

В. А. Михайлец, Г. А. Чеханова

**Фредгольмовые краевые задачи с параметром
на пространствах $C^{(n)}[a, b]$** *(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)*

Введены и исследованы краевые задачи, порожденные системой m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и краевыми условиями вида $Bu = c$, где линейный непрерывный оператор $B: C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m$, а m, n — натуральные числа. Установлена фредгольмовость таких краевых задач. Найдены достаточные условия непрерывности по параметру их решений вместе с производными до порядка n в равномерной норме.

1. Пусть далее числа $m, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим на конечном интервале (a, b) векторное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + A(t)y = f(t), \quad (1)$$

где комплекснозначные $(m \times m)$ -матрица-функция $A(\cdot)$ и вектор-функция $f(\cdot)$ суммируемы на $[a, b]$. Каждое решение дифференциального уравнения (1) принадлежит пространству $AC([a, b], \mathbb{C}^m)$. Поэтому можно рассмотреть вместе с уравнением (1) неоднородное краевое условие

$$Bu = c, \quad (2)$$

где вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а линейный непрерывный оператор

$$B: C([a, b], \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m. \quad (3)$$

Известно (см., например, [1]), что такой оператор допускает однозначное аналитическое представление

$$Bu = \int_a^b [d\Phi(t)]y(t), \quad (4)$$

где $\Phi(\cdot)$ — $(m \times m)$ -матрица-функция, элементы которой непрерывны справа на интервале (a, b) и имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$, $\Phi(a) = 0_m$, а интеграл понимается по Риману–Стилтьесу.

Дополнительные условия вида (3) именуют общими. Они охватывают все классические виды краевых условий. В частности, задачи Коши, двухточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые условия (см. 2 гл. II, § 5], где приведены соответствующие ссылки). Известно (см., например, [3]), что краевая задача (1), (2) является фредгольмовой.

Пусть теперь коэффициент дифференциального выражения, оператор B и правые части равенств (1), (2) зависят от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим семейство неоднородных краевых задач

$$y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad (5)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon), \quad (6)$$

где при фиксированном значении параметра ε задача (5), (6) является общей краевой. Тогда решение $y(\cdot, \varepsilon)$ также зависит от ε . В работах [3–6] найдены достаточные условия непрерывной зависимости от параметра $\varepsilon \rightarrow 0+$ решений (5), (6) в равномерной норме. Вместе с тем оставался открытым вопрос о зависимости от параметра $\varepsilon \rightarrow 0+$ производных решения $y(\cdot, \varepsilon)$ в равномерной норме. Для существования таких производных необходимо сделать дополнительные предположения относительно уравнения (1).

2. Будем предполагать далее, что в дифференциальном уравнении (1)

$$A(\cdot) \in C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}), \quad f(\cdot) \in C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^m).$$

В этом случае каждое решение уравнения (1) принадлежит банаховому пространству $C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m)$. Поэтому можно рассмотреть вместе с уравнением дополнительное неоднородное условие (2), в котором линейный непрерывный оператор

$$B: C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m. \quad (7)$$

Из строгих включений для пространств линейных непрерывных операторов

$$L(C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m), \mathbb{C}^m) \supset L(C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^m), \mathbb{C}^m)$$

следует, что с увеличением параметра n в (7) введенные нами классы краевых условий расширяются. В частности, каждый из операторов в (3) заведомо удовлетворяет условию (7). Можно показать, что каждый из операторов в (7) допускает однозначное аналитическое представление

$$By = \sum_{k=1}^n \alpha_k y^{(k-1)}(a) + \int_a^b [d\Phi(t)]y^{(n)}(t),$$

где матрицы $\alpha_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$, а матрица-функция $\Phi(\cdot)$ такая же, как и в равенстве (4). Краевые задачи с такими операторами в краевых условиях встречаются в ряде приложений и в общей постановке, по-видимому, не исследовались. Их анализу и посвящена данная работа.

Неоднородную краевую задачу (1), (2) можно записать в виде операторного уравнения

$$L_B y = (f, c),$$

где линейный оператор

$$L_B := (L, B), \quad Ly := y' + A(t)y.$$

Теорема 1. *Оператор L_B непрерывно действует из банахова пространства $C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m)$ в банахово пространство $C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^m$ и является фредгольмовым.*

Следствие 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Неоднородная краевая задача (1), (2) имеет одно решение при любых $f(\cdot) \in C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^m)$ и $c \in \mathbb{C}^m$.

2) Однородная краевая задача вида (1), (2) имеет только тривиальное решение.

3. Пусть $Y(t)$ — единственное решение (матрицант) линейного матричного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = -A(t)Y(t), \quad t \in (a, b) \quad (8)$$

с начальным условием

$$Y(t_0) = I_m, \quad t_0 \in [a, b]. \quad (9)$$

Введем метрическое пространство матриц-функций

$$\mathcal{Y}(n, m, t_0) := \{Y(t) \in C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}) : Y(t_0) = I_m, \det Y(t) \neq 0\}$$

с метрикой

$$d_n(Y, Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{(n)},$$

где $\|\cdot\|_{(n)}$ — норма в банаховом пространстве $C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m})$.

Ключевым местом в доказательстве основной теоремы работы является

Теорема 2. При каждом фиксированном значении параметров n, m, t_0 нелинейное отображение

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot)$$

в задаче (8), (9) является гомеоморфизмом банахова пространства $C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m})$ на метрическое пространство $\mathcal{Y}(n, m, t_0)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 2.1 работы [7].

4. Рассмотрим теперь параметрическое семейство неоднородных краевых задач (5), (6), где при фиксированном значении параметра ε матрица-функция $A(\cdot, \varepsilon) \in C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m})$, вектор-функция $f(\cdot, \varepsilon) \in C^{(n-1)}([a, b], \mathbb{C}^m)$, а оператор $B(\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению (7). Тогда содержателен и представляет интерес вопрос об условиях, при которых

$$\|y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0)\|_{(n)} \rightarrow 0, \quad (10)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0+$, а $\|\cdot\|_{(n)}$ — норма в пространстве $C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m)$.

Чтобы этот вопрос имел смысл, будем предполагать далее, что предельная однородная краевая задача ($f(\cdot, 0) = 0, c(0) = 0$) имеет только тривиальное решение. В силу следствия в этом случае вектор-функция $y(\cdot, 0)$ в соотношении (10) определена однозначно.

Основным результатом работы является

Теорема 3. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0+$ выполнены условия:

$$(i) \|A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0)\|_{(n-1)} \rightarrow 0;$$

$$(ii) \|f(\cdot, \varepsilon) - f(\cdot, 0)\|_{(n-1)} \rightarrow 0;$$

$$(iii) B(\varepsilon)y \rightarrow B(0)y, \quad y \in C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m); \quad c(\varepsilon) \rightarrow c(0).$$

Тогда для достаточно малых ε решения $y(\cdot, \varepsilon)$ задачи (5), (6) определены однозначно и для них выполняется предельное равенство (10).

Заметим, что в условиях теоремы 3 операторы $L_B(\varepsilon)$ сходятся к оператору $L_B(0)$ в сильной операторной топологии, но, вообще говоря, не сходятся по норме.

Замечание 1. Из теоремы Ф. Рисса о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости линейных непрерывных функционалов на пространстве $C([a, b], \mathbb{C})$ следует, что условие (iii) теоремы 3 равносильно следующему условию на матрицы $\alpha_k(\varepsilon)$ и матрицы-функции $\Phi(\cdot, \varepsilon)$, задающие операторы $B(\varepsilon)$: при $\varepsilon \rightarrow 0 +$ $\alpha_k(\varepsilon) \rightarrow \alpha_k(0)$, $c(\varepsilon) \rightarrow c(0)$, $V_a^b \Phi(\cdot, \varepsilon) = O(1)$, $\Phi(b, \varepsilon) \rightarrow \Phi(b, 0)$, $\int_a^t \Phi(s, \varepsilon) ds \rightarrow \int_a^t \Phi(s, 0) ds$, $t \in (a, b]$.

Замечание 2. Из теоремы 2 вытекает, что условие (i) теоремы 3 является необходимым для справедливости предельного равенства (10) применительно к задачам частного вида с

$$f(\cdot, \varepsilon) \equiv 0, \quad c(\varepsilon) \equiv c \in \mathbb{C}^m, \quad B(\varepsilon)y \equiv y(a).$$

Отметим также, что близкая по форме задача, где вместо пространств $C^{(n)}$ присутствуют соболевские пространства W_p^n , $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ исследована ранее в [7]. Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.1 работы [7].

Исследование В. А. Михайлеца поддержано грантом 03-01-12 совместных проектов НАН Украины и СО РАН.

1. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 704 с.
3. Кигурадзе И. Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. – Москва: ВИНТИ, 1987. – С. 3–103.
4. Ashordia M. Criteria of correctness of linear boundary-value problems for systems of generalized differential equations // Czech. Math. J. – 1996. – 46, No 3. – P. 385–404.
5. Михайлец В. А., Рева Н. В. Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.
6. Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V. Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – 65, No 1. – P. 77–90.
7. Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A. Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – 190, No 4. – P. 589–599.

*Институт математики НАН Украины, Киев
НТУ Украины “Киевский политехнический институт”*

Поступило в редакцию 27.02.2014

В. А. Михайлец, Г. О. Чеханова

Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах $C^{(n)}[a, b]$

Введено і досліджено крайові задачі, породжені системою m лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку і крайовими умовами вигляду $Bu = c$, де лінійний неперервний оператор $B: C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m$, а m, n – натуральні числа. Встановлено фредгольмовість таких крайових задач. Знайдено достатні умови неперервності за параметром їх розв'язків разом з похідними до порядку n у рівномірній нормі.

V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova

Fredholm boundary-value problems with a parameter on the spaces $C^{(n)}[a, b]$

We introduce and study boundary-value problems generated by the system of m ordinary linear differential equations of the first order and boundary conditions of the form $By = c$, where $B: C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m$ is a continuous linear operator, and m, n are positive integers. We prove that such boundary-value problems possess the Fredholm property. Sufficient conditions for their solutions together with their derivatives up to order n to depend continuously on the parameter in the uniform norm are found.