ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 519.24

Академік НАН України **В. С. Королюк, І. В. Самойленко**

Великі відхилення для імпульсних процесів накопичення в схемі фазового укрупнення

Розглянуто проблему великих відхилень для імпульсного процесу накопичення в схемі фазового укрупнення. Знайдено нелінійний експоненційний генератор, що визначає розв'язок цієї проблеми за умов тотального та локального балансу.

1. Допоміжні означення та властивості. *Імпульсний процес накопичення* (ІПН) $S(t)$ є сумою незалежних у сукупності випадкових величин, визначених на вкладеному ланцюзі Маркова однорідного марковського процесу

$$S(t) = u + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \alpha_n(x_n^\varepsilon), \qquad t \geqslant 0, \qquad u \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Випадкові величини в (1) мають функції розподілу

$$\Phi_x(dv) = P\{\alpha_n(x) \in dv\} := P\{\alpha_n(x_n) \in dv|_n = x\}, \qquad x \in E.$$

ІПН можна розглядати як випадковий еволюційний процес (детальніше див. [1, гл. 1]). Перемикаючий марковський процес $x^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, описує випадкове середовище та має нижченаведені властивості.

Однорідний за часом марковський процес $x^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, визначається на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, \qquad E_k \bigcap E_{k'} = \varnothing, \qquad k \neq k'$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - e^{-q(x)t}], \qquad x \in E, \qquad B \in \mathcal{E}, \qquad t \geqslant 0.$$

Також виконуються такі умови:

МЕ1. Ядро, що описує перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon := x^\varepsilon(\tau_n)$, $n \geqslant 0$, має представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

При цьому моменти відновлення

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, \qquad n \geqslant 0, \qquad \tau_0 = 0,$$

де

$$P(\theta_{n+1} \geqslant t | x_n = x) = e^{-q(x)t} =: P(\theta_x \geqslant t).$$

Рахуючий процес визначається співвідношенням

$$\nu(t) := \max\{n > 0 \colon \tau_n \leqslant t\}, \qquad t \geqslant 0.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається таким чином:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) := \begin{cases} 1, & x \in E_k, \\ 0, & x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова x_n, $n \geqslant 0$, на відокремлених класах E_k, $1 \leqslant k \leqslant N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умову

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є наслідком рівності $P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1$.

МЕ2. Асоційований марковський процес $x^0(t)$, $t \geqslant 0$ заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів E_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, які задовольняють співвідношення

$$\pi_k(dx) q(x) = q_k \rho_k(dx), \qquad q_k := \int\limits_{E_k} \pi_k(dx) q(x).$$

МЕ3. Усереднені імовірності виходу

$$\widehat{p}_k := \int\limits_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E \setminus E_k) > 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

За умов **МЕ1–МЕ3** має місце слабка збіжність [1, гл. 4]

$$v(x^\varepsilon(t/\varepsilon)) \Rightarrow \widehat{x}(t), \qquad \varepsilon \to 0, \qquad v(x) = k \in \widehat{E} = \{1, \ldots, N\}, \qquad x \in E_k.$$

Граничний марковський процес $\widehat{x}(t)$, $t \geqslant 0$, на укрупненому фазовому просторі $\widehat{E} = \{1, \dots, N\}$ визначається генеруючою матрицею [1, гл. 4]

$$\widehat{Q}_1 = (\widehat{q}_{kr}, 1 \leqslant k, r \leqslant N).$$

ME4. Укрупнений марковський процес $\widehat{x}(t)$, $t \geqslant 0$, є ергодичним, зі стаціонарним розподілом $\widehat{\pi} = (\pi_k, k \in \widehat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1, \qquad Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції φ визначається таким чином:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x), \qquad \widehat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(x).$$

Має місце співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенційний оператор [1, гл. 1]

$$R_0 := \Pi - (Q + \Pi)^{-1} = (\Pi - Q)^{-1} - \Pi$$

має властивість

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

Означимо зведений оператор $\widehat{Q}_1$ за допомогою співвідношення

$$\widehat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\widehat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\widehat{Q}_1$:

$$\widehat{\Pi}\widehat{\varphi} := \sum_{k \in \widehat{E}} \widehat{\pi}_k \widehat{\varphi}_k.$$

Означимо потенціальну матрицю $\widehat{R}_0 = [\widehat{R}^0_{kl}; 1 \leqslant k, l \leqslant N]$ співвідношеннями

$$\widehat{Q}_1 \widehat{R}_0 = \widehat{R}_0 \widehat{Q}_1 = \widehat{\Pi} - I.$$

2. Великі відхилення за умови локального балансу. *Умова локального балансу* означає, що середні значення стрибків ІПН дорівнюють нулю:

$$b(x) = \int_{\mathbf{R}} v \Phi_x(dv) \equiv 0. \tag{2}$$

ІПН у схемі фазового укрупнення розглядається з таким нормуванням:

$$S^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^3)} \alpha_n(x_n), \qquad t \geqslant 0, \qquad \varepsilon > 0, \qquad u \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Марковський процес-пара

$$S^\varepsilon(t), \qquad x^\varepsilon(t) := x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right), \qquad t \geqslant 0,$$

визначається генератором

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3} q(x) \int_E P(x, dy) \int_{\mathbf{R}} \Phi_y(dv)[\varphi(u + \varepsilon^2 v, y) - \varphi(u, x)],$$

який можна переписати як

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3}[Q + \varepsilon Q_1 + Q_0 \Phi_x^\varepsilon]\varphi(u, x),$$

де, за означенням,

$$Q_0 \varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)\varphi(y),$$

$$\Phi_x^\varepsilon \varphi(u) := \int_{\mathbf{R}} \Phi_x(dv)[\varphi(u + \varepsilon^2 v) - \varphi(u)].$$

Ми досліджуємо великі відхилення для ІПН за допомогою асимптотичного аналізу експоненційного генератора великих відхилень [2, ч. I] (див. також [3, 4])

$$\mathbf{H}^\varepsilon \varphi(u, x) = e^{-\varphi/\varepsilon} \varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi/\varepsilon}.$$

Теорема 1. *Експоненційний генератор великих відхилень для ІПН* (3) *за умов* **ME1**–**ME4** *та* (2) *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{H}\varphi(u) = \frac{1}{2} \widehat{\widehat{C}} [\varphi'(u)]^2,$$

де

$$\widehat{\widehat{C}} = q \widehat{\widehat{B}}, \qquad \widehat{\widehat{B}} = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) B(x), \qquad B(x) = \int_{\mathbf{R}} v^2 \Phi_x(dv).$$

Доведення базується на такій лемі.

Лема 1. *Експоненційний генератор на збурених тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \varepsilon \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x)]$$

має асимптотичне зображення

$$\mathbf{H}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi_1 + Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + Q_0 \widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

і знехтувальні доданки збігаються рівномірно за x на функціях $\varphi(u) \in C^3(\mathbf{R})$:

$$|\delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Тут

$$\widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \frac{1}{2}B(x)[\varphi'(u)]^2.$$

Доведення леми базується на асимптотичному аналізі доданків $H_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = e^{-\varphi/\varepsilon} \times \times [\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}\varepsilon Q_1]e^{\varphi/\varepsilon}$ та $H_\Phi^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon^{-2}Q_0\Phi_x^\varepsilon e^{\varphi/\varepsilon}$.

Для завершення доведення теореми застосовується розв'язок проблеми сингулярного збурення для рівнянь.

$$Q\varphi_1(u,x) = 0,$$

$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + Q_0\widetilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

З умови розв'язності для другого рівняння маємо

$$\widehat{\Pi}\widehat{Q_0\widetilde{\mathbf{B}}(x)}\widehat{\Pi}\widehat{\varphi}(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

Таким чином, рівність

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \mathbf{H}\varphi(u) + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

завершує доведення теореми.

3. Великі відхилення за умови тотального балансу. *Умова тотального балансу* означає, що середні значення стрибків ІПН у кожному з класів E_k не дорівнюють 0:

$$b(x) = \int_{\mathbf{R}} v\Phi_x(dv) \not\equiv 0,$$

натомість

$$\sum_{k=1}^{N}\widehat{\pi}_k\widehat{b}_k = 0, \qquad \widehat{b}_k = \int_{E_k}\pi_k(dx)b(x), \qquad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{4}$$

За умови тотального балансу недостатньо нормувати час та величини стрибків процесу. Необхідно вводити нормування інтенсивності стрибків, а саме умови пуассонової апроксимації [1, гл. 7] (див. також [5]).

ІПН у схемі фазового укрупнення розглядається з нормуванням

$$S^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2\sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^4)}\alpha_n^\varepsilon(x_n). \tag{5}$$

При цьому виконуються такі умови:

C1. Сімейство випадкових величин $\alpha_n^\varepsilon(x)$, $n \geqslant 1$, $x \in E$, розглядається в схемі серій з малим параметром $\varepsilon > 0$ та визначається функцією розподілу

$$\Phi_x^\varepsilon(z) = P\{\alpha_n^\varepsilon(x) < z\}, \qquad z \in \mathbf{R}, \qquad x \in E.$$

C2. Сімейство випадкових величин $\alpha_n^\varepsilon(x)$, $k \geqslant 1$, $x \in E$, рівномірно квадратично інтегровне

$$\sup_{\varepsilon>0} \sup_{x\in E} \int\limits_{||z||>c} z^2 \Phi_x^\varepsilon(dz) \to 0, \qquad c \to \infty.$$

Також виконуються умови пуассонової апроксимації:

PA1. Апроксимація середніх:

$$b_\varepsilon(x) = \mathbf{E}\alpha_n^\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} z\Phi_x^\varepsilon(dz) = \varepsilon[b(x) + \theta_b^\varepsilon(x)]$$

та

$$c_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} z^2\Phi_x^\varepsilon(dz) = \varepsilon[c(x) + \theta_c^\varepsilon(x)].$$

PA2. Пуассонова апроксимація ядра інтенсивності

$$\int\limits_{\mathbf{R}} g(z)\Phi_x^\varepsilon(dz) = \varepsilon[\Phi_g(x) + \theta_g^\varepsilon(x)]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$ та ядро

$$\Phi_g(x) := \int\limits_{\mathbf{R}} g(z)\Phi_x(dz)$$

обмежене для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$, тобто

$$\sup_{x\in E} |\Phi_g(x)| \leqslant \Phi_g < \infty.$$

Члени, якими можна знехтувати — θ_b^ε, θ_c^ε, θ_g^ε, задовольняють умови

$$\sup_{x\in E} |\theta_\cdot^\varepsilon(x)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Генератор випадкової еволюції має вигляд

$$L_T^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-4}[Q + \varepsilon Q_1 + Q_0\Phi_x^\varepsilon]\varphi(u,x),$$

де, за означенням,

$$\Phi_x^\varepsilon\varphi(u) := \int\limits_{\mathbf{R}} \Phi_x^\varepsilon(dv)[\varphi(u + \varepsilon^2 v) - \varphi(u)].$$

Теорема 2. *Експоненційний генератор великих відхилень для ІПН* (5) *за умов* **МЕ1–МЕ4, С1, С2, РА1, РА2** *та умови тотального балансу* (4) *має вигляд*

$$\mathbf{H}\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{\widehat{B}}_T[\varphi'(u)]^2, \qquad \widehat{\widehat{B}}_T = \widehat{\widehat{C}} + \widehat{\widehat{B}}.$$

Тут

$$\widehat{\widehat{C}} := \sum_{k=1}^{N} \widehat{\pi}_k \int\limits_{E_k} \pi_k(dx)c(x), \qquad c(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} v^2\Phi_x(dv),$$

$$\widehat{\widehat{B}} := \widehat{\Pi}\widehat{b}(\widehat{x})\widehat{R}_0\widehat{b}(\widehat{x})\widehat{\Pi} = \sum_{k,l=1}^{N} \widehat{\pi}_k\widehat{b}_k\widehat{R}^0_{kl}\widehat{b}_l.$$

Доведення базується на нижченаведеній лемі.

Лема 2. *Експоненційний генератор на збурених тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\ln[1 + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x) + \varepsilon^3\varphi_3(u,x)]$$

має таке асимптотичне зображення

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi_1 + \varepsilon^{-1}[Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 - \varphi_1 Q\varphi_1 + B(x)\varphi(u)] +$$
$$+ [Q\varphi_3 + Q_1\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_2 - \varphi_2 Q\varphi_1 - \varphi_1 Q_1\varphi_1 + C(x)\varphi(u)] + \delta^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

і знехтувальний доданок збігається рівномірно за x на функціях $\varphi(u) \in C^3(\mathbf{R})$:

$$|\delta^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Оператори

$$B(x)\varphi(u) := b_0(x)\varphi'(u), \qquad C(x)\varphi(u) := \frac{1}{2}c_0(x)[\varphi'(u)]^2,$$

$$b_0(x) := q(x)\int\limits_E P(x,dy)b(y), \qquad c_0(x) := q(x)\int\limits_E P(x,dy)c(y).$$

Доведення леми проводиться за допомогою асимптотичного аналізу доданків $H^\varepsilon_Q\varphi^\varepsilon(u,x) = e^{-\varphi/\varepsilon}[\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-2}\varepsilon Q_1]e^{\varphi/\varepsilon}$ та $H^\varepsilon_\Phi\varphi^\varepsilon(u,x) = e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon^{-3}Q_0\Phi^\varepsilon_x e^{\varphi/\varepsilon}$.

Щоб завершити доведення теореми необхідно розв'язати проблему сингулярного збурення для такої системи рівнянь:

$$Q\varphi_1 = 0,$$

$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + B(x)\varphi'(u) = 0,$$

$$Q\varphi_3 + Q_1\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_2 - \varphi_1 Q_1\varphi_1 + C(x)\varphi(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

З умов розв'язності для цих рівнянь маємо

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_2 - \widehat{\varphi}_1\widehat{Q\varphi_2} - \widehat{\varphi}_1\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 + \widehat{C}(x)\widehat{\varphi}(u) = \mathbf{H}\varphi(u),$$

і

$$\widehat{Q\varphi_2} = -[\widehat{Q_1\varphi_1} + \widehat{B}(\widehat{x})\varphi'(u)] = 0,$$

а отже, отримуємо

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_2 + \widehat{B}_T(x)\widehat{\varphi}(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

Застосування умови розв'язності для останнього рівняння завершує доведення теореми.

1. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Hackensack, N. J.; World Scientific, 2005. – 331 p.
2. *Feng J., Kurtz T. G.* Large deviation for stochastic processes. – Providence, RI: AMS, 2006. – 410 p. – (Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 131).
3. *Koroliuk V. S.* Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals // J. Math. Sci. – 2011. – **179**, No 2. – P. 273–289.
4. *Koroliuk V. S.* Large deviation problems for Markov random evolution with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion // Commun. Statist. Theory and Methods. – 2011. – **40**, Is. 19–20. – P. 3385–3395.
5. *Самойленко І. В.* Збіжність імпульсного процесу накопичення зі стрибковими перемиканнями // Укр. мат. журн. – 2008. – № 9. – С. 1282–1286.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 24.12.2013

Академик НАН Украины **В. С. Королюк, И. В. Самойленко**

Большие уклонения для импульсных процессов накопления в схеме фазового укрупнения

Рассмотрена проблема больших уклонений для импульсного процесса накопления в схеме фазового укрупнения. Найден нелинейный экспоненциальный генератор, определяющий решение этой проблемы в условиях тотального и локального баланса.

Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Koroliuk, I. V. Samoilenko**

Large deviations for impulsive processes of accumulation in a phase merging scheme

We study the large deviation problem for an impulsive process of accumulation in a phase merging scheme. A nonlinear exponential generator that solves this problem is found under the total and local balance conditions.