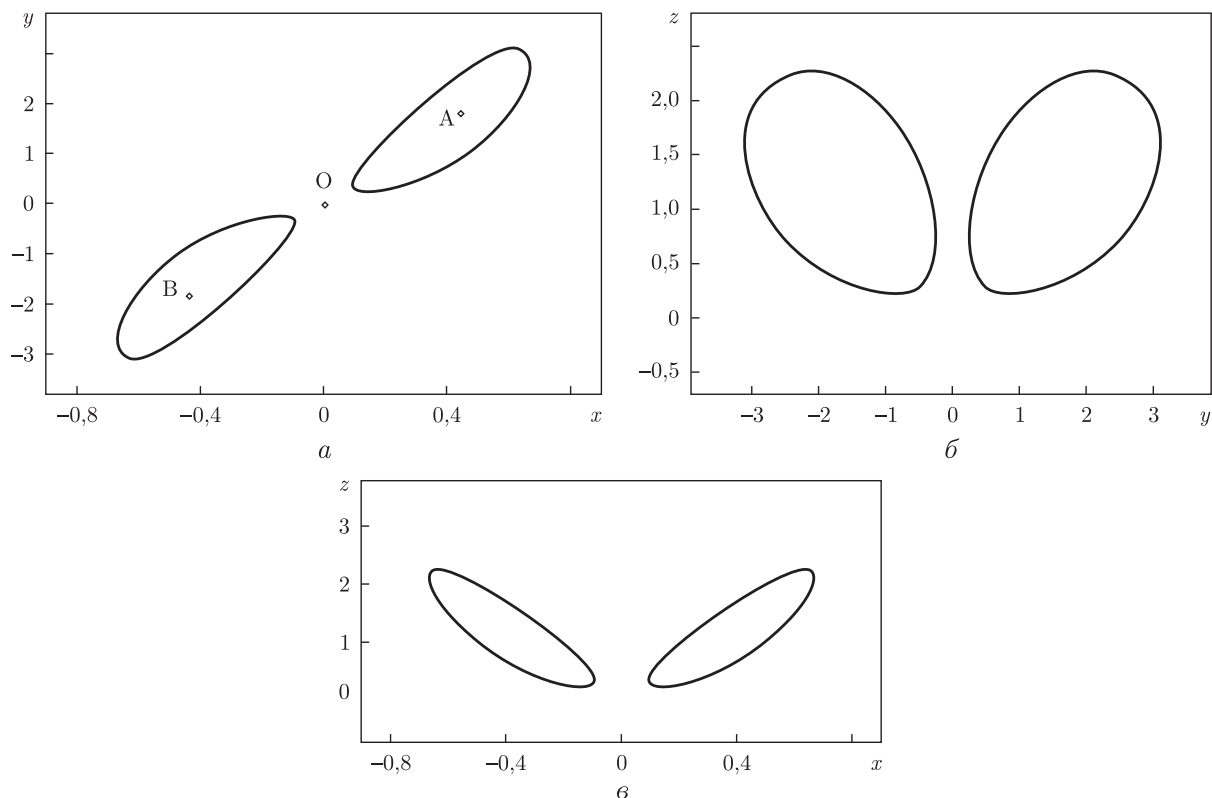


Рис. 3

Первая матрица в правой части системы (15) имеет спектр линейной системы, вторая имеет характеристические показатели

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}^2}, \quad \bar{\lambda}_3 = 0.$$

Для системы Лоренца имеет место утверждение 1.

Приведем характеристическое уравнение системы в вариациях

$$\lambda^3 + \lambda^2(s + b + 1) + \lambda(s(1 - r + \bar{z}) + b(s + 1) + \bar{x}^2) + s(b(1 - r + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{x} + \bar{y})) = 0. \quad (16)$$

На рис. 4, а, б приведен фазовый портрет и наглядное изображение предельного цикла системы (14) при следующих значениях параметров: $(b, r, s) = (8/3; 148, 4; 10)$. На рис. 4, а полужирными линиями отмечены совокупности точек траектории седлофокусного характера, тонкими линиями — седлоузловые.

Таким образом, в данной работе установлено существование симметрии, ГТ и указаны оценки характеристических показателей Ляпунова в системах, которые объединены определенным свойством топологического характера. Доказательство существования гомоклинической траектории приведено на основе определенной специфики топологии трехмерного пространства систем (4), (14). Отметим, что условие кососимметрии из [9] возникло под влиянием теорем о симметрии из [12]. Доказательство существования гомоклинической траектории можно осуществить также на основе принципа симметрии применительно к трехмерным системам.

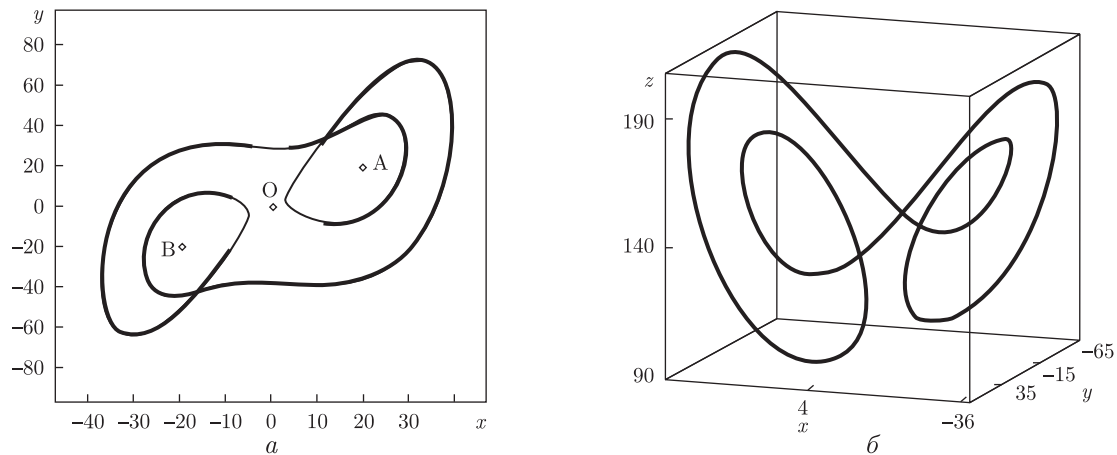


Рис. 4

1. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва; Ижевск: ИКИ, 2004. – 414 с.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. – Москва; Ижевск: Ин-т компьютерн. исслед., 2009. – 546 с.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981. – 568 с.
4. Анципенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – Москва: Наука, 1990. – 312 с.
5. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
6. Belhaq M., Lakrad F. Analytics of homoclinic bifurcations in three-dimensional systems // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. – 2002. – **12**, No 11. – P. 2479–2486.
7. Leonov G. A. Strange attractors and classical stability theory. – St.-Peterburg: Univ. Press, 2008. – 160 p.
8. Леонов Г. А. Задача Трикоми о существовании гомоклинических траекторий в диссипативных системах // Прикл. мех. и мат. – 2013. – **77**, вып. 3. – С. 410–421.
9. Никитина Н. В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – Киев: Феникс, 2012. – 235 с.
10. Шаповалов В. И., Каблов В. Ф., Башмаков В. А., Авакумов В. Е. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы // Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А. А. Колесникова. – Москва: Физматлит, 2004. – С. 454–464.
11. Гурина Т. А., Дорофеев И. А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы // Динамич. системы. – 2010. – **77**, вып. 28. – С. 63–68.
12. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – Москва; Ленинград: Гостехтеориздат, 1949. – 550 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 24.12.2013

Н. В. Нікітіна

Про існування гомоклінічної траєкторії з симетрією у тривимірних системах

Встановлено умови існування гомоклінічної траєкторії у системі, заданій у тривимірному просторі. Розглянуто дисипативну систему з симетрією.

N. V. Nikitina

About the existence of a homoclinic trajectory with symmetry in the three-dimensional systems

The conditions of existence of a homoclinic trajectory are obtained for a system set in the three-dimensional space. The dissipative system with symmetry is considered.