Н.В. Майбородина, В.Ф. Мейш

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕБРАМИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: desc@inmech.kiev.ua

Abstract: A problem on forced non-axisymmetric vibrations of the stiffened ellipsoidal shells under non-stationary load is considered. A numerical algorithm is constructed, the numerical solution of problem and the findings are given.

Key words: stiffened ellipsoidal shell, geometrically nonlinear theory, numerical method, forced non-axisymmetric vibrations.

Введение.

Исследования динамического поведения эллипсоидальных подкрепленных оболочек является актуальными, так как они находят широкое применение в современных инженерных конструкциях. До настоящего времени рассмотрены, в основном, гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические) [1 – 3, 6, 19]. Вынужденные колебания подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках исследованы в работах [7 – 9, 18]. Практически отсутствуют работы по изучению динамического поведения подкрепленных оболочек более сложной формы. В этом направлении следует отметить работы [8 – 14], в которых представлены результаты по вынужденным колебаниям оболочек вращения, в частности, эллипсоидальных подкрепленных оболочек. В математическом плане такие задачи являются достаточно сложными как в плане их постановки, так и их решения (использование уравнений теории упругости, формулировка условий контакта оболочка – ребро, построение численного алгоритма решения исходных задач и т. д.).

В данной работе приведены уравнения неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленной эллипсоидальной оболочки. При рассмотрении обшивки и подкрепляющих ребер использована уточненная теория оболочек и стержней, в которой приняты гипотезы Тимошенко [9, 15]. Для вывода уравнений колебаний использован вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Численный метод решения динамических уравнений основан на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем для уравнения с разрывными коэффициентами. В качестве числового примера рассмотрена задача об неосесимметричных колебаниях поперечно подкрепленной эллипсоидальной оболочки при действии распределенной внутренней нагрузки, нормальной к поверхности оболочки.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим неоднородную упругую структуру, которая представляет собой дискретно подкрепленную поперечными ребрами эллипсоидальную оболочку. Геометрию срединной поверхности гладкой оболочки задаем соотношениями [4 – 5]

$$x = R\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 ;\quad y = R\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 ;\quad z = kR\cos\alpha_1 , \tag{1.1}$$

где параметры α_1, α_2 – гауссовы криволинейные координаты на поверхности оболочки, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, а α_2 – окружному; $k = b/a$ – параметр эллиптичности; a, b – полуоси эллипса.

Выражения для компонент метрики и формы срединной поверхности оболочки имеют вид

$$a_{11} = R^2(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1) ;\quad a_{22} = R^2\sin^2\alpha_1 ; \tag{1.2}$$

$$b_{11} = kR(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{-1/2} ;\quad b_{22} = kR\sin^2\alpha_1(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{-1/2} .$$

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны срединной поверхности эллипсоидальной оболочки имеют следующий вид:

$$A_1 = a(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{1/2} ;\quad A_2 = a\sin\alpha_1 ; \tag{1.3}$$

$$k_1 = \frac{b}{a^2}(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{-3/2} ;\quad k_2 = \frac{b}{a^2}(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{-1/2} .$$

При построении математической модели процесса динамического деформирования конструкции используем геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа модели Тимошенко, в основу которого положены следующие предположения.

Изменение перемещений по толщине оболочки в системе координат (s_1, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$u_1^z(s_1, s_2, z) = u_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2) ; \tag{1.4}$$

$$u_2^z(s_1, s_2, z) = u_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2) ;\quad u_3^z(s_1, s_2, z) = u_3(s_1, s_2),\ z \in \left[-h/2,\ h/2\right],$$

где $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; $s_1 = \alpha_1 A_1$, $s_2 = \alpha_2 A_2$, где A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы эллипсоидальной оболочки.

Выражения для величин деформаций в квадратичном приближении для оболочки примем в виде [16]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} + k_1 u_3 + \frac{1}{2}\theta_1^2 ;\quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}u_1 + k_2 u_3 + \frac{1}{2}\theta_1^2 ; \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + \theta_1\theta_2 ;\quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1 ;\quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2 ;\quad \omega = \omega_1 + \omega_2 ;$$

$$\omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial s_1} ;\quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}u_2 ;\quad \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} - k_1 u_1 ;\quad \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2 ;$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s_1} ;\quad \chi_{22} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}\varphi_1 ;$$

$$\chi_{12} = \tau_1 + \tau_2 + \kappa_1\omega_1 + \kappa_2\omega_2\,; \quad \tau_1 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_1}\,; \quad \tau_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}\varphi_2\,.$$

§2. Основные уравнения.

При построении математической модели деформирования j-го подкрепляющего ребра направленного вдоль оси α_2 будем исходить из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. При этом используем следующую аппроксимацию перемещений по сечению j-го подкрепляющего ребра:

$$U_{1j}^{xz}\left(x, s_2, z\right) = U_{1j}(s_2) + z\varphi_{1j}(s_2)\,; \tag{2.1}$$

$$U_{2j}^{xz}\left(x, s_2, z\right) = U_{2j}(s_2) + z\varphi_{2j}(s_2)\,; \quad U_{3j}^{xz}\left(x, s_2, z\right) = U_{3j}(s_2)\,,$$

где U_{1j}, U_{2j}, U_{3j}, φ_{1j}, φ_{2j} – компоненты обобщенного вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения j-го ребра.

Выражения для величин деформаций в квадратичном приближении для подкрепляющих ребер принимают вид

$$\varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj}\frac{\partial\varphi_2}{\partial s_2} + k_{2j}u_3 + \frac{1}{2}\theta_{1j}^2 + \frac{1}{2}\theta_{2j}^2\,; \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{21j} = \theta_{2j}\,; \quad \varepsilon_{23j} = \varphi_2 + \theta_{1j}\,; \quad \theta_{1j} = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_{2j}\left(u_2 \pm h_{cj}\varphi_2\right);$$

$$\theta_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} \pm h_{cj}\frac{\partial\varphi_1}{\partial s_2}\,; \quad \chi_{21j} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s_2}\,; \quad \chi_{22j} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_2}\,.$$

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения j-го ребра, направленного вдоль оси α_2, и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности записываем в виде [1, 3, 8, 9]:

$$U_{1j}(s_2) = U_1\left(s_{1j}, s_2\right) \pm h_{cj}\varphi_2(s_{1j}, s_2)\,; \quad U_{2j}(s_2) = U_2\left(s_{1j}, s_2\right) \pm h_{cj}\varphi_1(s_{1j}, s_2)\,; \tag{2.3}$$

$$U_{3j}(s_2) = U_3\left(s_{1j}, s_2\right); \quad \varphi_{1j}(s_2) = \varphi_2\left(s_{1j}, s_2\right); \quad \varphi_{2j}(s_2) = \varphi_1\left(s_{1j}, s_2\right),$$

где $h_{cj} = 0{,}5\left(h + h_j\right)$ – расстояние от срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения j-го ребра; h_j – высота j-го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_2; α_{1j} – координата линии проектирования центра тяжести поперечного сечения j-го ребра на координатную срединную поверхность обшивки.

При выводе уравнений движения используется интегральная форма представления условий контакта [12].

Для вывода уравнений колебаний дискретно подкрепленной структуры используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, согласно которому

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\Pi - K\right) + \delta A\right]dt = 0; \tag{2.4}$$

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{j=1}^{n_2}\Pi_j\,; \quad K = K_0 + \sum_{j=1}^{n_2}K_j\,,$$

где Π_0, K_0 – потенциальная и кинетическая энергия обшивки; Π_j, K_j – потенциальная и кинетическая энергия соответствующего j-го подкрепляющего ребра; A – работа внешних сил.

Выражения для δK и $\delta \Pi$ имеют вид

$$\delta\Pi = \delta\Pi_0 + \sum_{j=1}^{n_2}\delta\Pi_j\ ;\ \delta K = \delta K_0 + \sum_{j=1}^{n_2}\delta K_j\ ; \tag{2.5}$$

$$\delta\Pi_0 = \iint_S \left[T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + S\delta\varepsilon_{12} + T_{13}\delta\varepsilon_{13} + T_{23}\delta\varepsilon_{23} + \right.$$

$$\left. + M_{11}\delta\kappa_{11} + M_{22}\delta\kappa_{22} + H\delta\left(\tau_1+\tau_2\right)\right]ds\ ;$$

$$\delta\Pi_j = \int_{l_2}\left[T_{21j}\delta\varepsilon_{21j} + T_{22j}\delta\varepsilon_{22j} + T_{23j}\delta\varepsilon_{23j} + M_{21j}\delta\kappa_{21j} + M_{22j}\delta\kappa_{22j}\right]dl_2\ ;$$

$$\delta K_0 = \rho h\iint_S\left[\frac{\partial U_1}{\partial t}\delta\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial t}\delta\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_3}{\partial t}\delta\frac{\partial U_3}{\partial t} + +\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)dS\right];$$

$$\delta K_j = \rho_j h_j\int_{l_2}\left[\frac{\partial U_{1j}}{\partial t}\delta\frac{\partial U_{1j}}{\partial t} + \frac{\partial U_{2j}}{\partial t}\delta\frac{\partial U_{2j}}{\partial t} + \frac{\partial U_{3j}}{\partial t}\delta\frac{\partial U_{3j}}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{crj}}{F_j}\frac{\partial\varphi_{1j}}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_{1j}}{\partial t} + \frac{I_{2j}}{F_j}\frac{\partial\varphi_{2j}}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_{2j}}{\partial t}\right]dl_2 .$$

После стандартного выполнения операций варьирования и интегрирования с учетом условий контакта обшивка – j-ое ребро (2.3) получаем две группы уравнений:

1) уравнения колебаний оболочки в гладкой области

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1}T_{22}\right] + k_1\overline{T}_{13} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1T_{21}) = \rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\ ; \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1}T_{21}\right] + k_2\overline{T}_{23} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1T_{22}) = \rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\ ;$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2\overline{T}_{13}) - k_1T_{11} - k_2T_{22} + P_3 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1\overline{T}_{23}) = \rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\ ;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1}M_{22}\right] - T_{13} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1M_{21}) = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\ ;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1}M_{21}\right] + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1M_{22}) - T_{23} = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\ ;$$

$$T_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}\ ;\ \ T_{22} = B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22}\ ; \tag{2.7}$$

$$T_{12} = S + k_2 H\,;\;\; T_{21} = S + k_1 H\,;\;\; T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}\,;\;\; T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}\,;$$

$$\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\theta_1 + S\theta_2\,;\;\; \overline{T}_{23} = T_{23} + T_{22}\theta_2 + S\theta_1\,;$$

$$S = B_s\varepsilon_{12}\,;\;\; M_{11} = D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22}\,;$$

$$M_{22} = D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22}\,;\;\; M_{12} = M_{21} = H\,;\;\; H = D_s\chi_{12}\,;$$

2) уравнения колебания *j*-го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_2 ,

$$\frac{\partial\overline{T}_{21j}}{\partial s_2} + \left[T_{11}\right]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \pm h_{cj}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right); \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j}\overline{T}_{23j} + \left[S\right]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \pm h_{cj}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right);$$

$$\frac{\partial\overline{T}_{23j}}{\partial s_2} - k_{2j}T_{22j} + \left[\overline{T}_{13}\right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj}\frac{\partial\overline{T}_{21j}}{\partial s_2} + \left[M_{11}\right]_j = \rho_j F_j \left(\pm h_{cj}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right);$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} \pm h_{cj}\left(\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j}\overline{T}_{23j}\right) + \left[H\right]_j =$$

$$= \rho_j F_j \left(\pm h_{cj}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j}\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right);$$

$$\overline{T}_{21j} = T_{21j} + T_{22j}\theta_{1j}\,;\;\; T_{21j} = G_j F_j\varepsilon_{21j}\,;\;\; T_{22j} = E_j F_j\varepsilon_{22j}\,;\;\; \overline{T}_{23j} = T_{23j} + T_{22j}\theta_{2j}\,; \tag{2.9}$$

$$T_{23j} = G_j F_j k_j^2\varepsilon_{23j}\,;\;\; M_{21j} = G_j I_{crj}\chi_{21j}\,;\;\; M_{22j} = E_j I_{2j}\chi_{22j}\,.$$

Уравнения колебаний (1.11), (1.13) дополняются соответствующими естественными граничными и начальными условиями [12].

§3. Методика численного решения нелинейных задач.

Уравнения колебаний (2.6), (2.8) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным s_1, s_2, t при наличии пространственных разрывов по координате s_1. Пространственными разрывами являются линии проектирования центров тяжести поперечного сечения поперечных ребер на срединную поверхность эллипсоидальной оболочки. Исходя из этого фактора, численный алгоритм решения исходной задачи строим следующим образом: определяем решение в гладкой области эллипсоидальной оболочки (2.6) и на линиях пространственных разрывов – (2.8) [8, 9]. Разностный алгоритм основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам s_1, s_2 и явной конечно-разностной аппроксимации по временной координате t [17]. При этом компоненты обобщенного вектора перемещений аппроксимируются в целых точках разностной сетки, а компоненты величин деформаций и усилий – в полуцелых точках сетки. Такой подход позволяет сохранить дивергентную форму разностного представления дифференциальных уравнений, а также и выполнение закона сохранения полной механической энергии на разностном уровне [3]. Переход от непрерывной системы к конечно-разностной выполняется в два этапа.

Первый этап состоит в конечно-разностной аппроксимации дивергентных уравнений колебаний в усилиях-моментах.

Выполняя операцию интегрирования уравнений (2.6), с использованием явной аппроксимации по временной координате, получаем следующие разностные уравнения в гладкой области эллипсоидальной оболочки:

$$\frac{1}{A_{2l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^n_{11\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}T^n_{11\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}T^n_{22\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1l}}\frac{A_{1\,l}\,T^n_{21\,l,m+1/2}-A_{1l}\,T^n_{21\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}+k_{1\,l}\,T^n_{13\,l,m}=\rho h(u^n_{1\,l,m})_{\bar{t}t}\;; \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^n_{12\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}T^n_{12\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}T^n_{21\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,T^n_{22\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,T^n_{22\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)+k_{2\,l}\,T^n_{23\,l,m}=\rho h(u^n_{2\,l,m})_{\bar{t}t}\;;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^n_{13\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}T^n_{13\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-k_{1\,l}\,T^n_{11\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,T^n_{23\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,T^n_{23\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-k_{2\,l}\,T^n_{22\,l,m}+P^n_{3l,m}=\rho h(u^n_{3\,l,m})_{\bar{t}t}\;;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}M^n_{11\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}M^n_{11\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}M^n_{22\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,M^n_{21\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,M^n_{21\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-T^n_{13\,l,m}=\frac{\rho h^3}{12}(\varphi^n_{1\,l,m})_{\bar{t}t}\,;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}M^n_{12\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}M^n_{12\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}M^n_{21\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,M^n_{22\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,M^n_{22\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-T^n_{23\,l,m}=\frac{\rho h^3}{12}(\varphi^n_{2\,l,m})_{\bar{t}t}\,.$$

В разностных уравнениях (3.1) компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности гладкой эллипсоидальной оболочки $\bar{U} = \left(u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2\right)^T$ отнесены к целым узлам разностной сетки $\bar{U}_{l,m} = \left(u_{1l,m}, u_{2l,m}, u_{3l,m}, \varphi_{1l,m}, \varphi_{2l,m}\right)^T$ по пространственным координатам.

Выполняя операцию интегрирования уравнений (2.8), с использованием явной аппроксимации по временной координате, получаем следующие разностные уравнения для j-го подкрепляющего ребра:

$$\frac{T^n_{21j\,m+1/2} - T^n_{21j\,m-1/2}}{\Delta s_2} + \left[T_{11}\right]^n_j = \rho_j F_j \left[\left(u^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t} \pm h_{ci}\left(\varphi^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t}\right]; \tag{3.2}$$

$$\frac{T^n_{22j\,m+1/2} - T^n_{22j\,m-1/2}}{\Delta s_2} + k_{2j\,m} T^n_{23j\,m} + \left[S\right]^n_j = \rho_j F_j \left[\left(u^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t} \pm h_{ci}\left(\varphi^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t}\right];$$

$$\frac{T^n_{23j\,m+1/2} - T^n_{23j\,m-1/2}}{\Delta s_2} - k_{2j\,m} T^n_{22j\,m} + \left[T_{13}\right]^n_j = \rho_j F_j \left(u^n_{3\,m}\right)_{\bar{t}t};$$

$$\frac{M^n_{21j\,m+1/2} - M^n_{21j\,m-1/2}}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{T^n_{21j\,m+1/2} - T^n_{21j\,m-1/2}}{\Delta s_2} + \left[M_{11}\right]^n_j =$$

$$= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj}\left(u^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t} + \left(h^2_{cj} + \frac{I_{crj}}{F_j}\right)\left(\varphi^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t}\right];$$

$$\frac{M^n_{22j\,m+1/2} - M^n_{22j\,m-1/2}}{\Delta s_2} - T^n_{23j\,m} \pm h_{cj}\left(\frac{T^n_{22j\,m+1/2} - T^n_{22j\,m-1/2}}{\Delta s_2} + k_{2j\,m} T^n_{23j\,m}\right) + \left[H\right]^n_j =$$

$$= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj}\left(u^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t} + \left(h^2_{cj} + \frac{I_{2j}}{F_j}\right)\left(\varphi^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t}\right].$$

Аналогично случаю гладкой эллипсоидальной оболочки, в разностных уравнениях (3.2) компоненты обобщенного вектора перемещений центров масс поперечных сечений j-го ребра $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ отнесены к целым узлам разностной сетки по пространственным координатам.

Второй этап аппроксимации уравнений состоит в конечно-разностных аппроксимациях величин усилий-моментов и соответствующих деформаций для выполнения конечно-разностного аналога энергетического уравнения [15]. Аппроксимацию уравнений (2.7) и (2.9) представляем согласно [12].

При исследовании вопросов устойчивости линеаризованных разностных уравнений используем необходимые условия устойчивости, согласно которым

$$\Delta t \le 2 / \omega, \tag{3.3}$$

где $\omega = \max\left(\omega_0, \omega_j\right)$, $j = \overline{1, J}$ – максимальные частоты собственных колебаний дискретно-разностной системы, соответственно, обшивки и j-го подкрепляющего элемента.

§4. Числовой пример.

В качестве числового примера рассмотрена задача о вынужденных колебаниях поперечно подкрепленной эллипсоидальной оболочки (рис. 1) с жестко защемленными краями в области $D = \{\alpha_{10} \le \alpha_1 \le \alpha_{1N}, \quad \alpha_{20} \le \alpha_2 \le \alpha_{2N}\}$ при действии распределенной нормальной нагрузки $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$. Краевые условия при этом имеют следующий вид: $\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = 0$; $\bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = 0$. Начальные условия для всех компонент обобщенного вектора перемещений – нулевые при $t = 0$, т.е. имеем

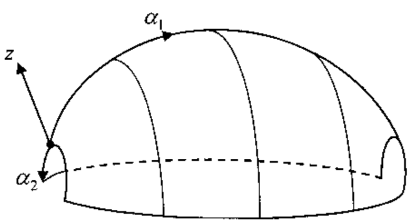

Рис. 1

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) = u_3(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$\frac{\partial u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = 0.$$

Распределенная нормальная нагрузка $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$ имеет вид

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin\frac{\pi t}{T}\left[\eta(t) - \eta(t - T)\right],$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах принято: $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Задача рассмотрена при следующих геометрических и физико-механических параметрах оболочки:

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{1N} = \pi - \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2N} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{a}{h} = 60; \quad \frac{b}{a} = 1{,}5;$$

$$E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}33; \quad \rho = 2{,}7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Физико-механические параметры подкрепляющих элементов – $E_j = E_1$; $\rho_j = \rho$. Поперечные подкрепляющие элементы расположены вдоль по координате α_2 в сечениях $\alpha_{1j} = \frac{7}{24}\pi + \frac{5}{24}\pi j$; $j = 0, 1, 2$.

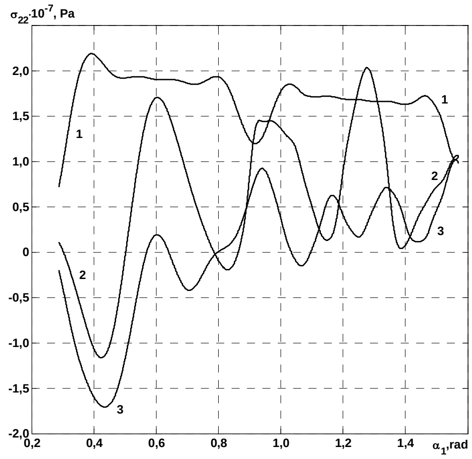

Рис. 2

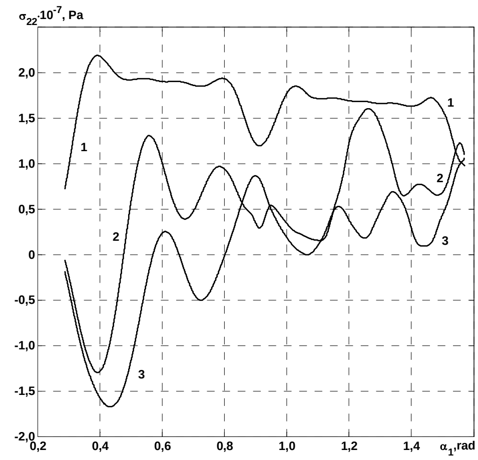

Рис. 3

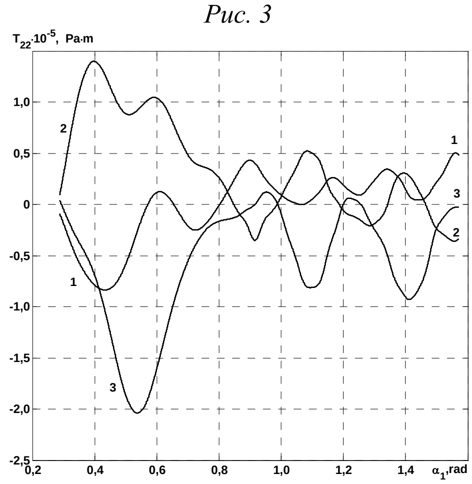

Рис. 4

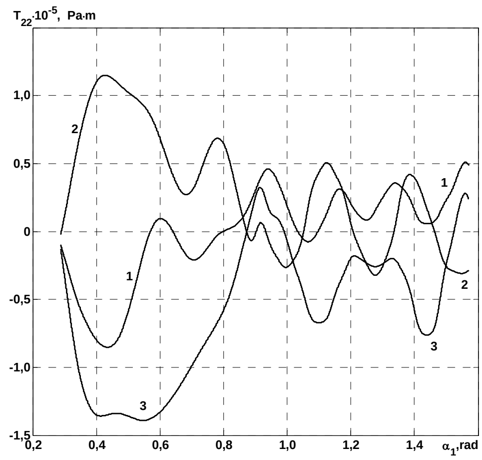

Рис. 5

На рис. 2 – 5 приведены результаты расчетов, которые получены на временном интервале $t_N = 35T$ и представлены в виде наиболее характерных кривых для величин напряжения σ_{22} и усилия T_{22}, которые позволяют проводить анализ напряженного состояния исследуемой структуры. На рис. 2 – 5 с учетом симметрии по координате α_1 зависимости приведены в диапазоне $\alpha_{10} \le \alpha_1 \le \pi / 2$ в сечении $\alpha_2 = 0$.

Рис. 2, 3 соответствуют зависимостям величин напряжения σ_{22} от пространственной координаты α_1 в случае внешнего (рис. 2) или внутреннего (рис. 3) расположения ребер. Здесь кривые с индексом 1 отвечают моменту времени $t_1 = T$, кривые с индексом 2 – $t_2 = 3T$, а кривые с индексом 3 – $t_3 = 8T$.

Рис. 4, 5 соответствуют аналогичным зависимостям величин усилий T_{22} в зависимости от внешнего (рис. 4) или внутреннего (рис. 5) расположения ребер. На рис. 4, 5 кривая *1* отвечает моменту времени $t_1 = 3T$, кривая *2* – $t_2 = 6T$, а кривая *3* – $t_3 = 9T$.

Как следует из приведенного графического материала, можно визуально определить месторасположения подкрепляющих ребер в сечениях α_{1j} $(j = 0,1,2)$. Способ крепления ребер (внутреннее расположение или внешнее) приводит в ряде случаев к разнице по максимальным амплитудам величины напряжений σ_{22} до 25% (кривая 2 на рис. 2 – 3) и величины усилий T_{22} до 47% (кривая *3* на рис. 4 – 5).

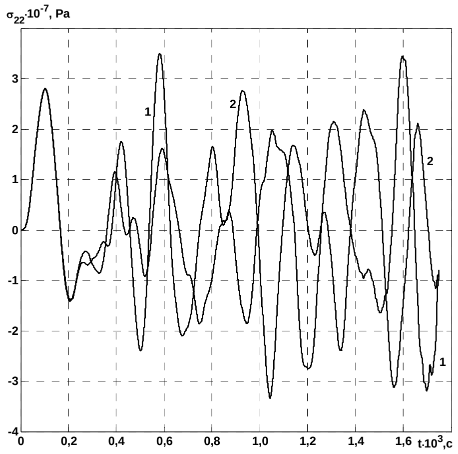

Рис. 6

На рис. 6 приведены зависимости напряжений σ_{22} по времени в характерной точке $\left(\alpha_1 = \pi/2;\ \alpha_2 = 0\right)$, в которой указанные величины достигают своих максимальных по модулю значений на временном интервале $t_N = 35T$. Здесь кривая *1* соответствует случаю внешнего размещения ребер, а *2* – случаю внутреннего размещения ребер. Способ крепления ребер приводить в ряде случаев к отличию результатов по максимальным амплитудам: для величин напряжений σ_{22} оно достигает 10%.

Заключение.

Работа посвящена исследованию вынужденных неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленной эллипсоидальной оболочки. При рассмотрении обшивки и подкрепляющих ребер использована уточненная теория оболочек и стержней, в которой приняты гипотезы Тимошенко. Для вывода уравнений колебаний использован вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Численный метод решения динамических уравнений основан на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем для уравнения с разрывными коэффициентами. В качестве числового примера представлены результаты об неосесимметричных колебаниях поперечно подкрепленной эллипсоидальной оболочки при действии распределенной внутренней нагрузки.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про вимушені неосесиметричні коливання підкріплених еліпсоїдальних оболонок при нестаціонарному навантаженні, побудовано чисельний алгоритм, отримано числові результати і дано їх аналіз.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г.* Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
2. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно–деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 4. – С. 3–22.
3. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек. – Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Механика деформируемого твердого тела. – 1990. – **21**. – С.132 – 191.
4. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172с.
5. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255с.
6. *Колебания* ребристых оболочек вращения. / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий и др. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
7. *Луговой П.З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках (обзор) // Прикл. механика. – 2001.– **37**, № 5. – С. 44–73.
8. *Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии // Прикл. механика. – 1992. – **28**, №11. – С.38 – 44.
9. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд.-полиграф.центр "Киевский университет", 2005. – 563с.
10. *Мейш В.Ф.* Исследование напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных распределенных загрузках / В.Ф. Мейш, Н.В. Майбородина // Теоретическая и прикладная механика – 2007. – Вып. 43. – С. 150 – 155.
11. *Мейш В.Ф., Майбородина Н.В.* Неосесимметричные колебания эллипсоидальных оболочек при нестационарных распределенных нагрузках // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 73 – 84.
12. *Мейш В.Ф., Майбородина Н.В.* К расчету неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами гибких эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 63 – 73.
13. *Майбородіна Н.В.* Коливання дискретно підкріплених еліпсоїдальних ортотропних оболонок при нестаціонарних навантаженнях // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. № 4. – С. 71 – 74.
14. *Майбородина Н.В., Мейш В.Ф.* Влияние геометрической нелинейности на колебания подкрепленных ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарной нагрузке // Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць Дніпропетр. нац. ун-ту. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 17. – С. 188 – 194.
15. *Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К.* Нестационарные волны в деформируемых средах. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 236 с.
16. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л.; М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
17. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
18. *Lugovoi P.Z., Meish V.F, Rybakin B.P., Sekrieru G.V.* On Numerical Solution of Dynamics Problems in the Theory of Reinforced Shells // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N4. – P.536 – 541.
19. *Zarutskii V.A., Podil'chuk I.Yu.* Propagation of Harmonic Waves in Longitudinally Reinforced Cylindrical Shells with Low Shear Stiffness // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N5. – P.525 – 529.

Поступила 12.10.2011 Утверждена в печать 06.06.2013