



УДК 517.977.56

М. М. Копець

## Оптимальне керування процесом нагрівання тонкого стержня

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

*Розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом нагрівання тонкого стержня. Припускається одночасне використання розподілених і граничних керувань. Для цієї задачі пропонується метод множників Лагранжа, причому функція Лагранжа включає в себе не тільки рівняння з частинними похідними, але і крайові умови. Для розглядуваної задачі оптимізації отримано необхідні умови оптимальності. Аналіз цих умов дав можливість вивести інтегро-диференціальне рівняння Ріккати.*

Задачі оптимального керування процесами, що описуються рівняннями з частинними похідними, є досить актуальними. Їх дослідженню присвячена значна кількість робіт. Особливе місце серед цих задач займає лінійно-квадратична задача, тобто коли процес описується лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними і цільовий функціонал є квадратичним. У теорії оптимального керування лінійно-квадратична задача відіграє важливу роль. Вона виникає при побудові оптимального керування за принципом оберненого зв'язку [1, 2], в деяких задачах теорії диференціальних ігор [3]. Робота присвячена лінійно-квадратичній задачі оптимального керування процесом нагрівання тонкого стержня. Для отримання необхідних умов оптимальності в даній роботі застосовано метод множників Лагранжа. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Вперше для такої задачі із застосуванням дельта-функції Дірака отримано інтегро-диференціальне рівняння Ріккати.

**Постановка задачі.** Нехай керований процес описується таким рівнянням з частинними похідними:

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x), \quad (1)$$

$$t_0 \leq t \leq t_1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

де дійсні числа  $a, l > 0, t_0 \geq 0, t_1 > 0$  відомі. Для рівняння (1) задано початкову умову

$$z(t_0, x) = f(x) \quad (3)$$

та крайові умови

$$\frac{\partial z(t, 0)}{\partial x} - h_1 z(t, l) = 0, \quad \frac{\partial z(t, l)}{\partial x} + h_2 z(t, l) = 0, \quad (4)$$

де  $\partial z(t, 0)/\partial x$  та  $\partial z(t, l)/\partial x$  — значення частинної похідної  $\partial z(t, x)/\partial x$  при  $x = 0$  і  $x = l$  відповідно, дійсні числа  $h_1 > 0, h_2 > 0$  і функція  $f(x) \in L_2(0, l)$  задані. Функція  $u(t, x)$  називається допустимим керуванням, якщо  $u(t, x) \in L_2(\Omega)$ , де множина  $\Omega$  задана так:

$$\Omega = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_1, 0 \leq x \leq l\}.$$

Для фіксованого допустимого керування  $u(t, x)$  розв'язком  $z(t, x)$  задачі (1)–(3) вважається узагальнений розв'язок  $z(t, x) \in L_2(\Omega)$ . Рівняння (1) — це диференціальне рівняння з частинними похідними параболічного типу. Відомо, що рівняння (1) описує процес поширення тепла в тонкому стержні [4, с. 178].

Далі розглянемо такий критерій оптимальності:

$$I(u, z) = \frac{1}{2} \int_0^l z^2(t_1, x) dx + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [z^2(t, x) + u^2(t, x)] dx dt. \quad (5)$$

Задача оптимізації (1)–(4) полягає у знаходженні допустимого керування  $u(t, x)$ , на якому функціонал (4) досягає свого найменш можливого значення. Якщо таке допустиме керування  $u(t, x)$  існує, то його називають *оптимальним керуванням*.

**Необхідні умови оптимальності.** Необхідні умови оптимальності для сформульованої вище задачі оптимізації можна знайти за допомогою методу множників Лагранжа [5, с. 31]. З цією метою розглянемо допоміжний функціонал

$$\begin{aligned} J(p, u, z) = & \frac{1}{2} \int_0^l z^2(t_1, x) dx + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [z^2(t, x) + u^2(t, x)] dx dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l p(t, x) \left[ a \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) - \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \right] dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} a p(t, 0) \left[ \frac{\partial z(t, 0)}{\partial x} - h_1 z(t, 0) \right] dt - \int_{t_0}^{t_1} a + p(t, l) \left[ \frac{\partial z(t, l)}{\partial x} + h_2 z(t, l) \right] dt, \end{aligned} \quad (6)$$

де функція  $p(t, x)$  — множник Лагранжа. В такий спосіб задача (1)–(4) на умовний екстремум функціонала (4) зводиться до задачі мінімізації функціонала (5) із урахуванням умови (2). Далі, користуючись стандартним способом варіаційного числення, знайдемо приріст  $\Delta J$  функціонала (5)

$$\Delta J = J(p + \varepsilon \delta p, u + \varepsilon \delta u, z + \varepsilon \delta z) - J(p, u, z).$$

Після очевидних спрощень (розкриття дужок, зведення подібних членів та інтегрування частинами) отримаємо таке співвідношення:

$$\begin{aligned}
\Delta J = & \varepsilon \int_0^l [z(t_1, x) - p(t_1, x)] \delta z(t_1, x) dx + \\
& + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \left[ z(t, x) + a \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} \right] \delta z(t, x) + [u(t, x) + p(t, x)] \delta u(t, x) \right] dx dt - \\
& - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a \left[ \frac{\partial p(t, 0)}{\partial x} - h_1 p(t, 0) \right] \delta z(t, 0) dt - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a \left[ \frac{\partial p(t, l)}{\partial x} + h_2 p(t, l) \right] \delta z(t, l) dt + \\
& + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \delta p(t, x) \left[ a \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) - \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \right] dx dt + \\
& + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a \delta p(t, 0) \left[ \frac{\partial z(t, 0)}{\partial x} - h_1 z(t, 0) \right] dt - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a \delta p(t, l) \left[ \frac{\partial z(t, l)}{\partial x} + h_2 z(t, l) \right] dt - \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \int_0^l [\delta z(t_1, x)]^2 dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [[\delta z(t, x)]^2 + [\delta u(t, x)]^2] dx dt \right]. \tag{7}
\end{aligned}$$

Беручи до уваги рівність (6), приходимо до такого висновку.

**Теорема 1.** *Оптимальне керування в задачі (1)–(4) єдине і визначається із співвідношень*

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x), \tag{7a}$$

$$z(t_0, x) = f(x), \quad \frac{\partial z(t, 0)}{\partial x} - h_1 z(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial z(t, l)}{\partial x} + h_2 z(t, l) = 0, \tag{7б}$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -a \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2} - z(t, x), \tag{7в}$$

$$p(t_1, x) = z(t_1, x), \quad \frac{\partial p(t, 0)}{\partial x} - h_1 z(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial p(t, l)}{\partial x} + h_2 z(t, l) = 0, \tag{7г}$$

$$u(t, x) + p(t, x) = 0. \tag{7д}$$

**Інтегро-диференціальне рівняння Ріккати.** Рівність  $p(t_1, x) = z(t_1, x)$  дає підстави вважати, що між функціями  $p(t, x)$  і  $z(t, x)$ , які задовольняють співвідношення (7а)–(7д), існує певна залежність. Шукатимемо цю залежність у вигляді

$$p(t, x) = \int_0^l R(t, x, y) z(t, y) dy. \tag{8}$$

Враховуючи співвідношення (7д), (8), (1) та використовуючи інтегрування частинами, одержуємо таку рівність:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = & \int_0^l \left[ \frac{\partial R(t, x, y)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 R(t, x, y)}{\partial y^2} - \int_0^l R(t, x, s) R(t, s, y) ds \right] z(t, y) dy + \\ & + a \left[ \frac{\partial R(t, x, 0)}{\partial y} - h_1 R(t, x, 0) \right] z(t, 0) - a \left[ \frac{\partial R(t, x, l)}{\partial y} + h_2 R(t, x, l) \right] z(t, l). \end{aligned} \quad (9)$$

З іншого боку, на підставі рівностей (7в) та (8) знаходимо

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \int_0^l \left[ a \frac{\partial^2 R(t, x, y)}{\partial x^2} + \delta(x - y) \right] z(t, y) dy, \quad (10)$$

де  $\delta(x)$  — дельта-функція Дірака. В результаті порівняння співвідношень (9) та (10) приходимо до таких рівностей:

$$\frac{\partial R(t, x, y)}{\partial t} + a \left[ \frac{\partial^2 R(t, x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(t, x, y)}{\partial y^2} \right] - \int_0^l R(t, x, s) R(t, s, y) ds + \delta(x - y) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial R(t, x, 0)}{\partial y} - h_1 R(t, x, 0) = 0, \quad \frac{\partial R(t, x, l)}{\partial y} + h_2 R(t, x, l) = 0. \quad (12)$$

Крім того, рівність  $p(t_1, x) = z(t_1, x)$  приводить до співвідношення

$$R(t_1, x, y) = \delta(x - y). \quad (13)$$

В результаті можна сформулювати таке твердження.

**Теорема 2.** *Функція  $R(t, x, y)$  — це розв'язок інтегро-диференціального рівняння (11), задовольняє крайові умови (12) та додаткову умову (13). Якщо відома функція  $R(t, x, y)$ , то оптимальне керування  $u(t, x)$  має вигляд*

$$u(t, x) = - \int_0^l R(t, x, y) z(t, y) dy,$$

де функція  $z(t, y)$  є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial z(t, y)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 z(t, y)}{\partial y^2} - \int_0^l R(t, y, s) z(t, s) ds,$$

задовольняє початкову умову

$$z(t_0, y) = f(y)$$

та крайові умови

$$\frac{\partial z(t, 0)}{\partial y} - h_1 z(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial z(t, l)}{\partial y} + h_2 z(t, l) = 0.$$

Таким чином, у роботі розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом нагрівання тонкого стержня. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Вперше для такої задачі з використанням дельта-функції Дірака одержано інтегро-диференціальне рівняння Ріккати.

1. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. – Москва: Наука, 1978. – 551 с.
2. *Naidu D. S.* Optimal control systems. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 433 p.
3. *Жуковский В. И., Чикрий А. А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1994. – 320 с.
4. *Крылов Н. А.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. – Ленинград: Изд-во АН СССР, 1933. – 472 с.
5. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1977. – 480 с.

НТУ України “Київський політехнічний інститут”

Надійшло до редакції 20.12.1013

**М. М. Копец**

### **Оптимальное управление процессом нагревания тонкого стержня**

*Рассматривается линейно-квадратическая задача оптимального управления процессом нагревания тонкого стержня. Предполагается одновременное использование распределенных и граничных управлений. Для этой цели предлагается метод множителей Лагранжа, причем функция Лагранжа включает в себя не только уравнение с частными производными, но и краевые условия. Для рассматриваемой задачи оптимизации получены необходимые условия оптимальности. Анализ этих условий дал возможность вывести интегро-дифференциальное уравнение Риккати.*

**M. M. Kopets**

### **Optimal control over the process of heating of a thin core**

*The paper is devoted to the linear-quadratic optimal control problem for the process of heating of a thin core. The simultaneous use of distributed and boundary controls is supposed. A method of Lagrange multipliers is proposed, and the Lagrange function includes not only a partial differential equation, but also boundary conditions. For the considered optimization problem, the necessary conditions of optimality are obtained. Their analysis has given chance to deduce the Riccati integro-differential equation.*