УДК 517.53

Л. О. Чернецька

Тривимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій трьох змінних

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Метод узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика поширено на тривимірний випадок. Встановлено теореми про побудову раціональних апроксимант типу Паде для функцій трьох змінних. Отримано формули для похибок апроксимацій.

Питанням побудови та дослідження апроксимацій Паде функцій багатьох змінних займаються вже протягом сорока років. Зокрема, різноманітні модифікації багатовимірних апроксимацій Паде розглядалися в роботах [1–8].

Одним з підходів до вивчення апроксимацій Паде аналітичних функцій є запропонований В. К. Дзядиком у 1981 р. метод узагальнених моментних зображень [9, 10]. В [11] цей метод поширено на випадок двовимірних послідовностей і застосовано до побудови апроксимацій Паде функцій двох змінних. У даній роботі розглядається задача про побудову апроксимант типу Паде для функцій трьох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень.

Означення. Будемо говорити, що для тривимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, якщо в просторі $\mathscr{X}$ вказано тривимірну послідовність елементів $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3}$, а в просторі $\mathscr{Y}$ — тривимірну послідовність елементів $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^3}$ такі, що

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}}\rangle, \qquad \mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^3. \tag{1}$$

Тривимірній числовій послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд від трьох змінних

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}$.

Визначати аналоги апроксимант Паде для рядів вигляду (2) можна за різними схемами (див. [12, с. 323]). Для цього фіксуються певні обмежені області $\mathscr{N}$ та $\mathscr{D}$ з $\mathbb{Z}_+^3$ і будуються алгебраїчні многочлени від трьох змінних

$$P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{N}} p_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

$$Q_{\mathscr{D}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{D}} q_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

© Л. О. Чернецька, 2014

для яких коефіцієнти $e_{\mathbf{k}}$ в розкладі

$$f(\mathbf{z}) - \frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathscr{D}}(\mathbf{z})} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3} e_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

дорівнюють нулю при $\mathbf{k} \in \mathscr{E}$, де $\mathscr{E}$ — деяка обмежена підмножина $\mathbb{Z}_+^3$.

Має місце такий результат.

Теорема 1. *Нехай формальний степеневий ряд від трьох змінних має вигляд* (2) *і для тривимірної послідовності* $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3}$ *має місце узагальнене моментне зображення вигляду* (1). *Тоді якщо для деяких* $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{N}^3$ *та* $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ *існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} = \sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} y_{\mathbf{j}} \tag{3}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}\rangle = 0 \tag{4}$$

при $\mathbf{k} \in \{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \mid k_i \in [M_i, M_i+N_i], i = \overline{1,3}\} \setminus \{(M_1+N_1, M_2+N_2, M_3+N_3)\}$, *і* $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \neq 0$, *то раціональна функція*

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} = \frac{1}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})}\Bigg\{&\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}-\mathbf{j}} + \\
&+ z_1^{N_1}\sum_{k_1=0}^{N_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_2^{N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1}z_2^{N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} + \\
&+ z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{N_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1}z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{\mathbf{k}\in\Gamma_{\mathbf{M}}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}}\Bigg\},
\end{aligned}$$

де

$$\Gamma_{\mathbf{M}} = \left(\prod_{m=1}^{3}[0, M_m - 1]\right) \bigcup \big([0, M_1 - 1] \times [0, M_2 + N_2] \times [M_3, M_3 + N_3]\big) \bigcup \big([0, M_1 + N_1] \times$$
$$\times [M_2, M_2 + N_2] \times [0, M_3 - 1]\big) \bigcup \big([M_1, M_1 + N_1] \times [0, M_2 - 1] \times [0, M_3 + N_3]\big),$$

а

$$Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z}) = \sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{j}},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх*

$$\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \mid k_m \in [0, 2N_{m+M_m}], m = \overline{1,3}\} \setminus \{(2N_1 + M_1, 2N_2 + M_2, 2N_3 + M_3)\}.$$

Зауваження. В теоремі 1 та надалі під символом $\prod\limits_{i=1}^{3} X_i$ будемо розуміти декартів добуток множин X_i, тобто $\prod\limits_{i=1}^{3} X_i = \{(k_1, k_2, k_3) \mid k_i \in X_i, i = \overline{1,3}\}$.

Нехай неперервно диференційовна функція $\Phi(x_1, x_2, x_3)\colon \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ має такі властивості:

1) множина $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 | \Phi(x_1, x_2, x_3) \leqslant 0\}$ є обмеженою в $\mathbb{R}_+^3$;

2) потужність множини

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \mid \Phi(x_1, x_2, x_3) \leqslant 0\} \bigcap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | x_i \geqslant N_i + M_i, i = \overline{1,3}\}$$

дорівнює $(N_1 + 1)(N_2 + 1)(N_3 + 1) - 1$;

3) існують однозначно визначені функції

$$x_1 = \varphi_1(x_2, x_3), \qquad (x_2, x_3) \in D_{23} := \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists\, x_1 \in \mathbb{R}^1\colon \Phi(x_1, x_2, x_3) \leqslant 0\},$$
$$x_2 = \varphi_2(x_1, x_3), \qquad (x_1, x_3) \in D_{13} := \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists\, x_2 \in \mathbb{R}^1\colon \Phi(x_1, x_2, x_3) \leqslant 0\},$$
$$x_3 = \varphi_3(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in D_{12} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists\, x_3 \in \mathbb{R}^1\colon \Phi(x_1, x_2, x_3) \leqslant 0\};$$

4)

$$\varphi_1(x_2, x_3) \geqslant N_1 \qquad \forall (x_2, x_3) \in D_{23},$$
$$\varphi_2(x_1, x_3) \geqslant N_2 \qquad \forall (x_1, x_3) \in D_{13},$$
$$\varphi_3(x_1, x_2) \geqslant N_3 \qquad \forall (x_1, x_2) \in D_{12}.$$

Тоді за умов теореми 1 має місце теорема $1'$.

Теорема $1'$. *Нехай для узагальненого полінома* (3) *виконуються умови біортогональності вигляду* (4) *при* $\mathbf{k} \in \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \mid \Phi(k_1 + N_1 + M_1, k_2 + N_2 + M_2, k_3 + N_3 + M_3) \leqslant 0\}$, *і* $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \neq 0$, *тоді раціональна функція*

$$\frac{P_{\mathcal{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} = \frac{1}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})}\left\{\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}-\mathbf{j}} + \right.$$

$$+ z_1^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(k_2,k_3)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(N_2,k_3)} \sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \times$$

$$\times s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_3^{N_3} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(k_2,N_3)} \sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \times$$

$$\times s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)} \sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \times$$

$$\times s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} +$$

$$\left. + z_1^{N_1} z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} \right\},$$

де

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3} = \big([0, M_1-1] \times [0, M_2-1] \times [0, M_3-1]\big) \bigcup \\
\bigcup \big([0, M_1-1] \times [0, M_2-1] \times [M_3, M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)]\big) \bigcup \\
\bigcup \big([0, M_1-1] \times [0, M_3-1] \times [M_2, M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)]\big) \bigcup \\
\bigcup \big([0, M_2-1] \times [0, M_3-1] \times [M_1, M_1-N_1+\varphi_1(k_2,k_3)]\big) \bigcup \\
\bigcup \big([0, M_1-1] \times [M_2, M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)] \times [M_3, M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)]\big) \bigcup \\
\bigcup \big([0, M_2-1] \times [M_1, M_1-N_1+\varphi_1(k_2,N_3)] \times [M_3, M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)]\big) \bigcup \\
\bigcup \big([0, M_3-1] \times [M_1, M_1-N_1+\varphi_1(N_2,k_3)] \times [M_2, M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)]\big),
\end{aligned}$$

знаменник апроксиманти

$$Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z}) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $(k_1, k_2, k_3) \in \mathscr{E} = \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \mid \Phi(k_1, k_2, k_3) \leqslant 0\}$.

У випадку, якщо простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є роздільно неперервною [13, с. 63] і в просторі $\mathscr{X}$ задано комутуючі між собою обмежені лінійні оператори A_1, A_2, $A_3\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ такі, що

$$A_1 x_{k_1,k_2,k_3} = x_{k_1+1,k_2,k_3},$$

$$A_2 x_{k_1,k_2,k_3} = x_{k_1,k_2+1,k_3},$$

$$A_3 x_{k_1,k_2,k_3} = x_{k_1,k_2,k_3+1},$$

для $\forall \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3$, а в просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A_1^\star$, $A_2^\star$, $A_3^\star\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$, спряжені відповідно до операторів A_1, A_2 та A_3 відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (див., наприклад, [10, с. 18]), за умов теореми 1 матиме місце така формула для похибки апроксимації

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) - \frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} &= \\
&= \frac{1}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} \Biggl\{ z_1^{N_1+M_1} z_2^{N_2+M_2} z_3^{N_3+M_3} \langle \widehat{R_{z_1}}(A_1) \widehat{R_{z_2}}(A_2) \widehat{R_{z_3}}(A_3) x_{M_1,M_2,M_3}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} \rangle + \\
&+ z_1^{N_1} \sum_{k_1=N_1+M_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=N_2+M_2+1}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=N_3+M_3+1}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} \sum_{k_1=N_1+M_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1+M_1} \sum_{k_2=N_2+M_2+1}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=N_3+M_3+1}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} + \\
&+ z_1^{N_1} z_3^{N_3} \sum_{k_1=N_1+M_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3+M_3} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} + \\
&+ z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=N_2+M_2+1}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} +
\end{aligned}$$

$$+ z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2+M_2} \sum_{k_3=N_3+M_3+1}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} +$$

$$\left. + z_1^{N_1} z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma^*_{\mathbf{M}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} \right\},$$

де

$$\begin{aligned}\Gamma^*_{\mathbf{M}} = &\big([0, M_1-1] \times [N_2+M_2+1, \infty) \times [M_3, N_3+M_3]\big) \bigcup \\ &\bigcup \big([N_1+M_1+1, \infty) \times [M_2, N_2+M_2] \times [0, M_3-1]\big) \bigcup \\ &\bigcup \big([M_1, N_1+M_1] \times [0, M_2-1] \times [N_3+M_3+1, \infty)\big) \bigcup \\ &\bigcup \big([0, M_1-1] \times [0, \infty) \times [N_3+M_3+1, \infty)\big) \bigcup \\ &\bigcup \big([N_1+M_1+1, \infty) \times [0, M_2-1] \times [0, \infty)\big) \bigcup \\ &\bigcup \big([0, \infty) \times [N_2+M_2+1, \infty) \times [0, M_3-1]\big),\end{aligned}$$

а резольвентна функція визначається рівністю $\widehat{R_z}(A) = (I - zA)^{-1}$.

За умов теореми $1'$ формула для похибки апроксимації отримується аналогічно.

1. *Alabiso C., Butera P.* N-variable rational approximants and method of moments // J. Math. Phys. – 1975. – **16**, No 4. – P. 840–845.
2. *Hughes J. R.* General rational approximants in N variables // J. Approxim. Theory. – 1976. – **16**. – P. 201–233.
3. *Cuyt A.* Padé approximants for operators: theory and applications. – Berlin: Springer, 1984. – 138 p.
4. *Zhou P.* Explicit construction of multivariate Padé approximants // J. Comput. and Appl. Math. – 1997. – **79**. – P. 1–17.
5. *Guillaume P., Huard A., Robin V.* Generalized multivariate Padé approximants // J. Approxim. Theory. – 1998. – **95**. – P. 203–214.
6. *Cuyt A.* How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case? // J. Comput. and Appl. Math. – 1999. – **105**, No 1–2. – P. 25–50.
7. *Cuyt A., Driver K., Tan J., Verdonk B.* Exploring multivariate Padé approximants for multiple hypergeometric series // Adv. Comput. Math. – 1999. – **10**, No 1. – P. 29–49.
8. *Borwein P. B., Cuyt A., Zhou P.* Explicit construction of general multivariate Padé approximants to an Appell function // Ibid. – 2005. – **22**, No 3. – P. 249–273.
9. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 6. – С. 8–12.
10. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
11. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 8. – С. 1035–1058.
12. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1975. – 444 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 20.12.2013

Л. А. Чернецкая

Трехмерные обобщенные моментные представления и аппроксимации типа Паде для функций трех переменных

Метод обобщенных моментных представлений В. К. Дзядыка распространен на трехмерный случай. Установлены теоремы о построении рациональных аппроксимант типа Паде для функций трех переменных. Получены формулы для погрешностей аппроксимаций.

L. O. Chernetska

Three-dimensional generalized moment representations and Padé type approximants of three-variable functions

V. K. Dzyadyk's method of generalized moment representations is widened to the three-dimensional case. The theorems on construction of Padé type rational approximants for three-variable functions are established. The formulas for the errors of approximations are obtained.