ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9;517.28;517.3

А. В. Антонюк, А. Н. Кочубей, С. И. Пискарев

О компактности и равномерной непрерывности разрешающего семейства для уравнения с дробными производными

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Исследованы компактность и равномерная непрерывность разрешающего семейства операторов уравнений с дробными производными в банаховом пространстве.

Известен классический результат [1] о том, что для C_0-полугруппы $\exp(tA)$, непрерывной при $t > 0$ по норме операторов, ее компактность для всех $t > 0$ эквивалентна компактности резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ для некоторого $\lambda \in \rho(A)$. Следует также заметить [2], что компактность генератора A эквивалентна компактности семейства $\exp(tA) - I$ для любого $t \geqslant 0$. Свойство непрерывности полугруппы операторов при $t > 0$ в равномерной операторной топологии и само по себе принадлежит к числу важнейших [1, 3]. С другой стороны, компактность разрешающего семейства для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве интенсивно используется при изучении различных аспектов анализа существования решений [4] и их аппроксимации [5] для дифференциальных уравнений вида $u'(t) = Au(t) + f(u(t))$. С этой точки зрения представляет интерес исследование аналогичных свойств для уравнений с производными дробного порядка, что и составляет цель данной работы.

Отметим, что эволюционные уравнения порядка $\alpha \in (0, 1)$ используются в физике для моделирования аномальной диффузии, при которой среднеквадратичное отклонение диффундирующей частицы за время t ведет себя как $\mathrm{const} \cdot t^{\alpha}$ при $t \to \infty$. Детальное исследование свойств соответствующих эволюционных семейств может быть полезным для разработки приближенных и численных методов для таких уравнений.

Для $0 < \alpha < 1$ скажем, что задача Коши в банаховом пространстве E

$$(\mathbb{D}_t^{(\alpha)} u)(t) = Au(t), \qquad u(0) = x \tag{1}$$

является корректно поставленной, если уравнение Вольтерра

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)Au(s)\,ds \tag{2}$$

корректно разрешимо в смысле [6]. Соответствующее разрешающее семейство операторов $x \mapsto u(t)$ для $t > 0$ обозначим $T_\alpha(t, A)$. Выше $\mathbb{D}_t^{(\alpha)}$ обозначает производную Капуто–Джрбашяна [7]:

$$(\mathbb{D}_t^{(\alpha)} f)(t) = \frac{d}{dt}(I_{0+}^{1-\alpha} f)(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha},$$

где $(I_{0+}^{\alpha} f)(t) := (g_\alpha * f)(t)$ — дробный интеграл, $g_\alpha(t) := t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Предполагается, что разрешающее семейство операторов $T_\alpha(t, A)$ задачи (2) для некоторых M, $\omega > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|T_\alpha(t, A)\| \leqslant M e^{\omega t}, \qquad t > 0. \tag{3}$$

При этом $\{\lambda^\alpha \colon \operatorname{Re} e\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ и для $\operatorname{Re} e\lambda > \omega$, $x \in E$ имеем

$$R_\alpha(\lambda, A) := \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t, A) x\,dt. \tag{4}$$

Аксиоматические характеристики разрешающего семейства, позволяющие восстановить оператор A, найдены в [8, 9].

Заметим, что для ограниченного оператора A семейство $T_\alpha(t, A)$ может быть задано с помощью функции Миттаг-Лефлера:

$$T_\alpha(t, A) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(t^\alpha A)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}. \tag{5}$$

Достаточные условия разрешимости задачи (1) с неограниченным оператором A и теорема единственности решения доказаны в [10, 11].

1. Свойства $\boldsymbol{T_\alpha(t, A)}$, когда $\boldsymbol{A}$ порождает $\boldsymbol{C_0}$-полугруппу. Если оператор A порождает C_0-полугруппу $\exp(tA)$, то для нее выполнена оценка вида (3) с некоторыми константами M_1 и ω. Тогда для разрешающего семейства $T_\alpha(t, A)$ оценка (3) выполнена с константами M_α и $\omega_\alpha = 1/\alpha$. Более того, для любых α, β: $0 < \alpha < \beta < 1$ имеет место тождество субординации [12]:

$$T_\alpha(t, A) = \int_0^\infty \varphi_{t,\alpha/\beta}(s) T_\beta(s, A)\,ds, \qquad t > 0, \tag{6}$$

с $\varphi_{t,\gamma}(s) = t^{-\gamma}\Phi_\gamma(st^{-\gamma})$, где $\Phi_\gamma(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^\infty (-\zeta)^k/(k!\Gamma(-\gamma k + 1 - \gamma))$ — функция Райта.

Заметим, что $\Phi_\gamma(t) \geqslant 0$, $t > 0$ и $\int_0^\infty \Phi_\gamma(t)\,dt = 1$.

Утверждение 1. *Если разрешающее семейство $T_\beta(t)$ для некоторого $0 < \beta \leqslant 1$ является равномерно непрерывным при $t > 0$, то оператор-функция $T_\alpha(t)$ для любого $0 < < \alpha < \beta$ обладает тем же свойством.*

Доказательство. Из асимптотических свойств функции Райта следует

$$0 \leqslant \varphi_{t,\alpha/\beta}(s) \leqslant Ct^{-\alpha/\beta} e^{-cs^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}, \qquad s > 0. \tag{7}$$

Для $t_0 > 0$ из некоторого интервала $\Delta = (t_0/2,\, 2t_0)$ из (7) имеем

$$0 \leqslant \varphi_{t,\alpha/\beta}(s) \leqslant 2^{\alpha/\beta} C t_0^{-\alpha/\beta} e^{-2^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} cs^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} t_0^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}, \qquad s > 0,$$

т. е.

$$0 \leqslant \varphi_{t,\alpha/\beta}(s) \leqslant C_1 e^{-c_1 s^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}, \qquad s > 0. \tag{8}$$

Из предположений следует, что $T_\alpha(t)$ является сильно измеримой со значениями в банаховом пространстве $B(E)$ [13, следствие 1.1.2]. Используя $B(E)$-значную версию теоремы о мажорируемой сходимости [13, теорема 1.1.8], из (3) и (8) получаем требуемое свойство непрерывности. Заметим, что $\beta/(\beta-\alpha) > 1$.

2. Свойства компактности разрешающего семейства. Пусть $B_0(E)$ — пространство компактных операторов в пространстве E.

Утверждение 2. *1. Если для некоторого $\alpha \in (0,1)$ $T_\alpha(t,A) \in B_0(E)$ для $t > 0$, то $T_\beta(t,A) \in B_0(E)$ для любого $\beta \in (0,\alpha)$.*

2. Если для некоторого $\alpha \in (0,1)$ $T_\alpha(t,A) - I \in B_0(E)$ для $t > 0$, то $T_\beta(t,A) - I \in B_0(E)$ для любого $\beta \in (0,\alpha)$.

Доказательство следует из свойства субординации (6), оценки (8) и теоремы 1.3 в [14].

Теорема 1. *Для разрешающего семейства $T_\alpha(t)$, удовлетворяющего оценке* (3), *следующие условия эквивалентны:*

(i) $T_\alpha(t) - I \in B_0(E)$;

(ii) $\lambda R_\alpha(\lambda) - I \in B_0(E)$ для $\{\lambda^\alpha\colon \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$;

(iii) $A \in B_0(E)$.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из теоремы 1.3 в [14] и представления

$$(\lambda R_\alpha(\lambda) - I)x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_\alpha(t) - I)\,x dt, \qquad x \in E.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Из аксиоматического описания T_α, доказанного в [8], выводится, что $\int_0^t g_\alpha(t - - \tau)T_\alpha(\tau)x\,d\tau \in \mathcal{D}(A)$ для всех $x \in E$, что дает возможность вынести оператор A из-под знака интеграла в (2). Тождество

$$R_\alpha(\lambda)(T_\alpha(t,A) - I) = (R_\alpha(\lambda) - \lambda^{\alpha-1})(T_\alpha(t,A) - I) + \lambda^{\alpha-1}(T_\alpha(t,A) - I)$$

приводит к представлению

$$T_\alpha(t,A) - I = -(\lambda R_\alpha(\lambda) - I)(T_\alpha(t,A) - I) + (\lambda R_\alpha(\lambda) - I)\int_0^t g_\alpha(t-\tau)T_\alpha(\tau,A)f\,d\tau,$$

из которого следует требуемая компактность оператора $T_\alpha(t) - I$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Из компактности оператора $\lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1} - I$ следует, что оператор $(\lambda^\alpha I - - A)^{-1}$ является фредгольмовым с нулевым индексом и замкнутой областью значений (как сумма компактного и обратимого оператора I). Следовательно, оператор A является ограниченным. Компактность оператора A следует из тождества $\lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1} - I = (\lambda^\alpha I - - A)^{-1} A$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ следует из представления (5).

Теорема 2. *Для непрерывного по норме в гильбертовом пространстве H разрешающего семейства $T_\alpha(t, A)$, удовлетворяющего оценке* (3) *в гильбертовом пространстве H, следующие условия эквивалентны:*

(i) $T_\alpha(t, A) \in B_0(H)$ для $t > 0$;

(ii) $R_\alpha(\lambda, A) \in B_0(H)$ для λ с $\mathrm{Re}\, e\lambda > \omega$.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из представления (4) и теоремы 1.3 в [14].

$(ii) \Rightarrow (i)$. Для любого $x \in H$ и $\omega_0 := \omega - \mu_0 < 0$ из оценки (3) следует

$$\|T_\alpha(t, A)e^{-t\mu_0}x\| \leqslant M e^{\omega_0 t}\|x\|, \tag{9}$$

поэтому функция $\rho(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)e^{-\mu_0 t}T_\alpha(t, A)x \in L_2(\mathbb{R}, H)$, где $\chi_{[0,\infty)}(t)$ — характеристическая функция. Поскольку для преобразования Фурье $\mathcal{F}(\rho) = R_\alpha(\mu_0 + i\mu)x$ в гильбертовом пространстве справедлива теорема Планшереля, то, применяя обратное преобразование Фурье, получаем для всех $t > 0$

$$T_\alpha(t, A)e^{-\mu_0 t}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t}R_\alpha(\mu_0 + i\mu)x\, d\mu, \qquad x \in H. \tag{10}$$

Очевидно, что компактность семейства $T_\alpha(t, A)$ для фиксированного $t > 0$ эквивалентна компактности оператора $G_{\mu_0}(t) := T_\alpha(t, A)e^{-\mu_0 t}$. Кроме того, представление $R_\alpha(\lambda)x = = \dfrac{1}{\lambda}R_\alpha(\lambda)Ax + \dfrac{1}{\lambda}x$ влечет $R_\alpha(\mu_0 + i\mu)x \to 0$ при $|\mu| \to \infty$ для $x \in \mathcal{D}(A)$ и $\mu_0 > \omega$. Более того, непосредственным подсчетом получаем

$$R'_\alpha(\lambda)x = \frac{\alpha - 1}{\lambda}R_\alpha(\lambda)x - \alpha R^2_\alpha(\lambda)x, \tag{11}$$

$$R''_\alpha(\lambda)x = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\lambda^2}R_\alpha(\lambda)x - \frac{3\alpha(\alpha-1)}{\lambda}R^2_\alpha(\lambda)x + 2\alpha^2 R^3_\alpha(\lambda)x, \tag{12}$$

что, в частности, дает $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} R'_\alpha(\mu_0 + i\mu)x = 0$. Также видно, что компактность оператора $R_\alpha(\lambda)$ эквивалентна компактности $R''_\alpha(\lambda)$. Применяя дважды интегрирование по частям к (10), имеем

$$G_{\mu_0}(t)x = \frac{1}{\pi t^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t}R''_\alpha(\mu_0 + i\mu)x\, d\mu. \tag{13}$$

Окончательно, компактность оператора $G_{\mu_0}(t)$ является следствием оценки

$$\|G_{\mu_0}(t)x - G^N_{\mu_o}(t)x\| = \frac{1}{\pi t^2}\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left|\left\langle \int\limits_{|\mu|\geqslant N} e^{i\mu t}R''_\alpha(\mu_0 + i\mu)x\, d\mu, x^*\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2K}{\pi t^2}\sup_{|\mu|\geqslant N}\|R_\alpha(\mu_0 + i\mu)\| \cdot \|x\|,$$

которая доказывается с использованием (12), неравенств Гельдера и Коши, свойств преобразования Фурье, а также факта, что равномерная непрерывность семейства $T_\alpha(t, A)$, в силу теоремы 2.2 в [15], эквивалентна

$$\lim_{|\mu|\to\infty} \|R_\alpha(\mu_0 + i\mu)\| = 0, \qquad \text{для некоторого} \qquad \mu_0 > \omega. \tag{14}$$

Заметим, что операторы $G^N_{\mu_0}(t)x = 1/(\pi t^2) \int\limits_{-N}^{N} e^{i\mu t} R''_\alpha(\mu_0 + i\mu)x\, d\mu$ компактны в силу теоремы 1.3 в [14].

Замечание. Также можно дать достаточные условия на компактность семейства операторов $T_\alpha(t, A)$ при $t > 0$ непосредственно в терминах оператора A. Действительно, предположим, что множество $\Sigma_{\delta,\alpha} = \{\lambda\colon |\arg\lambda| < \alpha(\pi/2 + \delta); \lambda \neq 0\}$ для некоторого $\delta \in (0, \pi/2]$ принадлежит резольвентному множеству оператора A, кроме того, резольвента оператора A компактна и выполнена оценка

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^{-1}, \qquad \lambda \in \Sigma_{\delta,\alpha}.$$

Тогда оператор $T_\alpha(t, A)$ компактен для всех $t > 0$. Это следует из представления (4.2) в теореме 4.1 [11], оператора $T_\alpha(t, A)$ контурным интегралом, сходящимся в равномерной операторной топологии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-12/12-01-90 401Укр-а).

1. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations – New York: Springer, 1983. – 279 p.
2. *Cuthbert J. R.* On semigroups such that $T(t) - I$ is compact for some $t > 0$ // Z. Wahrsch. und Verw. Geb. – 1971. – **18**, No 1–2. – P. 9–16.
3. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations – Berlin: Springer, 2000. – 587 p.
4. *Bobylev N. A., Kim J. K., Korovin S. K., Piskarev S.* Semidiscrete approximations of semilinear periodic problems in Banach spaces // Nonlinear Anal. – 1998. – **33**, No 5. – P. 473–482.
5. *Piskarev S.* Convergence of difference schemes for the solution of nonlinear parabolic equations // Mat. Zam. – 1988. – **44**, No 1. – P. 112–123.
6. *Prüss J.* Evolutionary integral equation and applications. – Basel: Birkhäuser, 1993. – 366 p.
7. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
8. *Chen Ch., Li M.* On fractional resolvent operator functions // Semigroup Forum. – 2010. – **80**. – P. 121–142.
9. *Peng J., Li K.* A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract Cauchy problem // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **385**. – P. 786–796.
10. *Kochubei A. N.* A Cauchy problem for evolution equations of fractional order // Different. Equat. – 1989. – **25**. – P. 967–974.
11. *Bazhlekova E.* The abstract Cauchy problem for the fractional evolution equation // Fract. Calc. Appl. Anal. – 1998. – **1**. – P. 255–270.
12. *Bazhlekova E.* Subordination principle for fractional evolution equations // Ibid. – 2000. – **3**. – P. 213–230.
13. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. – Basel: Birkhäuser, 2011. – 539 p.
14. *Voigt J.* On the convex compactness property for the strong operator topology // Note Mat. – 1992. – **12**. – P. 259–269.

15. *Lizama C.* A characterization of uniform continuity for Volterra equations in Hilbert spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – **126**. – P. 3581–3587.

Институт математики НАН Украины, Киев
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Россия

Поступило в редакцию 10.12.2013

О. В. Антонюк, А. Н. Кочубей, С. І. Піскарьов

Про компактність та рівномірну неперервність розв'язуючої сім'ї для рівняння в дробових похідних

Досліджено компактність та рівномірну неперервність розв'язуючої сім'ї операторів рівнянь в дробових похідних в банаховому просторі.

A. V. Antoniouk, A. N. Kochubei, S. I. Piskarev

On the compactness and the uniform continuity of a resolvent family for a fractional differential equation

The compactness and the uniform continuity for a resolvent family of operators for fractional differential equations in a Banach space are studied.