Я.Я. Рущицкий

О НЕЛИНЕЙНОМ ОПИСАНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ЛЯВА

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. The problem on elastic Love waves is considered in the classical statement under additional assumption on presence of nonlinearity in description of deformation. The nonlinear Murnaghan model is used. The new nonlinear wave equation in displacements is derived, which includes the linear part and part with summands of the third and fifth order of nonlinearity, only. For the case of allowance for the physical nonlinearity, the solution of new nonlinear equation with nonlinear boundary conditions is obtained by the method of successive approximations within the framework of the first two approximations. The new nonlinear equation for determination of the wave number is derived, which shows the new factor of an initial wave profile distortion – distortion owing the wave length changing with unchanging frequency.

Key words: nonlinearly elastic Love wave, Murnaghan model, new nonlinear wave equation, nonlinear boundary conditions, approximate solution.

Введение.

Рассмотрим задачу об упругой волне Лява в классической постановке [1 – 4, 6, 8, 10, 12] при дополнительном предположении о нелинейности процесса деформирования.

С геометрической точки зрения задача состоит в том, что рассматривается слой постоянной толщины, определяемый условием $-h \le x_1 \le 0$, и верхнее полупространство $x_1 \ge 0$ при их описании декартовыми координатами $Ox_1x_2x_3$ (ось абсцисс направлена вглубь полупространства, ось ординат – вдоль границы раздела).

С точки зрения механики, задача включает несколько первоначальных предположений: 1) полупространство и слой заполнены нелинейно-упругими материалами с различающимися свойствами (далее величинам, описывающим слой и полупространство, присвоены индексы С и П, соответственно); 2) материалы деформируются согласно модели Мурнагана [2, 4, 7, 9, 11, 12], поэтому свойства включают плотность $\rho_{\mathrm{C(П)}}$ и пять упругих постоянных $\lambda_{\mathrm{C(П)}}, \mu_{\mathrm{C(П)}}, A_{\mathrm{C(П)}}, B_{\mathrm{C(П)}}, C_{\mathrm{C(П)}}$; 3) полупространство и слой находятся в условиях полного механического контакта (равенство перемещений и напряжений в плоскости контакта $x_1 = 0$) и что нижняя плоскость слоя $x_1 = -h$ – свободна от напряжений.

Исследуем возможность распространения гармонической плоской вертикально поляризованной волны при условии отсутствия перемещений u_1, u_2 в продольном и горизонтальном направлениях, соответственно. Более конкретно, изучим возможность распространения в направлении Ox_1 (в окрестности плоскости раздела слоя и полупространства) указанной волны с неизвестными амплитудой $\hat{u}_3^{\mathrm{C(П)}}(x_1)$ и волновым числом k. В этом случае волна может быть представлена в виде

$$u_3^{\mathrm{C(П)}} = \hat{u}_3^{\mathrm{C(П)}}(x_1)\, e^{i(kx_2 - \omega t)}. \qquad (1)$$

Если волна локализована вокруг плоскости раздела $x_3 = 0$, т.е. имеет максимальную амплитуду на плоскости раздела, и затухает существенно при увеличении абсолютных значений x_3, то описанная выше постановка в рамках линейной теории упругости соответствует постановке задачи о волне Лява.

Для описания среды распространения волны с такими характеристиками применим задекларированную выше модель нелинейно-упругой среды, механическое состояние которой зависит лишь от двух пространственных переменных (x_1, x_2) и характеризуется лишь одной компонентой вектора перемещений u_3. Тогда обычно используемые в описании потенциала Мурнагана градиенты перемещений $u_{i,k}$, симметричный тензор деформаций Коши – Грина ε_{nm} и несимметричный тензор напряжений Кирхгофа t_{ik} включают не все компоненты. Прежде всего, только два $u_{3,1}, u_{3,2}$ из девяти компонентов градиента перемещений $u_{i,k}$ отличны от нуля. Поскольку тензор ε_{nm} задается формулой

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2}\left(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{i,n}u_{i,m}\right), \tag{2}$$

то его компоненты вычислим по таким формулам:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}\left(u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,1}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{3,1}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}\left(u_{1,2}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{3,2}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left(u_{3,3} + u_{3,3} + u_{k,3}u_{k,3}\right) = 0; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}u_{3,1}u_{3,2};$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2}u_{3,1};$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2}u_{3,2}. \tag{3}$$

Соответствующий поставленной задаче потенциал Мурнагана имеет вид

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{1}{4}\lambda\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]^2 + \mu\left[\frac{1}{2}\left(u_{3,1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{3,2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(u_{3,1}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(u_{3,2}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(u_{3,1}u_{3,2}\right)^2\right] + \\ & + \frac{1}{24}A\left\{3\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]^2 + \left(u_{3,1}\right)^6 + \left(u_{3,2}\right)^6 + 3\left(u_{3,1}\right)^2\left(u_{3,2}\right)^2\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]\right\} + \\ & + \frac{1}{8}B\left[2\left(u_{3,1}\right)^2 + 2\left(u_{3,2}\right)^2 + \left(u_{3,1}\right)^4 + \left(u_{3,2}\right)^4 + \left(u_{3,1}u_{3,2}\right)^2\right]\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right] + \\ & + \frac{1}{24}C\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Особенностью этого представления потенциала является присутствие в нем только четных степеней лишь двух компонентов градиента перемещения $u_{3,1}$, $u_{3,2}$: присутствуют только вторые степени (соответствующие линейной теории упругости), четвертые степени (соответствующие кубически нелинейной теории упругости) и шестые степени (соответствующие нелинейности пятого порядка).

Вид тензора напряжений определим по формуле $t_{ik} = \left(\partial W / \partial u_{k,i} \right)$. Поскольку в записи потенциала присутствуют лишь два из девяти компонентов градиентов деформации, то и компонентов тензора напряжений будет только два ненулевых

$$t_{13} = \mu u_{3,1} + (\lambda + \mu)\left[\left(u_{3,1}\right)^3 + \frac{1}{2} u_{3,1} \left(u_{3,2}\right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} A \left\{ 2u_{3,1} \left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2 \right] + \left(u_{3,1}\right)^5 + u_{3,1} \left(u_{3,2}\right)^2 \left[2\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4} B \left[2\left(u_{3,1}\right)^3 + 2u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^2 + \left(u_{3,1}\right)^5 + u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^4 + \left(u_{3,1}\right)^3 \left(u_{3,2}\right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} C u_{3,1} \left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2 \right]^2; \; t_{23} = \mu u_{3,2} + (\lambda + \mu)\left[\left(u_{3,2}\right)^3 + \frac{1}{2} u_{3,2} \left(u_{3,1}\right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} A \left\{ \left(u_{3,2}\right)^5 + u_{3,2} \left(u_{3,1}\right)^2 \left[\left(u_{3,1}\right)^2 + 2\left(u_{3,2}\right)^2 \right] + 2u_{3,2} \left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4} B \left[2\left(u_{3,2}\right)^3 + 2u_{3,2}\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^5 + u_{3,2}\left(u_{3,1}\right)^4 + \left(u_{3,2}\right)^3 \left(u_{3,1}\right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} C u_{3,2} \left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2 \right]^2. \tag{5}$$

1. Нелинейное волновое уравнение.

Из трех уравнений движения в данной задаче два тождественно равны нулю, а третье имеет вид

$$t_{13,1} + t_{23,2} = \rho \ddot{u}_3. \tag{6}$$

Подстановка представлений (5) в уравнение (6) дает следующее нелинейное волновое уравнение:

$$\rho \ddot{u}_3 - \mu\left(u_{3,11} + u_{3,22}\right) = \tag{7}$$

$$= T_1 \left(u_{3,1}\right)^2 u_{3,11} + T_2 \left(u_{3,2}\right)^2 u_{3,11} + T_1 \left(u_{3,2}\right)^2 u_{3,22} + T_2 \left(u_{3,1}\right)^2 u_{3,22} + 4T_2 u_{3,1} u_{3,2} u_{3,12} +$$

$$+ F_1 \left(u_{3,1}\right)^4 u_{3,11} + F_1 \left(u_{3,2}\right)^4 u_{3,22} + F_2 \left(u_{3,2}\right)^4 u_{3,11} + F_2 \left(u_{3,1}\right)^4 u_{3,22} +$$

$$+ F_3 \left(u_{3,1}\right)^3 u_{3,2} u_{3,12} + F_3 u_{3,1} \left(u_{3,2}\right)^3 u_{3,12} + F_4 \left(u_{3,1}\right)^2 \left(u_{3,2}\right)^2 u_{3,11} + F_4 \left(u_{3,2}\right)^2 \left(u_{3,1}\right)^2 u_{3,22},$$

в котором введены обозначения

$$T_1 = 3\left[(\lambda + \mu) + \frac{1}{4} A + \frac{1}{2} B \right]; \quad T_2 = \frac{1}{2}\left[(\lambda + \mu) + A + B \right];$$

$$F_1 = \frac{5}{4}(A + B + C); \; F_2 = A + \frac{1}{4} B + \frac{1}{4} C; \; F_3 = 2A + \frac{3}{2} B + 2C; \; F_4 = \frac{3}{4}(2A + B + 2C).$$

Как следует из уравнения (7), оно содержит лишь нелинейные составляющие третьего (пять составляющих) и пятого (восемь составляющих) порядков. Такая особенность уравнений является следствием постановки задачи; в частности, следствием учета нелинейных составляющих в соотношениях Коши (следствием учета геометрической нелинейности процесса деформирования, в том числе и при описании физической нелинейности). Подобная ситуация отсутствия составляющих второго порядка имела место ранее при исследовании поперечных плоских волн в третьем приближении [15].

Сохраняя далее лишь кубическую нелинейность в уравнении (7), имеем

$$\rho \ddot{u}_3 - \mu\left(u_{3,11} + u_{3,22}\right) =$$

$$= T_1\left(u_{3,1}\right)^2 u_{3,11} + T_2\left(u_{3,2}\right)^2 u_{3,11} + T_1\left(u_{3,2}\right)^2 u_{3,22} + T_2\left(u_{3,1}\right)^2 u_{3,22} + 4T_2 u_{3,1}u_{3,2}u_{3,12}\,. \qquad (8)$$

Решение нелинейного волнового уравнения (8) будем искать методом последовательных приближений.

2. Анализ кубически нелинейной упругой волны Лява. Первое (линейное) приближение.

Первое приближение совпадает с решением линейного аналога уравнения (8), которое имеет известный вид и особенности которого опишем ниже [1 – 4, 6, 8, 10, 12].

Прежде всего, решение ищем из линейного аналога уравнения (8) с учетом представления (1), одинакового для слоя и полупространства

$$\left(\tilde{u}_{(1)3}^{\text{С(П)}}\right)''_{,11} + k^2\left[\left(v/v_T^{\text{С(П)}}\right)^2 - 1\right]\tilde{u}_{(1)3}^{\text{С(П)}} = 0\,,\ v_T^{\text{С(П)}} = \sqrt{\mu_{\text{С(П)}}/\rho_{\text{С(П)}}}\,, \qquad (9)$$

однако, согласно постановке задачи (анализируется волна, локализованная вокруг плоскости раздела $x_3 = 0$) решения уравнения (9) для слоя и полупространства следует искать различающиеся.

Для полупространства ищем такое решение, которое затухает при отходе от границы $x_1 = 0$

$$\tilde{u}_3^{\text{П}(1)} = L_{\text{П}} e^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^{\text{П}}\right)^2\right]}\,kx_1} \qquad (10)$$

и в котором поэтому налагается условие положительности корня и подкоренного выражения $\left(\beta_{\text{П}}\right)^2 = 1 - \left(v/v_T^{\text{П}}\right)^2 > 0$. Из этого условия следует, что скорость линейной волны Лява должна быть меньше скорости плоской вертикальной поперечной волны в полупространстве. Амплитудный множитель $L_{\text{П}}$ в (10) постоянен и неизвестен.

Для слоя условие затухания не требуется и решение ищем в виде колебаний с двумя постоянными неизвестными амплитудными множителями, т.е.

$$\tilde{u}_3^{\text{С}(1)} = L_{1C}\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}\,kx_1 + L_{2C}\cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}\,kx_1\,. \qquad (11)$$

Здесь подкоренное выражение $\left(\beta_C\right)^2 = \left(v/v_T^C\right)^2 - 1 > 0$ также должно быть положительным. Из этого условия следует, что скорость линейной волны Лява должна быть больше скорости плоской вертикальной поперечной волны в слое.

Следовательно, вид линейных решений (10), (11) соответствует волне Лява, если

$$v_T^C < v < v_T^{\text{П}} \quad \left(k_T^{\text{П}} < k < k_T^C;\ \left(\mu_C/\rho_C\right) < v < \left(\mu_{\text{П}}/\rho_{\text{П}}\right)\right), \qquad (12)$$

т.е. скорость плоской вертикальной поперечной волны в слое меньше скорости плоской вертикальной поперечной волны в полупространстве. Обычно это условие понимается, в классической теории упругости, как условие существования линейной волны Лява, которое ограничивает соотношение физических свойств системы “слой на полупространстве”.

Объединяя представления (1) и (10), (11), получаем решение задачи для линейно-упругой волны Лява с тремя неизвестными амплитудными множителями

$$u_3^{\Pi(1)}\left(x_1,x_2,t\right)=L_\Pi e^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2\right]}kx_1}e^{i\left(kx_2-\omega t\right)} \text{ при } x_2\in\left(-\infty,\infty\right),\, x_1\in\left[0;\infty\right);$$

$$u_3^{C(1)}\left(x_1,x_2,t\right)=\left\{L_{1C}\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}kx_1+L_{2C}\cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}kx_1\right\}e^{i\left(kx_2-\omega t\right)}$$

$$\text{при } x_2\in\left(-\infty,\infty\right),\, x_1\in\left[-h;0\right]. \quad (13)$$

Часто в приложениях волну Лява рассматривают как волну, распространяющуюся в системе “тонкий слой на подложке (толстом основании)”. Однако, поскольку в данной постановке задачи основание полагаем полубесконечным, понятие “тонкий” может быть определено лишь по сравнению с величиной, характеризующей затухание волны в подложке. Проще всего поступить следующим образом: выбрать расстояние h_Π, на котором волна в подложке практически отсутствует; например, приняв степень в амплитуде $e^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2\right]}kx_1}$, равной $\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2\right]}kh_\Pi=4$ (амплитуда волны уменьшается примерно в 50 раз). Поэтому в таком случае постановка задачи включает характеристику толщины слоя h: слой тонкий, если его толщина примерно равна h_Π и толщина подложки превышает h_Π, примерно, в 10 раз. Здесь важно, что величина $h_\Pi=\left\{4\Big/\omega\sqrt{v^2-\left(v_T^\Pi\right)^2}\right\}$ обратно пропорциональна частоте (дисперсия – зависимость фазовой скорости v от частоты – не столь существенна; v уменьшается примерно в разы при изменении частоты в сотни раз) и характер такой зависимости не изменится при ином выборе степени затухания.

Три неизвестные амплитудные множителя L_Π, L_{1C}, L_{2C} находим из трех граничных условий:

при $x_1=0$ – два условия полного механического контакта

$$u_3^C\left(x_1=0,x_2\right)=u_3^\Pi\left(x_1=0,x_2\right);\ \ t_{13}^C\left(x_1=0,x_2\right)=t_{13}^\Pi\left(x_1=0,x_2\right) \quad (14)$$

$$\text{или } \tilde u_3^C\left(x_1=0\right)=\tilde u_3^\Pi\left(x_1=0\right);$$

$$\left\{\tilde t_{13}^C\left(x_1=0\right)\equiv\mu_C\tilde u_{3,1}^C\left(x_1=0\right)\right\}=\left\{\tilde t_{13}^\Pi\left(x_1=0\right)\equiv\mu_\Pi\tilde u_{3,1}^\Pi\left(x_1=0\right)\right\}$$

при $x_1=-\,h$ – одно условие отсутствия напряжений

$$t_{13}^C\left(x_1=-h,x_2\right)=0 \text{ или } \left\{\tilde t_{13}^C\left(x_1=-h\right)\equiv\mu_C\tilde u_{3,1}^C\left(x_1=-h\right)\right\}=0\,. \quad (15)$$

В результате подстановки представлений (5) и решения (13) в граничные условия (14, 15) получают линейную однородную алгебраическую систему уравнений из трех уравнений относительно амплитудных множителей L_Π, L_{1C}, L_{2C}

$$L_\Pi=L_{2C};\ l_\Pi L_\Pi+l_C L_{1C}=0;\ l_3L_{1C}+l_4L_{2C}=0;\ l_\Pi=-\mu_\Pi\sqrt{1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2};$$

$$l_C=-\mu_C\sqrt{\left(v/v_T^C\right)^2-1};\ l_3=C_h;\ l_4=S_h;$$

$$C_h = \cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}kh;\; S_h = \sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}kh\,. \tag{16}$$

Из вида (16) следуют два наблюдения:

1) одна из амплитуд является произвольной, что свидетельствует о том, что волна относится к классу бегущих волн;

2) для нахождения волнового числа k необходимо решать трансцендентное уравнение

$$l_{\text{П}}l_3 - l_C l_4 = 0 \to \mu_{\text{П}}\beta_{\text{П}} = \mu_C\beta_C \tan\left(\beta_C kh\right)$$

или $$\frac{\mu_{\text{П}}}{\mu_C}\frac{\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^{\text{П}}\right)^2\right]}}{\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}} - \tan\left\{kh\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}\right\} = 0\,, \tag{17}$$

которое имеет бесконечное количество корней $k_m = k_0 + m\pi$ (k_0 – корень, определяющий нулевую моду, $m \in \mathbb{N}$).

Бесконечное количество корней имеет следствием бесконечное количество волновых чисел; поэтому также существует бесконечное количество мод.

В классической теории упругости предложено простое доказательство существования действительного корня уравнения (17) при прочих фиксированных значениях параметров: поскольку первая составляющая в уравнении (17) положительна, а вторая (тангенс как функция k) изменяется непрерывно от нуля до бесконечности, то всегда найдется такое положительное значение k, при котором удовлетворяется уравнение (17).

Если выбрать в качестве амплитудного множителя $L_{\text{П}}$, то

$$L_{1C} = -L_{\text{П}}\left[\mu_{\text{П}}\sqrt{1-\left(v/v_T^{\text{П}}\right)^2}\Big/\mu_C\sqrt{\left(v/v_T^{C}\right)^2 - 1}\right],\; L_{\text{П}} = L_{2C} \tag{18}$$

и решение (13) может быть записано в виде

$$u_3^{\text{П}(1)}\left(x_1,x_2,t\right) = L_{\text{П}}e^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^{\text{П}}\right)^2\right]}kx_1}e^{i(kx_2-\omega t)} \text{ при } x_2 \in \left(-\infty,\infty\right),\, x_1 \in \left[0;\infty\right);\; u_3^{\text{С}(1)}\left(x_1,x_2,t\right) =$$

$$= L_{\text{П}}\left\{-\frac{\mu_{\text{П}}}{\mu_C}\frac{\sqrt{1-\left(v/v_T^{\text{П}}\right)^2}}{\sqrt{\left(v/v_T^{C}\right)^2 - 1}}\cdot\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}kx_1 + \cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]}kx_1\right\}e^{i(kx_2-\omega t)}$$

$$\text{при } x_2 \in \left(-\infty,\infty\right),\, x_1 \in \left[-h;0\right]. \tag{19}$$

Укажем здесь две важные особенности волн Лява в линейном приближении.

1. Волны Лява дисперсивны, поскольку уравнение (17) свидетельствует о нелинейной зависимости фазовой скорости v от волнового числа k – при нулевом значении волнового числа (при бесконечной длине волны) скорость v равна $v_T^{\text{П}}$ (фазовой скорости поперечной волны в полупространстве) и при увеличении волнового числа скорость уменьшается; также значениями $kh\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\text{С}}\right)^2 - 1\right]} = m\pi\;\{m \in \mathbb{N}\}$ определяют максимальные значения фазовой скорости волны Лява для высших мод.

2. Энергия волны может перераспределяться между слоем и подложкой в зависимости от значений амплитуд

$$e^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2\right]}kx_1} = e^{-\sqrt{\left[v^2-\left(v_T^{\Pi}\right)^2\right]}\omega x_1};$$

$$-\frac{\mu_\Pi}{\mu_C}\frac{\sqrt{1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2}}{\sqrt{\left(v/v_T^C\right)^2-1}}\cdot\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\mathrm{C}}\right)^2-1\right]}kx_1+\cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\mathrm{C}}\right)^2-1\right]}kx_1;$$

обычно рассматривается зависимость переносимой волной энергии в слое и подложке от частоты; различают низкие и высокие частоты в зависимости от выполнения условия достаточно большого превышения (или наоборот) условной толщины проникновения волны в подложку над толщиной слоя $h \ll (\gg) h_\Pi = \left\{4\Big/\omega\sqrt{v^2-\left(v_T^{\Pi}\right)^2}\right\}$, соответственно; тогда при малых частотах проникновение волны в подложку будет большим и почти вся энергия волны будет сосредоточена в подложке (вследствие большой тонкости слой практически не участвует в волновом движении).

3. Анализ кубически нелинейной упругой волны Лява. Второе (нелинейное) приближение.

Как следует из известной процедуры метода последовательных приближений, второе приближение $u_3^{(2)}\left(x_1,x_2,t\right)$ необходимо искать как решение неоднородного линейного волнового уравнения с известной правой частью

$$\left(v_T\right)^{-2}\ddot{u}_3^{(2)}-\left(u_{3,11}^{(2)}+u_{3,22}^{(2)}\right)= \tag{20}$$

$$=\tilde{T}_1\left(u_{3,1}^{(1)}\right)^2u_{3,11}^{(1)}+\tilde{T}_2\left(u_{3,2}^{(1)}\right)^2u_{3,11}^{(1)}+\tilde{T}_1\left(u_{3,2}^{(1)}\right)^2u_{3,22}^{(1)}+\tilde{T}_2\left(u_{3,1}^{(1)}\right)^2u_{3,22}^{(1)}+4\tilde{T}_2u_{3,1}^{(1)}u_{3,2}^{(1)}u_{3,12}^{(1)}.$$

Здесь принято обозначение $\tilde{T}_\alpha=\left(T_\alpha/\mu\right)$, $\alpha=1;2$; через $u_3^{(1)}\left(x_1,x_2,t\right)$ обозначено первое (линейное) приближение, выражаемое формулой (13).

Сначала необходимо вычислить правую часть в уравнении (20). Так как формулы для первого приближения (19) различны для полупространства и слоя, то уравнение (20) распадается на два различающиеся уравнения (для полупространства и слоя)

$$\left(v_T^{\Pi}\right)^{-2}\ddot{u}_3^{\Pi(2)}-\left(u_{3,11}^{\Pi(2)}+u_{3,22}^{\Pi(2)}\right)=\left(L_\Pi\right)^3k^4A_\Pi^{(2)}e^{-3\beta_\Pi kx_1}e^{i3\left(kx_2-\omega t\right)};$$

$$A_\Pi^{(2)}=\tilde{T}_1^{\Pi}\left[\left(\beta_\Pi\right)^4+1\right]-6\tilde{T}_2^{\Pi}\left(\beta_\Pi\right)^2;\quad \tilde{T}_\alpha^{C(\Pi)}=\left(T_\alpha^{C(\Pi)}/\mu_{C(\Pi)}\right); \tag{21}$$

$$\left(v_T^C\right)^{-2}\ddot{u}_3^{C(2)}-\left(u_{3,11}^{C(2)}+u_{3,22}^{C(2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(L_\Pi\right)^3k^4e^{3i\left(kx_2-\omega t\right)}\left\{\begin{array}{l}A_{C1s}^{(2)}\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\mathrm{C}}\right)^2-1\right]}kx_1+A_{C1c}^{(2)}\cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\mathrm{C}}\right)^2-1\right]}kx_1+\\+A_{C3s}^{(2)}\sin3\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\mathrm{C}}\right)^2-1\right]}kx_1+A_{C3c}^{(2)}\cos3\sqrt{\left[\left(v/v_T^{\mathrm{C}}\right)^2-1\right]}kx_1\end{array}\right\};$$

$$A_{C1s}^{(2)}=M\left\{-\tilde{T}_1^C\left[M^2\left(\left(\beta_C\right)^4-3\right)+3\left(\beta_C\right)^4-2\left(\beta_C\right)^4-3\right]-\tilde{T}_2^C\left(\beta_C\right)^2\left(8M^2-22\right)\right\};$$

$$A_{C1c}^{(2)}=\left\{\tilde{T}_1^C\left[\left(\beta_C\right)^4\left(M^2+1\right)+3M^2-3\right]+3\tilde{T}_2^C\left(\beta_C\right)^2\left[8M^2-4\right]\right\};$$

$$A_{C3s}^{(2)} = M\left\{\tilde{T}_1^C\left[-M^2\left(\left(\beta_C\right)^4+1\right)+3\left(\beta_C\right)^4-3\right]+\tilde{T}_2^C\left(\beta_C\right)^2\left(-4M^2+8\right)\right\};$$

$$A_{C3c}^{(2)} = \left\{\tilde{T}_1^C\left[3M^2\left(\left(\beta_C\right)^4+1\right)-\left(\beta_C\right)^4-1\right]+\tilde{T}_2^C\left(\beta_C\right)^2\left[-18M^2+6\right]\right\};\quad M=\frac{\mu_\Pi}{\mu_C}\frac{\beta_\Pi}{\beta_C}. \quad (22)$$

Поскольку правые части неоднородных линейных уравнений (21, 22) являются решениями соответствующих (21), (22) однородных линейных уравнений, то ситуация относится к, так называемому, случаю резонанса. Между уравнениями (21) и (22) есть существенное различие: если в правой части (21) содержится лишь третья гармоника по координате x_1, то правая часть (22) включает первую и третью. Ранее в подобных задачах [9, 11] появление первой гармоники во втором приближении не наблюдалось, однако наблюдалось появление четвертой гармоники в решении четвертого приближения (в котором предположительно должна бы присутствовать лишь восьмая гармоника) [16].

Решения уравнений (21), (22) получаем в виде

$$u_3^{\Pi(2)} = \frac{x_1x_2\left[\sqrt{1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2}x_2+ix_1\right]}{\left[1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2\right]\left(x_2\right)^2+\left(x_1\right)^2}K_\Pi^{(2)}e^{-3\beta_\Pi kx_1}e^{i3(kx_2-\omega t)}; \quad (23)$$

$$K_\Pi^{(2)} = \frac{1}{6}\left(L_\Pi\right)^3k^3A_\Pi^{(2)} = \frac{1}{6}\left(L_\Pi\right)^3k^3\left\{\tilde{T}_1^\Pi\left[\left(1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2\right)^2+1\right]-6\tilde{T}_2^\Pi\left(1-\left(v/v_T^\Pi\right)^2\right)\right\};$$

$$u_3^{C(2)}\left(x_1,x_2,t\right) = x_1x_2\frac{\left(L_\Pi\right)^3k^3}{24}\left\{K_{1s}\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}kx_1+K_{1c}\cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}kx_1+\right.$$

$$\left.+K_{3s}\sin3\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}kx_1+K_{3c}\cos3\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}kx_1\right\}e^{3i(kx_2-\omega t)}; \quad (24)$$

$$K_{1s} = \frac{3}{\left\{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]\left(x_2\right)^2-9\left(x_1\right)^2\right\}}\left\{\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}A_{C1s}^{(2)}x_2-3iA_{C1c}^{(2)}x_1\right\};$$

$$K_{1c} = \frac{3}{\left\{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]\left(x_2\right)^2-9\left(x_1\right)^2\right\}}\left\{\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}A_{C1s}^{(2)}x_2+3iA_{C1c}^{(2)}x_1\right\};$$

$$K_{3s} = \frac{1}{-\left(x_1\right)^2+\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]\left(x_2\right)^2}\left\{-iA_{C3s}^{(2)}x_1-A_{C3c}^{(2)}\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}x_2\right\};$$

$$K_{3c} = \frac{1}{-\left(x_1\right)^2+\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]\left(x_2\right)^2}\left\{-iA_{C3c}^{(2)}x_1+A_{C3s}^{(2)}\sqrt{\left[\left(v/v_T^C\right)^2-1\right]}x_2\right\}.$$

Решение в виде двух первых приближений будет следующим:

$$u_3^\Pi\left(x_1,x_2,t\right) = u_3^{\Pi(1)}+u_3^{\Pi(2)} = \quad (25)$$

$$
= L_{\Pi} e^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2\right]}kx_1} e^{i(kx_2-\omega t)} + \frac{x_1x_2\left[\sqrt{1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2}x_2 + ix_1\right]}{\left[1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2\right]\left(x_2\right)^2+\left(x_1\right)^2} K_{\Pi}^{(2)} e^{-3\beta_{\Pi} kx_1} e^{i3(kx_2-\omega t)}
$$

при $x_2 \in (-\infty, \infty),\ x_1 \in [0;\infty)$;

$$
u_3^{C(1)}\left(x_1, x_2, t\right) = \tag{26}
$$

$$
= \left\{ \begin{matrix} \left[-L_{\Pi}\dfrac{\mu_{\Pi}}{\mu_C}\dfrac{\sqrt{1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2}}{\sqrt{\left(v/v_T^{C}\right)^2-1}} + x_1x_2\dfrac{\left(L_{\Pi}\right)^3k^3}{24}K_{1s} \right]\sin\sqrt{\left[\left(v/v_T^{C}\right)^2-1\right]}kx_1 + \\ \left[L_{\Pi} + x_1x_2\dfrac{\left(L_{\Pi}\right)^3k^3}{24}K_{1c} \right]\cos\sqrt{\left[\left(v/v_T^{C}\right)^2-1\right]}kx_1 \end{matrix} \right\} e^{i(kx_2-\omega t)} +
$$

$$
\left. + K_{3s}\sin 3\sqrt{\left[\left(v/v_T^{C}\right)^2-1\right]}kx_1 + K_{3c}\cos 3\sqrt{\left[\left(v/v_T^{C}\right)^2-1\right]}kx_1 \right\} e^{3i(kx_2-\omega t)}
$$

при $x_2 \in (-\infty, \infty),\ x_1 \in [-h;0]$.

Следует отметить, что, как во всех полученных методом последовательных приближений решениях, в решениях (25), (26) содержатся неизвестные параметры базового линейного решения: амплитуда L_{Π} и волновое число k. Если амплитуду согласно признаку, что волна Лява является бегущей волной считают произвольной, то волновое число необходимо определять из граничных условий. Однако, согласно принятой постановке задачи эти условия уже нелинейные, что создает возможность учета влияния нелинейности на волновое число.

4. Нелинейные граничные условия.

Ограничимся анализом случая, когда в постановке задачи учитывается физическая нелинейность и геометрически задача линейная. Тогда границы $x_1 = 0$ и $x_1 = -h$ могут полагаться прямолинейными и запись коэффициентов T_1, T_2 в нелинейном волновом уравнении упрощается: $T_1 = \frac{3}{4}\left(A + 2B\right)$; $T_2 = \frac{1}{2}\left(A + B\right)$.

Запишем сначала напряжения в граничных условиях (14),(15) через перемещения, полагая при этом, что перемещения соответствуют классической волне Лява (13). Тогда первое граничное условие $u_3^C\left(x_1 = 0, x_2\right) = u_3^{\Pi}\left(x_1 = 0, x_2\right)$ остается линейным и дает связь между двумя амплитудами $L_{\Pi} = L_{2C}$. Второе и третье условия будут уже нелинейными и с учетом обозначений в (16) и первого условия будут иметь вид

$$
t_{13}^C\left(x_1 = 0, x_2\right) = t_{13}^{\Pi}\left(x_1 = 0, x_2\right) \rightarrow
$$

$$
\rightarrow l_C L_{1C} + l_{\Pi} L_{2C} = n_{\Pi}\left(L_{2C}\right)^3 + n_{1C}\left(L_{1C}\right)^3 + n_{2C}L_{1C}\left(L_{2C}\right)^2; \tag{27}
$$

$$
n_{\Pi} = \left\{ T_{1\Pi}k\left[1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2\right] - T_{2\Pi}k^2 \right\}\sqrt{1-\left(v/v_T^{\Pi}\right)^2}E^2;
$$

$$
n_{1C} = T_{1C}\left[\left(v/v_T^{C}\right)^2-1\right]^{3/2}k^2E^2; \quad n_{2C} = -T_{2C}\sqrt{\left(v/v_T^{C}\right)^2-1}\,k^2E^2;
$$

$$t_{13}^{C}\left(x_1=-h,x_2\right)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow l_3L_{1C}+l_4L_{2C}=n_{3C}\left(L_{1C}\right)^3+n_{4C}\left(L_{2C}\right)^3+n_{5C}\left(L_{1C}\right)^2L_{2C}+n_{6C}L_{1C}\left(L_{2C}\right)^2\,; \qquad (28)$$

$$n_{3C}=-\left[T_{1C}C\left(C_h\right)^2-T_{2C}\left(S_h\right)^2\right]k^2C_hE^2\,;\;\; n_{4C}=-\left[T_{1C}C\left(S_h\right)^2-T_{2C}\left(C_h\right)^2\right]S_hk^2E^2\,;$$

$$n_{5C}=-\left\{3T_{1C}C\left(C_h\right)^2+T_{2C}\left[2\left(C_h\right)^2-\left(S_h\right)^2\right]\right\}S_hk^2E^2\,;$$

$$n_{6C}=-\left\{3T_{1C}C\left(S_h\right)^2-T_{2C}\left[\left(C_h\right)^2-2\left(S_h\right)^2\right]\right\}C_hk^2E^2\,.$$

Следует обратить внимание на присутствие множителя E^2 во всех коэффициентах при нелинейных составляющих. Это свидетельствует о том, что учет нелинейности будет сопровождаться в том числе и зависимостью нелинейного решения от формы волны.

Анализ кубически нелинейной системы алгебраических уравнений (27), (28) проведем по алгоритму, предложенному в [14] при анализе нелинейной волны Рэлея для квадратично нелинейной системы. Алгоритм состоит из ряда шагов.

Шаг 1. Предположим, что одна амплитуда выражается линейно через другую

$$L_{2C}=mL_{1C} \qquad (29)$$

(подобно классическому случаю, однако множитель m здесь неизвестен). Тогда система (27), (28) может быть представлена следующим образом:

$$\left(l_C+l_{\Pi}m\right)L_{1C}=\left(n_{\Pi}m^3+n_{1C}+n_{2C}m^2\right)\left(L_{1C}\right)^3\,; \qquad (30)$$

$$\left(l_3+l_4m\right)L_{1C}=\left(n_{3C}+n_{4C}m^3+n_{5C}m+n_{6C}m^2\right)\left(L_{1C}\right)^3\,.$$

Заметим, что из (30) следует линейный случай $m=-\left(l_C/l_{\Pi}\right)=-\left(l_3/l_4\right)$, если положить все коэффициенты при нелинейных составляющих n_{Π},n_{kC} равными нулю.

Шаг 2. Преобразуем систему (30) к виду

$$L_{1C}\left[\left(l_C+l_{\Pi}m\right)-\left(n_{1C}+n_{2C}m^2+n_{\Pi}m^3\right)\left(L_{1C}\right)^2\right]=0\,; \qquad (31)$$

$$L_{1C}\left[\left(l_3+l_4m\right)-\left(n_{3C}+n_{5C}m+n_{6C}m^2+n_{4C}m^3\right)\left(L_{1C}\right)^2\right]=0 \qquad (32)$$

и рассмотрим ее с такой точки зрения: что полезно было бы получить из анализа нелинейных граничных условий, учитывая опыт анализа линейных граничных условий. Речь идет о двух результатах. Первый состоит в том, что амплитуда L_{1C} является произвольной. Второй должен выражаться в получении уравнения для определения неизвестного волнового числа k волны Лява.

Шаг 3. Первый результат легко достигается, если в (31) и (32) положить оба выражения в квадратных скобках равными нулю. Тогда амплитуда L_{1C} действительно может считаться произвольной, поскольку для удовлетворения системы достаточно равенство нулю выражений в квадратных скобках.

Шаг 4. Приравнивая выражения в квадратных скобках к нулю, получаем новую систему уравнений

$$\left(l_C + l_\Pi m\right) - \left(n_{1C} + n_{2C} m^2 + n_\Pi m^3\right)\left(L_{1C}\right)^2 = 0\ ; \tag{33}$$

$$\left(l_3 + l_4 m\right) - \left(n_{3C} + n_{5C} m + n_{6C} m^2 + n_{4C} m^3\right)\left(L_{1C}\right)^2 = 0\ , \tag{34}$$

в которой неизвестными являются коэффициент m и волновое число k, тогда как произвольная амплитуда L_{1C} может здесь полагаться параметром.

Шаг 5. Представим уравнение (33) как кубическое уравнение относительно m

$$m^3 + \frac{n_{2C}}{n_\Pi} m^2 - \frac{l_\Pi}{n_\Pi \left(L_{1C}\right)^2} m + \frac{-l_C + n_{1C}\left(L_{1C}\right)^2}{n_\Pi \left(L_{1C}\right)^2} = 0$$

и определим его корни по известной процедуре. Проанализируем далее первый корень, который, как известно, всегда действителен,

$$\begin{gathered} m_1 = \sqrt[3]{-\frac{\left(n_{2C}\right)^3}{27\left(n_\Pi\right)^3} - \frac{n_{1C}}{2n_\Pi} - \frac{l_\Pi n_{2C} + 3 l_C n_\Pi}{6\left(n_\Pi\right)^2\left(L_{1C}\right)^2} + \sqrt{Q}} + \\ + \sqrt[3]{-\frac{\left(n_{2C}\right)^3}{27\left(n_\Pi\right)^3} - \frac{n_{1C}}{2n_\Pi} - \frac{l_\Pi n_{2C} + 3 l_C n_\Pi}{6\left(n_\Pi\right)^2\left(L_{1C}\right)^2} - \sqrt{Q}} + \frac{n_{2C}}{3n_\Pi}; \end{gathered} \tag{35}$$

$$\sqrt{Q} = \frac{i\left(l_\Pi\right)^{3/2}}{3^{3/2}\left(L_{1C}\right)^3\left(n_\Pi\right)^{3/2}} \left\{ \begin{aligned} & -1 + \frac{\left[\frac{4}{9} l_C l_\Pi n_{2C} + 27\left(l_C\right)^2 n_\Pi\right]}{8\left(l_\Pi\right)^3}\left(L_{1C}\right)^2 + \\ & + \frac{54 l_C n_{1C}\left(n_\Pi\right)^2 + \frac{4}{9} l_\Pi n_\Pi n_{2C} n_{1C} + 4 l_C\left(n_{2C}\right)^3}{8\left(l_\Pi\right)^3 n_\Pi}\left(L_{1C}\right)^4 + \\ & + \frac{27\left(n_\Pi\right)^2\left(n_{1C}\right)^2 + 4\left(n_{2C}\right)^3 n_{1C}}{8\left(l_\Pi\right)^3 n_\Pi}\left(L_{1C}\right)^6 \end{aligned} \right\}.$$

Исходя из физического смысла задачи (амплитуды волн малы и, к примеру, для материалов с внутренней структурой микроуровня имеют порядок 10^{-4} – 10^{-5} м), вычислим приближенно с учетом малости $\left(L_{1C}\right)^2$ присутствующие в (35) квадратный и кубический корни. Тогда выражению (35) можно придать вид

$$m_1 = -\frac{l_C}{l_\Pi} + \frac{2\left(n_{2C}\right)^3}{27 l_\Pi \left(n_\Pi\right)^3}\left(L_{1C}\right)^2 . \tag{36}$$

Основная особенность представлений (35) и (36) состоит в том, что коэффициент m зависит нелинейным образом от упругих постоянных (Ляме и Мурнагана) материала, неизвестного волнового числа k, амплитуды L_{1C} и формы профиля (в коэффициенты n_Π, n_{2C} входит $E = e^{i(kx_1 - \omega t)}$).

Итак, учет нелинейности деформирования усложняет существенно зависимость между амплитудами L_{1C} и L_{2C}.

Шаг 6. Преобразуем уравнение (34), используя при этом выражение для m^3 из уравнения (33) $m^3 = -\frac{n_{6C}}{n_{4C}}m^2 - \frac{n_{5C}\left(L_{1C}\right)^2 - l_4}{n_{4C}\left(L_{1C}\right)^2}m - \frac{n_{3C}\left(L_{1C}\right)^2 - l_3}{n_{4C}\left(L_{1C}\right)^2}$ и вычисляя m^2 с помощью формулы (36) $m^2 = \frac{\left(l_C\right)^2}{\left(l_\Pi\right)^2} - \frac{4l_C\left(n_{2C}\right)^3}{27\left(l_\Pi\right)^2\left(n_\Pi\right)^3}\left(L_{1C}\right)^2 + \frac{2^2\left(n_{2C}\right)^6}{3^6\left(l_\Pi\right)^2\left(n_\Pi\right)^6}\left(L_{1C}\right)^4$, к виду

$$m = -\frac{1}{l_\Pi n_{4C} - l_4 n_\Pi + n_\Pi n_{5C}\left(L_{1C}\right)^2} \times \tag{37}$$

$$\times \left\{ \begin{gathered} l_C n_{4C} - l_3 n_\Pi + \left[\left(n_\Pi n_{3C} - n_{1C} n_{4C}\right) + \left(n_\Pi n_{6C} - n_{2C} n_{4C}\right)\frac{\left(l_C\right)^2}{\left(l_\Pi\right)^2}\right]\left(L_{1C}\right)^2 + \\ \left(n_\Pi n_{6C} - n_{2C} n_{4C}\right)\left[-\frac{4l_C\left(n_{2C}\right)^3}{27\left(l_\Pi\right)^2\left(n_\Pi\right)^3}\left(L_{1C}\right)^4 + \frac{2^2\left(n_{2C}\right)^6}{3^6\left(l_\Pi\right)^2\left(n_\Pi\right)^6}\left(L_{1C}\right)^6\right] \end{gathered} \right\}.$$

Шаг 7. Подставляем значение коэффициента m (35) в уравнение (37) (или приравниваем (35) и (37)), в результате чего получаем новое уравнение для определения волнового числа k

$$-\left(l_C l_4 - l_\Pi l_3\right) + \tag{38}$$

$$+\left\{\left[\frac{l_C}{l_\Pi}n_\Pi n_{5C} - \left(l_\Pi n_{4C} - l_4 n_\Pi\right)\right]\frac{2\left(n_{2C}\right)^3}{27\left(n_\Pi\right)^4} - \frac{l_\Pi}{n_\Pi}\left(n_\Pi n_{3C} - n_{1C} n_{4C}\right) + \left(n_\Pi n_{6C} - n_{2C} n_{4C}\right)\frac{\left(l_C\right)^2}{l_\Pi n_\Pi}\right\}\left(L_{1C}\right)^2 +$$

$$+\left[\left(n_\Pi n_{6C} - n_{2C} n_{4C}\right)\frac{2l_C}{l_\Pi} - n_\Pi n_{5C}\right]\frac{2\left(n_{2C}\right)^3}{27\left(n_\Pi\right)^4}\left(L_{1C}\right)^4 -$$

$$-\left(n_\Pi n_{6C} - n_{2C} n_{4C}\right)\frac{2^2\left(n_{2C}\right)^6}{3^6 l_\Pi\left(n_\Pi\right)^7}\left(L_{1C}\right)^6 = 0 .$$

Необходимо отметить, что первая составляющая уравнения (38) соответствует линейной задаче, т.е. при стремлении коэффициентов n_k к нулю (при переходе к линейному случаю) из уравнения (38) следует уравнение (17).

Уравнение (38) имеет такую особенность, что его решение – волновое число k – будет зависеть не только от волновых чисел плоских линейных поперечных волн в слое и подложке $k_T^{C(\Pi)}$ (от упругих постоянных Ляме), что соответствовало бы решению для линейного случая, но также – от упругих постоянных Мурнагана, амплитудного множителя L_{1C} и формы волны (квадрата первой гармоники E и ее четных степеней).

Учитывая состояние анализа линейной задачи, который достаточно сложен и включает числовое моделирование, можно предположить, что и анализ полученного нового уравнения (38) для определения волнового числа волны Лява в физически нелинейно-упругом материале, возможно, окажется доступным только на качественном уровне и уровне числового анализа.

Рассмотрим простой вариант использования уравнения (38) в общем анализе волны Лява в нелинейно-упругом материале. Предположим, что амплитуда L_{1C} достаточно мала, так что ее степенями выше второй можно пренебречь. Тогда уравнение (38) упрощается к виду

$$
-\left(l_C l_4 - l_\Pi l_3\right) + \left\{ \begin{array}{l} \left[l_C n_\Pi n_{5C} - l_\Pi \left(l_\Pi n_{4C} - l_4 n_\Pi \right) \right] \dfrac{2\left(n_{2C}\right)^3}{27 l_\Pi \left(n_\Pi\right)^4} - \\ - \dfrac{l_\Pi}{n_\Pi} \left(n_\Pi n_{3C} - n_{1C} n_{4C} \right) + \dfrac{\left(l_C\right)^2}{n_\Pi l_\Pi} \left(n_\Pi n_{6C} - n_{2C} n_{4C} \right) \end{array} \right\} \left(L_{1C}\right)^2 = 0 . \qquad (39)
$$

Наличие в коэффициентах n_Π, n_C, n_{iC} множителя $E^2 = e^{2i(kx-\omega t)}$ позволяет сделать вывод качественного характера о значении волнового числа k при его определении из уравнения (39): поскольку значение множителя E^2 изменяется при движении волны, то одновременно будет изменяться и значение волнового числа. Более конкретно, поскольку E^2 изменяется непрерывно между значениями +1 и 0, то значение волнового числа будет зависеть от точки на профиле волны – при нулевом значении E волновое число будет совпадать со значением из линейного анализа, на верхнем гребне (горбе) и нижнем гребне (впадине) профиля при подстановке значений n_Π, n_C, n_{iC} в уравнение (39) следует брать $E = 1$. Это свидетельствует, что значение волнового числа будет отклоняться в большую сторону от его значения из линейного анализа и обратно.

Следует отметить, что следующая из уравнения (39) изменяемость волнового числа $k = \left(\omega / v_{ph}\right)$ означает изменяемость длины волны $\lambda = \left(2\pi / k\right)$ при неизменной частоте и вводит новый фактор искажения начально гармонического профиля волны Лява. Такое же новое волновое явление было обнаружено ранее и для поверхностной волны Рэлея [15]. В классическом нелинейном анализе плоских волн этот фактор отсутствует, поскольку отсутствует граница в формулировке задач. Изменяемость волнового числа при движении волны возможно создаст дополнительные сложности при числовом моделировании, так как потребуется перевычислять значение k на каждом последующем шаге.

Заключение.

Таким образом, в статье сформулирована задача о волне Лява в классической постановке при дополнительном предположении о существовании нелинейности в описании деформирования. Для учета нелинейности использована трехконстантная модель Мурнагана. Выведены новое нелинейное волновое уравнение в смещениях, которое включает линейную часть и часть со слагаемыми только третьего и пятого порядков нелинейности, и новые нелинейные граничные условия, также состоящие из линейной и нелинейной частей. Для случая учета лишь физической нелинейности методом последовательных приближений получено решение нового нелинейного волнового уравнения в рамках первых двух приближений с нелинейными граничными условиями. Выведено новое нелинейное уравнение для определения волнового числа, которое демонстрирует появление нового фактора искажения начального гармонического профиля волны – искажения вследствие изменения длины волны при неизменной частоте.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про пружну хвилю Лява у класичній постановці при додатковому припущенні про існування нелінійності в описі деформування. Використано нелінійну модель Мурнагана. Виведено нове нелінійне хвильове рівняння у зміщеннях, яке включає лінійну частину і частину з доданками лише третього і п'ятого порядку нелінійності. Для випадку врахування тільки фізичної нелінійності отримано методом послідовних наближень розв'язок нового нелінійного хвильового рівняння з нелінійними граничними умовами в рамках перших двох наближень. Виведено нове нелінійне рівняння для знаходження хвильового числа, яке демонструє появу нового фактора спотворення початкового гармонічного профіля хвилі – спотворення внаслідок зміни довжини хвилі при незмінній частоті.

1. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
2. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
3. *Лейбензон Л.С.* Краткий курс теории упругости. – М.; Л.: ОГИЗ, 1942. – 304 с.
4. *Рущицкий Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка, 1997. – 377 с.
5. *Рущицький Я.Я., Хотенко О.О.* Наближені розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, що описують пружні поверхневі хвилі Релея // Доп. НАН України. – 2012. – №1. – С. 64 – 69.
6. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North Holland, 1973. – 436 p.
7. *Cattani C., Rushchitsky J.J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
8. *Dielesaint E., Royer D.* Ondes elastiques dans les solides. Application au traitement du signal. – Paris: Masson et Cie, 1974. – 424 p.
9. *Murnaghan F.D.* Finite Deformations in an Elastic Bodies. – New York: Willey, 1951. – 140 p.
10. *Nowacki W.* Teoria sprężystośći. – Warszawa: PWN, 1970. – 769 s.
11. *Rushchitsky J.J.* Interaction of waves in solid mixtures // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 2. – P. 35 – 74.
12. *Rushchitsky J.J.* Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p. (free e-book, bookboon.com)
13. *Rushchitsky J.J., Khotenko E.A.* On Rayleigh Wave in Quadratically Nonlinear Elastic Half – Space (Murnaghan Model) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 3. – P. 268 – 275.
14. *Rushchitsky J.J., Khotenko E.A.* On Role of Boundary Conditions in Nonlinear Analysis of the Rayleigh Wave // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 3. – P. 305 – 318.
15. *Rushchitsky J.J., Kovalenko A.P., Savelieva E.V.* Self-Generation of Transverse Waves in Hyperelastic Media // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, N 5. – P. 30 – 38.
16. *Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V., Khotenko I.N.* On Generation of the Second, Fourth, Eighth, and Next Harmonics by the Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Wave // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 6. – P. 649 – 659.

Поступила 26.12.2010 Утверджена в печать 06.06.2013