В.С.Денисенко[1], В.И.Слынько[2]

НЕЧЕТКАЯ ИМПУЛЬСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

[1] Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого,
б-р. Шевченка, 81, 18031, Черкаси, Украина; e-mail: den_vik@ukr.net;
[2]Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vitstab@ukr.net

Abstract. The mathematical model of a pendulum with moving foundation is constructed in the form of Takagi – Sugeno impulsive fuzzy system. This fuzzy model permits to consider the wheel motion in the rough surface. The sufficient conditions of asymptotic stability of the upper position of the pendulum in hand are obtained.

Keywords: asymptotic stability, impulsive fuzzy system, matrix inequalities.

Введение.

Общим проблемам управления и стабилизации в механических системах и, в частности, проблеме управления маятником и стабилизации его в верхнем неустойчивом положении равновесия посвящены работы [1, 2, 11, 12, 17, 18]. Рассматриваемые задачи, кроме важного теоретического значения, имеют и некоторые приложения, например, проблемы управления моноциклом [6]. Управление движением такой механической системы изучено в [10]. При этом рассмотрено движение маятника при условии, что колесо, на котором закреплено основание маятника, движется по ровной поверхности.

В настоящей работе предложена математическая модель маятника при учете неровности поверхности, которую предполагается моделировать периодическими импульсными воздействиями.

Известно, что существуют механические системы, регулирование которыми посредством непрерывных управляющих воздействий является нецелесообразным (или невозможным). При этом импульсное управление, которое «мгновенно» изменяет состояния системы, является эффективным способом решения проблемы устойчивости для такого типа систем. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием являются адекватными моделями виброударных и робототехнических механических систем. Поэтому теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является предметом многих исследований [7, 8, 16, 17, 19 и др.]. Чтобы учесть различные виды неровностей поверхности, по которой движется колесо, для рассматриваемой механической системы с ударными воздействиями построена нечеткая модель Такаги – Сугено (Т – С) с импульсным управлением, асимптотическая устойчивость которой исследована на основе [15, теорема 2].

Нечеткие системы Такаги – Сугено [20] позволяют описать динамику широкого класса нелинейных систем в терминах правила «если – то», для которых исходными являются локально-линейные модели. Недавние результаты и обзор состояния по этому направлению даны в [3 – 5, 13 – 15 и др.].

Такаги и Сугено [20] предложили использовать набор нечетких предикатных правил в следующем виде (импульсный аналог) [3, 14]:

$$R_i \left(i=\overline{1,r}\right): \text{если} \quad x_1 \in M_{i1} \; u \ldots u \; x_n \in M_{in}, \quad \text{то}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_i x(t) \quad \left(t \neq \tau_k\right); \quad x(t+0) = B_i x(t) \quad \left(t = \tau_k, \; k = 1,2,...\right); \quad x(t_0+0) = x_0,$$

где R_i – i-тое нечеткое предикатное правило; r – число нечетких правил; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; A_i, B_i – постоянные $n \times n$ - матрицы; $x(t+0)$ – значение функции справа; кроме того, предполагается, что $x(\tau_k - 0) = \lim\limits_{t \to \tau_k - 0} x(t) = x(\tau_k)$. Моменты импульсного воздействия удовлетворяют соотношение

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < +\infty \; \left(k = 1, 2, \ldots \; (k \in \mathbb{N})\right).$$

Нечеткие множества M_{ij} определяются функциями принадлежности

$$\overline{M}_{ij} : \mathbb{R} \to [0,1] \; \left(i = \overline{1,r}, \; j = \overline{1,n}\right).$$

После приведения к четкости центроидным методом, получаем полную динамику нечеткой модели в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r} \omega_i(x) A_i x \Big/ \sum_{i=1}^{r} \omega_i(x); \quad x(t+0) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i(x) B_i x \Big/ \sum_{i=1}^{r} \omega_i(x)$$

($\omega_i(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} \overline{M}_{ij}(x_j)$ – так называемая весовая функция или «сила срабатывания каждого правила»).

Обозначим $\mu_i(x) = \omega_i(x) \Big/ \sum\limits_{i=1}^{r} \omega_i(x)$ – нормированные функции принадлежности.

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x) = 1$ и предполагается, что $\mu_i(x) \geq 0$, $i = \overline{1,r}$.

Тогда полная динамика нечеткой импульсной Т – С системы описывается локально-линейной системой дифференциальных уравнений возмущенного движения с импульсным воздействием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) A_i x(t) \qquad \left(t \neq \tau_k\right);$$

$$x(t+0) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) B_i x(t) \quad \left(t = \tau_k, \; k = 1, 2, \; ...\right); \tag{1}$$

$$x(t_0 + 0) = x_0.$$

Локально-линейные системы уравнений возмущенного движения с импульсным воздействием (1) являются адекватными моделями механических и другой природы систем, которые подвержены импульсным управлениям. К такого рода системам относятся механические системы с ударами, робототехнические системы, модели искусственных биологических сообществ и другие. Основные результаты по исследованию устойчивости нулевого состояния равновесия импульсных систем (1) получены в работах [3, 4, 14, 15], при этом во многих случаях задача устойчивости сведена к проблеме совместности некоторых систем матричных неравенств в классе положительно определенных матриц.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим математический маятник [10], точка подвеса которого находится в центре колеса (рис. 1). Симметричное относительно своей оси колесо может катиться без проскальзывания по ровной горизонтальной поверхности вдоль прямой линии. Пусть M – масса колеса; R – радиус колеса; ρ – радиус инерции относительно центра колеса O; φ – угол поворота против часовой стрелки фиксированного радиуса, который в начале движения ориентирован вдоль горизонтальной оси OX; x_0 – перемещение центра масс колеса O вдоль горизонтальной прямой так, что $\dot{x}_0 = -\dot{\varphi}R$. Пусть β – угол отклонения математического маятника от вертикали; m – его масса; r – расстояние от точки подвеса O до его центра масс. Между колесом и подвесом маятника есть сила сопротивления, момент которой, действующий на маятник, равен $L = \alpha(\dot{\beta} - \dot{\varphi})$, $\alpha < 0$. В качестве обобщенных координат выберем углы β, φ.

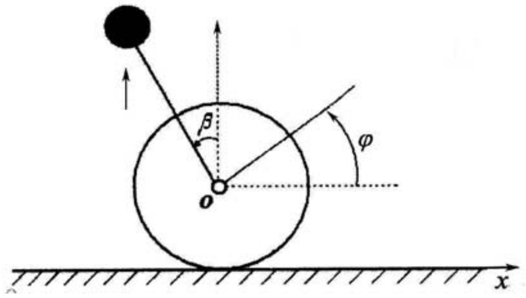

Рис. 1

Уравнения движения рассматриваемой механической системы получим в предположении, что к концу стержня, образующего математический маятник, в фиксированные моменты времени прилагаются постоянные импульсные нагрузки, действующие параллельно вертикальной оси симметрии колеса в ее положительном направлении.

Вычислим сначала кинетическую энергию E_m маятника. Если (x_0, y_0) – координаты центра масс O колеса, а (x_c, y_c) – координаты центра масс C маятника, то $x_c = x_0 - r\sin\beta$, $y_c = y_0 + r\cos\beta$. Отсюда $\dot{x}_c = -\dot{\varphi}R - r\cos\beta\dot{\beta}$, $\dot{y}_c = -r\sin\beta\dot{\beta}$. Следовательно, $E_m = 0,5\,m\left((\dot{x}_c)^2 + (\dot{y}_c)^2\right) = mR^2(\dot{\varphi})^2 + 2mRr\cos\beta\dot{\varphi}\dot{\beta} + mr^2(\dot{\beta})^2$.

Определим кинетическую энергию E_k колеса. Пусть (x, y) – координаты произвольной точки колеса; $\bar{r}$ и φ – полярные координаты системы координат, жестко связанной с колесом. Тогда $x = x_0 + \bar{r}\cos\varphi$, $y = y_0 + \bar{r}\sin\varphi$, $\dot{x} = -\dot{\varphi}R - \bar{r}\sin\varphi\dot{\varphi}$, $\dot{y} = -\bar{r}\cos\varphi\dot{\varphi}$, а $E_k = \int\limits_D dm\left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right) = \int\limits_D dm(R^2 + \bar{r}^2 + 2R\bar{r}\sin\varphi)(\dot{\varphi})^2$.

Предполагая, что плотность диска колеса зависит лишь от расстояния $\bar{r}$ (диск обладает радиальной симметрией), можно утверждать, что $\int\limits_D dmR\bar{r}\sin\varphi = 0$, поэтому $E_k = M\left(R^2 + \rho^2\right)(\dot{\varphi})^2$, а кинетическая энергия описанной системы двух тел имеет вид

$$E = E_m + E_k = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\cos\beta\dot{\varphi}\dot{\beta} + a_{22}\dot{\beta}^2\right);$$
$$\left(a_{11} = M\left(R^2 + \rho^2\right) + mR^2;\ a_{12} = mRr;\ a_{22} = mr^2\right). \tag{2}$$

Все коэффициенты (2) – положительны. Потенциальная энергия и виртуальная работа имеют вид

$$\Pi = mgr\cos\beta;\ \delta W = (L - \eta\dot{\beta})\delta\beta - L\delta\varphi,\ \eta > 0.$$

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы и уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\delta(t-\tau_k) \quad \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{3}$$

где $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(t,q,\dot{q})$ – функция Лагранжа системы; Q_i – обобщенные силы; p_{ik} – обобщенные импульсы ударных сил; δ – дельта-функция; τ_k – моменты импульсных воздействий.

Предположим, что $\tau_{k+1}-\tau_k=\theta,\ k\in\mathbb{N}$. Уравнения (3) на интервалах времени (τ_k,τ_{k+1}) представим в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}=Q_i \quad \left(t\in(\tau_k,\tau_{k+1}),\ i=\overline{1,n}\right). \tag{4}$$

Уравнения движения системы в момент времени $t=\tau_k$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\Bigg|_{t=\tau_k+0}-\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\Bigg|_{t=\tau_k}=p_{ik} \quad \left(i=\overline{1,n},\ k\in\mathbb{N}\right). \tag{5}$$

Следовательно, движение механической системы с импульсным воздействием описываем уравнениями (4) – (5).

Функцию Лагранжа $\mathfrak{L}$ и обобщенные силы представляем так:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}^2+2a_{12}\cos\beta\dot{\varphi}\dot{\beta}+a_{22}\dot{\beta}^2)-mgr\cos\beta;\ Q_\beta=L-\eta\dot{\beta};\ Q_\varphi=-L.$$

Для обобщенных импульсов получаем выражения: $p_{\beta k}=p_0 r\sin\beta;\ p_{\varphi k}=0\ \left(k\in\mathbb{N}\right)$, где p_0 – постоянная нагрузка (импульсная нагрузка).

Введем безразмерное время τ по формуле $t=T\tau\left(T^2=r/g\right)$.

Предположим, что внешний момент отсутствует и не учитываем трение в шарнирах соединения маятника и колеса ($\eta=0$). Тогда уравнения движения системы двух тел с учетом сил сопротивления между маятником и колесом, а также импульсных воздействий имеют вид (штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ)

$$(1-d^2\cos^2\beta)\beta''+d^2(\beta')^2\sin\beta\cos\beta-\sin\beta=(1+\varepsilon^2\cos\beta)\overline{\alpha}(\beta'-\varphi');$$

$$(1-d^2\cos^2\beta)\varphi''-\varepsilon^2(\beta')^2\sin\beta+\varepsilon^2\sin\beta\cos\beta=-\varepsilon^2\left(\frac{\varepsilon^2}{d^2}+\cos\beta\right)\overline{\alpha}(\beta'-\varphi') \quad \left(\tau\neq\tau_k/T\right);$$

$$\beta(\tau+0)-\beta(\tau)=0;\quad \varphi(\tau+0)-\varphi(\tau)=0; \tag{6}$$

$$\beta'(\tau+0)-\beta'(\tau)=\frac{p_0\sin\beta}{(1-d^2\cos^2\beta)m\sqrt{gr}};$$

$$\varphi'(\tau+0)-\varphi'(\tau)=\frac{-\varepsilon^2 p_0\sin\beta\cos\beta}{(1-d^2\cos^2\beta)m\sqrt{gr}} \quad \left(\tau=\frac{1}{T}\tau_k,\ k\in\mathbb{N}\right)$$

$$\left(d^2=\frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}<1;\ \varepsilon^2=\frac{a_{12}}{a_{11}},\ \overline{\alpha}=\frac{\alpha}{mgr}\right).$$

Заметим, что система (6) содержит только два безразмерных параметра d и ε.

Полученная система уравнений движений имеет два многообразия состояний равновесий вида $\beta = 0, \beta' = 0, \varphi' = 0$ и $\beta = \pi, \beta' = 0, \varphi' = 0$. Для учета различных видов неровностей поверхности, по которой движется колесо, рассматриваемую механическую систему с ударными воздействиями запишем в виде нечеткой модели Такаги – Сугено с импульсным управлением и исследуем механизмы стабилизации верхнего положения равновесия (многообразия $\beta = 0,\ \beta' = 0,\ \varphi' = 0$) с помощью импульсных ударных воздействий.

§2. Основные результаты.

Определим переменные возмущенного движения $x_1 = \beta, x_2 = \beta', x_3 = \varphi'$. Линеаризированная система уравнений этого движения имеет вид

$$x_1' = x_2;\ \ x_2' = \Delta(x_1 + \overline{\alpha}\Delta_1 x_2 - \overline{\alpha}\Delta_1 x_3);\ \ x_3' = \Delta(-\varepsilon^2 x_1 - \overline{\alpha}\varepsilon^2\Delta_2 x_2 + \overline{\alpha}\varepsilon^2\Delta_2 x_3)\ \ \left(\tau \ne \tau_k / T\right);$$

$$x_1(\tau+0) = x_1(\tau);\ \ x_2(\tau+0) = \frac{p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}}x_1(\tau) + x_2(\tau); \tag{7}$$

$$x_3(\tau+0) = \frac{-\varepsilon^2 p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}}x_1(\tau) + x_3(\tau)\ \ \left(\tau = \frac{1}{T}\tau_k,\ \ k \in \mathbb{N}\right);$$

при этом $\Delta = 1/(1-d^2)$, $\Delta_1 = 1+\varepsilon^2$, $\Delta_2 = (\varepsilon^2/d^2)+1$.

Исследуем возможность стабилизации многообразия $\beta = 0,\ \beta' = 0,\ \varphi' = 0$ при помощи нечеткого импульсного управления, которое задается нечеткими правилами: если $x_1(t) \in M_1$, то $p_0 = p_1$; если $x_1(t) \in M_2$, то $p_0 = p_2$, где M_1 – нечеткое множество «x_1 в окрестности β_1»; M_2 – нечеткое множество «x_1 в окрестности $(-\beta_1)$»; β_1 – некоторый фиксированный (малый) угол отклонения маятника от верхнего положения равновесия; p_1, p_2 – фиксированные импульсные нагрузки (импульсное управление).

Тогда результирующее управление принимает вид $p_0 = \mu_1(\beta)p_1 + \mu_2(\beta)p_2$, где $\mu_1(\beta),\ \mu_2(\beta)$ – функции принадлежностей нечетких множеств M_1 и M_2, соответственно.

Для системы (7) нечеткие Т – С правила определим в виде $R_i, i = 1, 2$: если $x_1 \in M_i$, то

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax\ \left(\tau \ne \tau_k / T\right);\quad x(\tau+0) = B_i x(\tau);\ \ x(\tau_0+0) = x_0\ \ \left(\tau = \tau_k / T,\ \ k \in \mathbb{N}\right),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор переменных возмущенного движения; M_1 и M_2 – нечеткие множества «x_1 в окрестности β_1» и «x_1 в окрестности $(-\beta_1)$», соответственно, а структурные матрицы A, B_1 и B_2 имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Delta & \Delta\overline{\alpha}\Delta_1 & -\Delta\overline{\alpha}\Delta_1 \\ -\Delta\varepsilon^2 & -\Delta\overline{\alpha}\varepsilon^2\Delta_2 & \Delta\overline{\alpha}\varepsilon^2\Delta_2 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{p_1}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} & 1 & 0 \\ \dfrac{-\varepsilon^2 p_1}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{p_2}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} & 1 & 0 \\ \dfrac{-\varepsilon^2 p_2}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения нечеткой импульсной модели T – C, применяя теорему 2 из [15], результаты которой установлены на основе общих подходов, разработанных в [9]. Известно, что величина коэффициента сопротивления является малой величиной, поэтому $\overline{\alpha}$ предположим малым параметром.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\lambda^3 - \overline{\alpha}\Delta(\Delta_2\varepsilon^2 + \Delta_1)\lambda^2 - \Delta\lambda + \Delta^2\overline{\alpha}\frac{\varepsilon^4(1-d^2)}{d^2} = 0.$$

Нетрудно определить, что

$$\lambda_1 = \Delta\frac{\varepsilon^4(1-d^2)}{d^2}\overline{\alpha};$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\Delta} + \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon^2+1)^2\overline{\alpha} + \frac{1}{2}\Delta\sqrt{\Delta}(\varepsilon^2+1)^2\left(\frac{\varepsilon^4}{d^2} + 2\varepsilon^2 - \frac{3}{4}(\varepsilon^2+1)^2 + 1\right)\overline{\alpha}^2 + o(\overline{\alpha}^2);$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\Delta} + \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon^2+1)^2\overline{\alpha} - \frac{1}{2}\Delta\sqrt{\Delta}(\varepsilon^2+1)^2\left(\frac{\varepsilon^4}{d^2} + 2\varepsilon^2 - \frac{3}{4}(\varepsilon^2+1)^2 + 1\right)\overline{\alpha}^2 + o(\overline{\alpha}^2).$$

Тогда собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \overline{\alpha}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + o(\overline{\alpha}); \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}\varepsilon^2} \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \\ 1 \end{pmatrix} + \overline{\alpha}\begin{pmatrix} -\dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(\dfrac{1}{2}(\varepsilon^2-1) - \dfrac{\varepsilon^2}{d^2}\right) \\ -\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(1-\dfrac{1}{d^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + o(\overline{\alpha});$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}\varepsilon^2} \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \\ 1 \end{pmatrix} + \overline{\alpha}\begin{pmatrix} \dfrac{-1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(\dfrac{1}{2}(\varepsilon^2-1) - \dfrac{\varepsilon^2}{d^2}\right) \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\left(1+\dfrac{\varepsilon^2}{d^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + o(\overline{\alpha}).$$

Из элементов собственных векторов составим матрицу $S = S_0 + \overline{\alpha}S_1 + o(\overline{\alpha})$, где

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}\varepsilon^2} & \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}\varepsilon^2} \\ 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon^2} & -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & -\dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(\dfrac{1}{2}(\varepsilon^2-1) - \dfrac{\varepsilon^2}{d^2}\right) & -\dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(\dfrac{1}{2}(\varepsilon^2-1) - \dfrac{\varepsilon^2}{d^2}\right) \\ 0 & -\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(1-\dfrac{1}{d^2}\right) & \sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(1-\dfrac{1}{d^2}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим разложение матрицы S^{-1} по степеням $\overline{\alpha}$.

$S^{-1} = (S_0 + \overline{\alpha} S_1)^{-1} = (I + \overline{\alpha} S_0^{-1} S_1)^{-1} S_0^{-1} = (I - \overline{\alpha} S_0^{-1} S_1) S_0^{-1} + o(\overline{\alpha}) = S_0^{-1} - \overline{\alpha} S_0^{-1} S_1 S_0^{-1} + o(\overline{\alpha}).$

Выполним замену переменных в системе (7) по формуле $y = S^{-1}x$. Тогда структурные матрицы A, B_1, B_2 модели Т – С примут вид $\overline{A}, \overline{B}_1, \overline{B}_2$, соответственно, где $\overline{A} = \overline{A}_0 + \overline{A}_1 \overline{\alpha} + o(\overline{\alpha})$;

$$\overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\Delta} \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} \Delta \dfrac{\varepsilon^4(1-d^2)}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}\Delta(\varepsilon^2+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\Delta(\varepsilon^2+1)^2 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{B}_i = S^{-1} B_i S = I + \frac{p_i}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} S^{-1} B_0 S =$$

$$= I + \frac{p_i}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} (S_0^{-1} B_0 S_0 + (S_0^{-1} B_0 S_1 - S_0^{-1} S_1 S_0^{-1} B_0 S_0)\overline{\alpha} + o(\overline{\alpha})) \quad (i = 1, 2);$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{B}_0 = S_0^{-1} B_0 S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{\Delta}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{\Delta}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{\Delta}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix};$$

$$\hat{B}_1 = S_0^{-1} B_0 S_1 - S_0^{-1} S_1 S_0^{-1} B_0 S_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2}\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) & 0 & \dfrac{1}{2}(\varepsilon^4-1) - \dfrac{\varepsilon^2}{d^2}(1+\varepsilon^2) \\ -\dfrac{1}{2}\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) & \dfrac{1}{2}(\varepsilon^4-1) - \dfrac{\varepsilon^2}{d^2}(1+\varepsilon^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (7) используем утверждение теоремы 2 [15]. Неравенство (4) (см. [15]) принимает вид

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(2X + \frac{p_i + p_j}{\sigma}\left((\hat{B}_0 + \overline{\alpha}\hat{B}_1)^T X + X(\hat{B}_0 + \overline{\alpha}\hat{B}_1) \right) + \frac{2p_i p_j}{\sigma^2}(\hat{B}_0 + \overline{\alpha}\hat{B}_1)^T X (\hat{B}_0 + \overline{\alpha}\hat{B}_1) \right) -$$

$$-e^{-\overline{A}\theta} X e^{-\overline{A}\theta} \le -\delta I + o(\overline{\alpha}) \quad (i,\ j = 1,\ 2), \text{ где } \left(\sigma = (1-d^2)m\sqrt{gr}\right). \tag{8}$$

Обозначив $\overline{p}_i = p_i / \sigma \ (i = 1, 2)$, определим условия, при которых блочная матрица вида $X = \begin{pmatrix} 1 & w^T \\ w & Z \end{pmatrix}$, где $w = (w_1, w_2)^T$, а Z – 2×2 – симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая следующему линейному матричному уравнению

$$\tilde{Q}_{ij} = Z + \frac{\overline{p}_i + \overline{p}_j}{2}(\tilde{B}_0^{\,T} Z + Z\tilde{B}_0) + \frac{(\overline{p}_i + \overline{p}_j)^2}{4}\tilde{B}_0^{\,T} Z\tilde{B}_0 - \tilde{A}_0 Z\tilde{A}_0 = 0 \ \left(i,\ j = 1,2\right), \qquad (9)$$

где

$$\tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\Delta}\theta} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\Delta}\theta} \end{pmatrix}$$

удовлетворяют систему линейных матричных неравенств (8) с точностью до $o(\overline{\alpha})$.

Вектор w подберем так, чтобы левая часть неравенства (8) имела следующую блочную структуру:

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 2\overline{\alpha}\theta\Delta\dfrac{\varepsilon^4(1-d^2)}{d^2} - \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\dfrac{\overline{p}_1 + \overline{p}_2}{2}(w_1 + w_2)\overline{\alpha} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{ij} + \overline{\alpha}G_{ij} \end{pmatrix}.$$

Для проверки отрицательной определенности матрицы Q_{ij} воспользуемся критерием Шура отрицательной определенности блочной матрицы

$$\overline{\alpha}\theta\Delta\frac{\varepsilon^4(1-d^2)}{d^2} - \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\frac{\overline{p}_1 + \overline{p}_2}{4}(w_1 + w_2)\overline{\alpha} < 0; \quad \tilde{Q}_{ij} + \overline{\alpha}G_{ij} + o(\overline{\alpha}) < 0;$$

G_{ij} – некоторая симметричная 2×2-матрица, при этом $\tilde{Q}_{12} = 0$, $\tilde{Q}_{11} \sim (\overline{p}_2 - \overline{p}_1)$, $\tilde{Q}_{22} \sim (\overline{p}_2 - \overline{p}_1)$ ($\sim$ – символ пропорциональности).

Первое неравенство выполняется всегда при достаточно малых $|\overline{\alpha}|$ вследствие того, что $\overline{\alpha} < 0$ и, как нетрудно показать, $w \sim \overline{\alpha}$, а второе неравенство выполняется при достаточно малых $|\overline{\alpha}|$, если дополнительно предположить $\overline{p}_2 - \overline{p}_1 = \nu\overline{\alpha} + o(\overline{\alpha})$. Тогда имеем

$$\tilde{Q}_{11} = -\frac{1}{2}\nu(\tilde{B}_0^{\,T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\,T} Z\tilde{B}_0)\overline{\alpha} + o(\overline{\alpha});$$

$$\tilde{Q}_{22} = \frac{1}{2}\nu(\tilde{B}_0^{\,T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\,T} Z\tilde{B}_0)\overline{\alpha} + o(\overline{\alpha}).$$

Условия устойчивости в этом случае сводятся к системе трех неравенств

$$G_{12} + o(1) > 0;$$

$$-\frac{1}{2}\nu(\tilde{B}_0^{\,T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\,T} Z\tilde{B}_0) + G_{11} + o(1) > 0; \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2}\nu(\tilde{B}_0^{\,T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\,T} Z\tilde{B}_0) + G_{22} + o(1) > 0.$$

Вследствие того, что $G_{22} - G_{12} \sim \overline{\alpha}$, $G_{11} - G_{12} \sim \overline{\alpha}$, неравенства (10) можно привести к виду (здесь $G = G_{12}$)

$$G + o(1) > 0;$$

$$-\frac{1}{2}\nu(\tilde{B}_0^{\,T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\,T} Z\tilde{B}_0) + G + o(1) > 0;$$

$$\frac{1}{2}\nu(\tilde{B}_0^{\ T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\ T} Z\tilde{B}_0) + G + o(1) > 0.$$

Видно, что первое неравенство является следствием второго и третьего. Таким образом, условия устойчивости нулевого решения исходной системы (7) сводятся к выполнению трех матричных неравенств

$$X > 0;\ -\frac{1}{2}\nu F + G + o(1) > 0;\ \frac{1}{2}\nu F + G + o(1) > 0 \tag{11}$$

и решению линейного матричного уравнения (9) в классе положительно определенных матриц (здесь $F = \tilde{B}_0^{\ T} Z + Z\tilde{B}_0 - (\overline{p}_2 + \overline{p}_1)\tilde{B}_0^{\ T} Z\tilde{B}_0$).

Обозначив $\left(\overline{p}_1 + \overline{p}_2\right)/2 = a,$ определим в явном виде элементы матриц Z, G, F. Решение системы (9) представим в виде

$$Z = \begin{pmatrix} \dfrac{2ae^{2\sqrt{\Delta}\theta}}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)} & -1 \\ -1 & \dfrac{2a}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что матрица Z положительно определенная при выполнении неравенства

$$\theta < \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arcth}\left(\frac{2|a|}{1+a^2}\right) \quad (a < 0). \tag{12}$$

Это условие гарантирует положительную определенность матрицы X при достаточно малых абсолютных значениях параметра $\overline{\alpha}$. Действительно, вследствие критерия Шура, неравенство $Z > ww^T$ гарантирует положительную определенность матрицы X. Это неравенство выполняется с точностью $o(\overline{\alpha})$ вследствие того, что $w \sim \alpha$.

Компоненты матриц $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ представляются в виде

$$g_{11} = -2a\sqrt{\Delta}\left(\varepsilon^4 - 1 - 2\frac{\varepsilon^2}{d^2}(\varepsilon^2+1)\right)\left(1 + a - \frac{2a^2}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)}\right) + \frac{2a\theta\Delta(\varepsilon^2+1)^2}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)};$$

$$g_{22} = -2a\sqrt{\Delta}\left(\varepsilon^4 - 1 - 2\frac{\varepsilon^2}{d^2}(\varepsilon^2+1)\right)\left(1 - a + \frac{2a^2e^{2\sqrt{\Delta}\theta}}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)}\right) + \frac{2\theta a\Delta(\varepsilon^2+1)^2 e^{2\sqrt{\Delta}\theta}}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)};$$

$$g_{12} = g_{21} = 2a^2\sqrt{\Delta}\left(\varepsilon^4 - 1 - 2\frac{\varepsilon^2}{d^2}(\varepsilon^2+1)\right)\left(\frac{e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)+1-a}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)}\right) - \theta\Delta(\varepsilon^2+1)^2;$$

$$f_{11} = \frac{2\left(3a(e^{2\sqrt{\Delta}\theta}-1)+1-e^{2\sqrt{\Delta}\theta}\right)}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)}; \quad f_{22} = \frac{2\left(3a(e^{2\sqrt{\Delta}\theta}-1)-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}\right)}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)};$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{-6a\left(e^{2\sqrt{\Delta}\theta}-1\right)}{a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a)}.$$

Определители матриц F и G имеют такой вид:

$$\det F = \frac{-4(e^{2\sqrt{\Delta}\theta}-1)^2}{(a-1+e^{2\sqrt{\Delta}\theta}(1+a))^2} = -\frac{4(\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta))^2}{(\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a)^2} < 0;$$

$$\det G = \frac{(1+a^2)\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+2a}{(\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a)^2}\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)\times$$

$$\times\left(2a\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)(1+\frac{2\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2)+\theta\Delta(1+\varepsilon^2)^2\right)\left(2a\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)(1+\frac{2\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2)-\theta\Delta(1+\varepsilon^2)^2\right).$$

Выполнение условий (12) и условия положительной определенности матрицы G являются необходимыми и достаточными для совместности системы неравенств (11), при этом имеем

$$|\nu| < \frac{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(3a-1)}\left(2a\sqrt{\Delta}\left(1+\frac{2\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2\right)\left(1+\frac{a\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(1+a)}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}\right)+\frac{a(1-\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta))}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}\theta\Delta(1+\varepsilon^2)^2\right);$$

$$|\nu| < -2\frac{\sqrt{|K|^2-\det F\det G}-|K|}{\det F},$$

где введено обозначение

$$K = \frac{8a(\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta))^2}{(\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a)^2}\left(-2a\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(\varepsilon^2-1-2\frac{\varepsilon^2}{d^2}\right)-\Delta(1+\varepsilon^2)^2\theta\right).$$

Из условий положительности $\det G$ следует неравенство

$$\theta > 2|a|\frac{1+2\dfrac{\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)\sqrt{\Delta}}.$$

Покажем, что это условие гарантирует выполнения неравенства $g_{11}>0$. Действительно,

$$g_{11} = 2a\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(1+2\frac{\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2\right)\left(1+\frac{a\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(1+a)}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}\right)+\frac{a(1-\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta))\theta\Delta(1+\varepsilon^2)^2}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a} \geq$$

$$\geq 2a\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(1+2\frac{\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2\right)\left(1+\frac{a\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(1+a)}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}-\frac{a(1-\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta))}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}\right) =$$

$$= 2a\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)\left(1+2\frac{\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2\right)\frac{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(1+a)^2}{\mathrm{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a} > 0.$$

Таким образом, система неравенств (11) совместна, если и только если для периода импульсного воздействия выполняется двустороннее неравенство

$$\frac{2|a|\left(1+2\dfrac{\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2\right)}{\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)} < \theta < \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\mathrm{arcth}\left(\frac{2|a|}{1+a^2}\right). \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(a) = -\operatorname{arcth}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{2a\left(1+2(\varepsilon^2/d^2)-\varepsilon^2\right)}{(1+\varepsilon^2)}.$$

Определим все значения a, при которых функция $\psi(a)$ принимает положительные значения.

Для этой функции $\psi(0)=0$, $\psi(-1)=\infty$, $\psi(-\infty)<0$ и

$$\psi'(a) = -\frac{2}{(1-a^2)} + \frac{2\left(1+2(\varepsilon^2/d^2)-\varepsilon^2\right)}{(1+\varepsilon^2)}; \quad \psi'(0) = \frac{4\varepsilon^2(1-d^2)}{d^2} > 0.$$

Таким образом, при уменьшении a от нуля график функции будет монотонно убывать, пока не достигнет минимального значения, потом начнет монотонно возрастать, пересекая в некоторой точке a_{max} ось Oa. Далее, при стремлении a к -1 справа значение функции ψ стремится к $+\infty$ (прямая $a=-1$ является асимптотой графика функции $\psi(a)$). При стремлении a к (-1) слева значение функции ψ изменяется от $-\infty$ к $+\infty$, пересекая, таким образом, ось Oa в некоторой точке a_{min}.

Следовательно, функция $\psi(a)$ принимает положительные значения при всех $a\in(a_{min}, a_{max})$. Числа a_{min} и a_{max} являются корнями трансцендентного уравнения

$$-\operatorname{arcth}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{2a\left(1+2(\varepsilon^2/d^2)-\varepsilon^2\right)}{(1+\varepsilon^2)} = 0.$$

Таким образом, условия асимптотической устойчивости верхнего положения равновесия однозвенного маятника на подвижном основании при импульсном воздействии имеют вид

$$|\nu| < \frac{\operatorname{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}{\operatorname{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(3a-1)}\left(2a\sqrt{\Delta}\left(1+\frac{2\varepsilon^2}{d^2}-\varepsilon^2\right)\times\left(1+\frac{a\operatorname{th}(\sqrt{\Delta}\theta)(1+a)}{\operatorname{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}\right)+\frac{a(1-\operatorname{th}(\sqrt{\Delta}\theta))}{\operatorname{th}(\sqrt{\Delta}\theta)+a}\theta\Delta(1+\varepsilon^2)^2\right);$$

$$|\nu| < -2\frac{\sqrt{|K|^2-\det F\det G}-|K|}{\det F};$$

$$\frac{2|a|\left(1+2(\varepsilon^2/d^2)-\varepsilon^2\right)}{\sqrt{\Delta}(1+\varepsilon^2)} < \theta < \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arcth}\left(\frac{2|a|}{1+a^2}\right). \qquad (14)$$

На рис. 2 показана область асимптотической устойчивости в пространстве параметров (a, θ) при значениях параметров $\varepsilon^2=1$ и $d^2=0{,}5$.

Таким образом, нечеткая импульсная стабилизация верхнего положения равновесия математического маятника на подвижном основании возможна при всех значениях параметров маятника и подвижного основания (колеса). Такая стабилизация возможна при условии, что частота импульсного воздействия принадлежит некоторой полосе частот, а абсолютная величина импульса изменяется в некоторых пределах от минимального значения, отличного от нуля, до максимального значения.

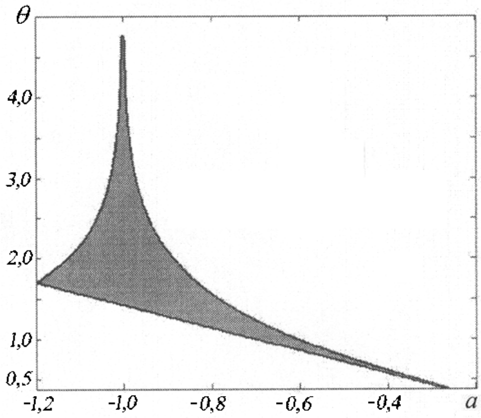

Рис. 2

Условия устойчивости (14) являются более грубыми, чем условия устойчивости при действии обычного (четкого) импульсного управления. Это связано с тем, что полученные условия устойчивости (14) не зависят от функций принадлежностей нечетких множеств.

Заключение.

В работе на основе подхода нечетких систем Такаги – Сугено построена математическая модель маятника на подвижном основании. Это позволило рассматривать движение колеса по неровной поверхности, при этом неровности поверхности моделируются нечеткими импульсными воздействиями.

Полученные в аналитическом виде условия устойчивости (14) обеспечивают устойчивость движения рассматриваемой механической системы при различных видах неровности поверхности.

Р Е З Ю М Е . Побудовано математичну модель маятника на рухомій основі у вигляді нечіткої імпульсної системи Такагі – Сугено, що дозволило розглядати рух колеса по нерівній поверхні. Отримано достатні умови асимптотичної стійкості верхнього положення рівноваги вказаного математичного маятника.

1. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В. и др.* Маятник, управляемый при помощи маховика // Докл. РАН. – 2003. – **392**, № 6. – С. 743 – 749.
2. *Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е. и др.* О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 5. – С. 14 – 24.
3. *Денисенко В.С.* Устойчивость нечетких импульсных систем Такаги – Сугено: метод линейных матричных неравенств // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 66 – 73.
4. *Денисенко В.С., Мартынюк А.А., Слынько В.И.* Об устойчивости по Ляпунову нечетких импульсных систем Такаги – Сугено // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 4. – С. 481 – 494.
5. *Денисенко В.С., Мартынюк А.А., Слынько В.И.* Об отображениях, сохраняющих устойчивость нечетких систем Такаги – Сугено // Укр. матем. журнал. – 2009. – **61**, № 5. – С. 641 – 649.
6. *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* К теории управления моноциклом // Прикл. матем. и механика. – 2005. – **69**, вып. 4. – С. 569 – 583.
7. *Перестюк М.О.*, *Чернікова О.С.* Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. матем. журн. – 2008. – **60**, № 1. – С. 81 – 92.
8. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1982. – 286 с.
9. *Слинько В.І.* Стійкість руху механічних систем: гібридні моделі. Автореф. дис. доктора фіз.-матем. наук. – К., 2009. – 27 с.
10. *Формальский А.М.* Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании // Прикл. матем. и механика. – 2006. – **70**, вып. 1. – С. 62 – 71.
11. *Aliev F. A., Larin V. B*. Stabilization Problems for a System with Output Feedback (review) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 3. – P. 225 – 267.
12. *Antonyuk E. Ya., Zabuga A. T.* Modeling the Maneuvering of a Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 4. – P. 447 – 457.
13. *Chen-Sheng Ting.* Stability analysis and design of Takagi-Sugeno fuzzy systems // Information Sciences. – 2006. – N 176. – P. 2817 – 2845.
14. *Denisenko V.S., Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I.* Stability Analysis of Impulsive Takagi–Sugeno Systems // Int. J. of Innovative Computing, Information and Control. – 2009. – **5**, N 10(A). – P. 3141 – 3155.
15. *Denisenko V.S., Slyn'ko V.I.* Impulsive Stabilization of Mechanical Systems in Takagi – Sugeno Models // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1127 – 1140.
16. *Dvirnyi A. I., Slyn'ko V. I.* Stability of Impulsive Nonholonomic Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 353 – 360.
17. *Kiforenko B. N.* Problems of the Mathematical Description of Rocket Engines as Plants // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 608 – 612.
18. *Lobas L. G., Ichanskii V. Yu.* Limit Cycles of a Double Pendulum with Nonlinear Springs // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 7. – P. 827 – 834.
19. *Simeonov P.S., Bainov D.D.* Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications, – Longman, London, 1993.
20. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. – 1985, N 15. – P. 116 – 132.

Поступила 15.09.2010 Утверждена в печать 22.11.2012