

Е. И. Беспалова, Г. П. Урсова

**О ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ;
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. Effect of alternating curvature of shells on domains of dynamical instability is studied under combined statical and dynamical loads. The possibility is shown to wide domain of safe parameters of harmonic loads for a shell of revolution with sinusoidal generatrix compared with a shell of cylindrical shape.

Key words: shells of revolution, alternating curvature, statistical and dynamical loads, domains of dynamical instability, technique, analysis

Введение.

Исследованию динамической устойчивости оболочечных конструкций при стационарных нагрузках посвящено большое количество работ, что свидетельствует о теоретическом и прикладном значении рассматриваемой проблемы. Публикации, содержащие обзоры разных лет по этой тематике приведены в [8]. К настоящему времени в большинстве работ рассмотрены элементы канонической формы: пластины, тонкостенные цилиндры, конусы, оболочки сферического и эллиптического вида, т. е. оболочки постоянной или знакопостоянной кривизны. В последнее десятилетие класс исследуемых объектов расширен за счет учета их неоднородности по толщине, сложной геометрии, анизотропии свойств материалов и других усложняющих факторов.

Так, динамическая устойчивость пластин сложной формы исследована в [6]. Влияние относительной толщины составляющих слоев пластины и уровня статической нагрузки на динамическую устойчивость рассмотрено в [18], а влияние свойств композитных упругих и вязкоупругих материалов, различных граничных условий и видов нагрузки изучено в [9, 15, 17]. Такие же усложнения учитывают при анализе динамической устойчивости оболочек вращения. В частности, влияние на области динамической неустойчивости слоистости структуры композитных тонкостенных цилиндров рассмотрено в [5, 10, 19], сложной геометрии – в [8], а скорости протекания жидкости в круговых цилиндрических оболочках с прямолинейной и криволинейной осями – в [13, 14].

Наряду с оболочками постоянной и/или знакопостоянной кривизны в инженерной практике широкое распространение получили тонкостенные элементы, кривизна которых меняет знак на разных участках геометрии. Это, к примеру, переходники, гофрированные шланги, сильфоны и компенсаторы различной формы и назначения. Напряженно-деформированное состояние, колебания и статическая устойчивость таких оболочек исследованы во многих публикациях, например [7, 11, 12, 16], в то время как работы по их динамической устойчивости практически отсутствуют.

Отметим, что действующие на оболочки стационарные нагрузки весьма разнообразны, причем статическая и динамическая их составляющие могут различаться как по типу, так и по характеру распределения. Однако, в большинстве работ по динамической устойчивости статическая часть либо отсутствует, либо обе эти составляющие являются однотипными [4].

В данной работе рассмотрены области динамической неустойчивости оболочек вращения знакопеременной кривизны при комбинациях различных статических и гармонических нагрузок. Исследования проведены на основе подхода, разработанного для этого класса задач в [8].

1. Постановка задачи и общая характеристика методики ее решения.

Класс рассматриваемых тонкостенных объектов детально описан в [3, 8] и представляет собой оболочки вращения произвольной формы меридиана, включая оболочки знакопеременной гауссовой кривизны. Исходная координатная поверхность оболочки отнесена к ортогональной криволинейной системе координат s, θ , где s – длина дуги меридиана; θ – угол в поперечном сечении с центром на оси вращения z . Структура оболочки по толщине описывается переменной γ , изменяющейся по нормали к выбранной координатной поверхности $\gamma = 0$. По этой переменной оболочка может быть однослойной или состоять из любого числа слоев M , постоянной или переменной толщины, работающих без отрыва и проскальзывания. Материалы слоев являются, в общем случае, ортотропными, могут существенно различаться по своим физико-механическим свойствам и при всех уровнях нагружения работают в упругой стадии деформирования.

Примем, что оболочка находится в поле осесимметричных стационарных нагрузок вида $\bar{P}(s, t) = \bar{P}_0(s) + \bar{P}_t(s) \cos \omega t$, где t – временная переменная; $\bar{P}_0(s)$ – статическая составляющая воздействия, а ω , $\bar{P}_t(s)$ – частота и амплитуда его динамической части. Обе эти составляющие могут различаться как по типу нагрузки (давление, осевое усилие, перерезывающая сила), так и по характеру распределения по переменной s (равномерное распределение, сосредоточенность на контуре или в некоторых, нормальных к оси вращения, сечениях).

В соответствии с действующей нагрузкой в оболочке имеет место осесимметричное состояние вида $\bar{Y}^0(s, t) = \bar{N}_0(s) + \bar{N}_t(s) \cos \omega t$, где вектор-функции $\bar{N}_0(s)$ и $\bar{N}_t(s)$ определяются, соответственно, статической и динамической составляющими поля, а их компонентами и компонентами вектор-функции \bar{Y}^0 являются некоторые статические и кинематические характеристики движения.

Подход к определению главной области динамической неустойчивости (ОДН) таких оболочек при периодических во времени воздействиях, следуя общей теории динамической устойчивости упругих систем [1], подробно представлен в [8], где кратко изложены его основные положения. Традиционно определение ОДН исследуемого состояния основано на моделировании некоторого возмущенного движения вида $\bar{Y}(s, \theta, t) = \bar{Y}^0(s, t) + \delta \bar{Y}(s, \theta, t)$, состоящего из основного осесимметричного ($\bar{Y}^0(s, t)$) и его неосесимметричного возмущений ($\delta \bar{Y}(s, \theta, t)$).

Для описания возмущенного движения используем геометрически нелинейную теорию оболочек среднего изгиба на основе гипотез классической модели тонких оболочек. Соответствующая двумерная нелинейная задача в этом случае может быть представлена в следующем матрично-векторном виде:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = L\bar{Y} + \bar{G}(\bar{Y}) + C \frac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial t^2} + \bar{q}(s, t) \quad (s \in (s_0, s_1), \theta \in [0, 2\pi]); \quad (1)$$

$$R_j \bar{Y} = \bar{r}_j(t), \quad s = s_j \quad (j = 0; 1). \quad (2)$$

Здесь L – линейный дифференциальный оператор четвертого порядка по переменной θ ; \bar{G} – нелинейная вектор-функция; C – матрица распределения плотности материала; R_0, R_1 – операторы граничных условий на торцах оболочки $s = s_0$ и $s = s_1$; $\bar{q}(s, t) = \bar{q}_0(s) + \bar{q}_t(s) \cos \omega t$, $\bar{r}_j(t) = \bar{r}_{j0} + \bar{r}_{jt} \cos \omega t$ – функции, задающие распределение стационарных воздействий по образующей оболочки и контурные воздействия на торцах.

Предположение о малости возмущений $\delta\bar{Y}(s, \theta, t)$ по отношению к основному движению $\bar{Y}^0(s, t)$ позволяет приближенно получить отдельно задачу об основном состоянии $\bar{Y}^0(s, t)$ (нелинейную) и однородную линейризованную задачу относительно возмущений $\delta\bar{Y}(s, \theta, t)$. Линейризованная задача в качестве параметрических членов содержит компоненты основного движения в виде периодических функций времени. При колебательном характере возмущения $\delta\bar{Y}(s, \theta, t)$, т.е. наличии периодических решений соответствующей задачи, исходное осесимметричное движение $\bar{Y}^0(s, t)$ – устойчиво, в противном случае – неустойчиво.

Для определения периодических решений линейризованной задачи в окрестности первой критической частоты $\omega_* = 2\Omega$ (построение главной ОДН) принимаем следующую аппроксимацию в виде отрезка ряда Фурье:

$$\delta\bar{Y}(s, \theta, t) \cong \sum_{k=0,1,2,\dots} \left[\bar{N}'_k(s) \begin{Bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{Bmatrix} \sin \frac{\omega}{2} t + \bar{N}''_k(s) \begin{Bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{Bmatrix} \cos \frac{\omega}{2} t \right]$$

(Ω – собственная частота оболочки).

С учётом этого представления линейризованная задача для каждой гармоники k сводится к двум однородным задачам:

$$1) \frac{d\bar{N}'_k}{ds} = \left[L + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{Y}^0} \left(\bar{N}_0 - \frac{\bar{N}_t}{2} \right) - \frac{\omega^2}{4} C \right] \bar{N}'_k \quad (s \in (s_0, s_1)); \quad (3)$$

$$R_j \bar{N}'_k = 0, \quad s = s_j \quad (j = 0; 1); \quad (4)$$

$$2) \frac{d\bar{N}''_k}{ds} = \left[L + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{Y}^0} \left(\bar{N}_0 + \frac{\bar{N}_t}{2} \right) - \frac{\omega^2}{4} C \right] \bar{N}''_k \quad (s \in (s_0, s_1)); \quad (5)$$

$$R_j \bar{N}''_k = 0, \quad s = s_j \quad (j = 0; 1). \quad (6)$$

Решения задач (3), (4) и (5), (6) зависят от вектор-функций $\bar{N}_0 - \bar{N}_t / 2$ и $\bar{N}_0 + \bar{N}_t / 2$, соответственно. Эти две задачи формулируются как одномерные по переменной s , что позволяет учесть в континуальном виде геометрические и механические характеристики оболочки в данном направлении. Сведение к одномерным задачам, в отличие от традиционного сведения к алгебраической проблеме собственных значений, является характерной особенностью разработанного подхода. Для решения этих задач используется метод последовательных приближений в варианте обратной итерации, метод квазилинеаризации для решения нелинейных задач и метод ортогональной прогонки численного решения одномерных линейных краевых задач.

Правомерность предложенного подхода при анализе динамической устойчивости неоднородных ортотропных оболочек подтверждена результатами исследований [8].

2. Анализ областей динамической неустойчивости оболочек знакопеременной кривизны.

В качестве объекта знакопеременной кривизны выбрана оболочка вращения, меридиан-образующая которой представляет собой плоскую синусоидальную кривую с амплитудой a , периодом l и осью z_1 , отстоящей от оси вращения z на расстоянии R (рис. 1). Радиус параллельного круга r и кривизна меридиана k_s , как функции осевой координаты z , задаем в виде ($2L$ – длина оболочки по оси z)

$$r(z) = R + a \cos \frac{\pi}{l} z; \quad k_s(z) = \frac{d^2 r / dz^2}{\sqrt{(1 + (dr/dz)^2)^3}} \quad (z \in [-L, L]). \quad (7)$$

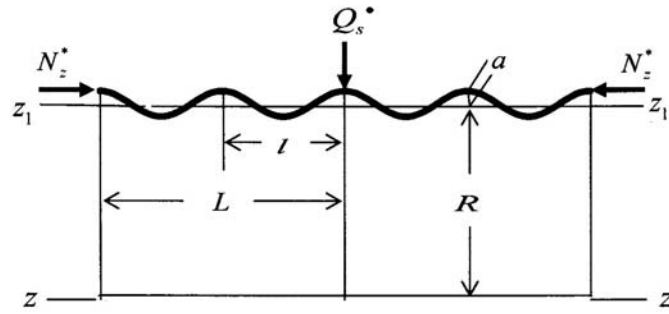


Рис. 1

Для анализа особенностей областей динамической неустойчивости (ОДН) данной оболочки используется сравнение с оболочкой цилиндрической формы радиуса R .

Принимаем, что обе оболочки свободно оперты по торцам, имеют постоянную толщину h и изготовлены из изотропного материала. Рассмотрим следующие варианты воздействующих осесимметричных нагрузок:

равномерное нормальное давление интенсивности q_0 ($q_n = q_0 = \text{const}$) (A);

перерезывающее усилие $Q_s = Q^*$, сосредоточенное в центральном сечении $z = 0$ (B);

контурные усилия $N_s = N_z^*$, ориентированные по оси вращения оболочки z (C).

Исследование ОДН таких оболочек включает следующие этапы:

- 1) определение напряженного состояния при действии заданного нагружения;
- 2) определение критических значений действующих статических нагрузок;
- 3) определение главной ОДН.

Анализ каждого из этих этапов, как отмечено выше, проведен для цилиндрической оболочки (I) и оболочки с синусоидальной формой меридиана (II).

Расчёты выполнены при следующих геометрических параметрах и физико-механических характеристиках: $h/R = 0,05$; $2L/R = 2$; $a/R = 0,16$; $2L/l = 4$; $R = 500l_0$; $E = E_0$; $\nu = 0,3$; $\rho = \rho_0$ (l_0 – характерный линейный размер; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала).

Результаты первого этапа исследования в виде распределения меридиональных $\tilde{N}_s = N_s E_0 / P$ и окружных $\tilde{N}_\theta = N_\theta E_0 / P$ усилий по образующей оболочки представлены на рис. 2. Нагрузкам $P = q_n 10^3$ (A); $P = Q^*$ (B); $P = N_z^*$ (C) – соответствуют результаты рис. 2 ($a, в, д$) для цилиндрической оболочки (I) и рис. 2 ($б, г, е$) – для оболочки синусоидального профиля (II).

Для цилиндрической оболочки наблюдается известная картина – при нагрузках (A) и (B) возникают исключительно окружные усилия, распределенные практически равномерно (нормальное давление) или локализованные в месте приложения перерезывающей силы (сосредоточенное усилие). При осевом нагружении (C) окружные усилия отсутствуют, а меридиональные – равны приложенным контурным усилиям.

Для оболочки знакопеременной кривизны при всех видах нагрузки имеет место существенно неравномерное распределение как окружных, так и меридиональных усилий с явным преобладанием первых. Имеет место чередование зон сжимающих и растягивающих усилий. При нормальном давлении (A) они относительно равномерно распределены по длине оболочки, при сосредоточенном (B) и контурном (C) воздействиях эти зоны смещены к центральному сечению и к торцам оболочки, соответственно.

Критические значения статических нагрузок $P_{кр}$ (второй этап исследования) естественным образом связаны с интегральными значениями сжимающих N^- и растягивающих N^+

усилий ($N^- = \int_{-L}^L (N_s(s) + N_\theta(s)) ds$, если $N_s(s) < 0$ и $N_\theta(s) < 0$; $N^+ = \int_{-L}^L (N_s(s) + N_\theta(s)) ds$,

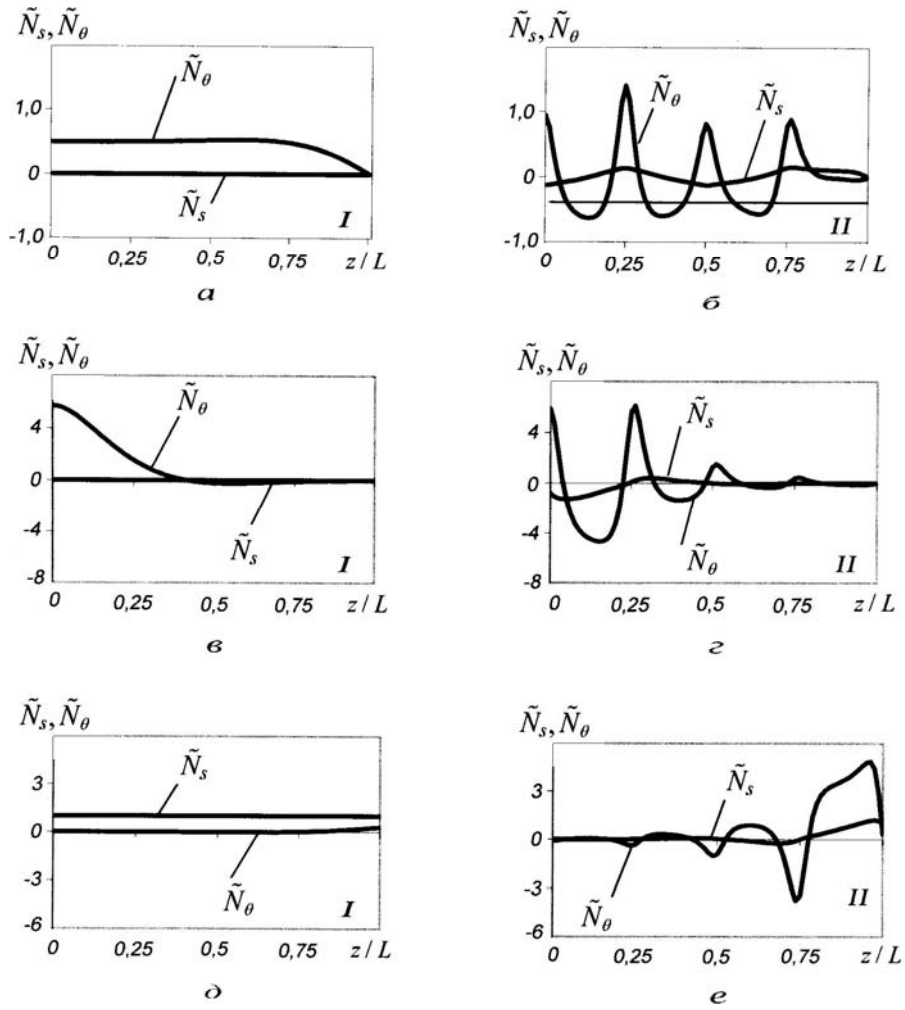


Рис. 2

если $N_s(s) > 0$ и $N_\theta(s) > 0$). Эти данные для рассмотренных вариантов нагрузок $P > 0$ представлены в таблице. Здесь же приведено процентное содержание N^- и N^+ в суммарном значении усилий $N = N^+ + |N^-|$, а также критические значения статических воздействий при разном направлении сил $P > 0$ и $P < 0$ ($d_1 = Eh^2 / 2LR\sqrt{h/R}$, $d_2 = Eh/R$).

В цилиндрической оболочке (I) потеря статической устойчивости имеет место, естественно, только при сжимающей нагрузке, что и подтверждено данными таблицы.

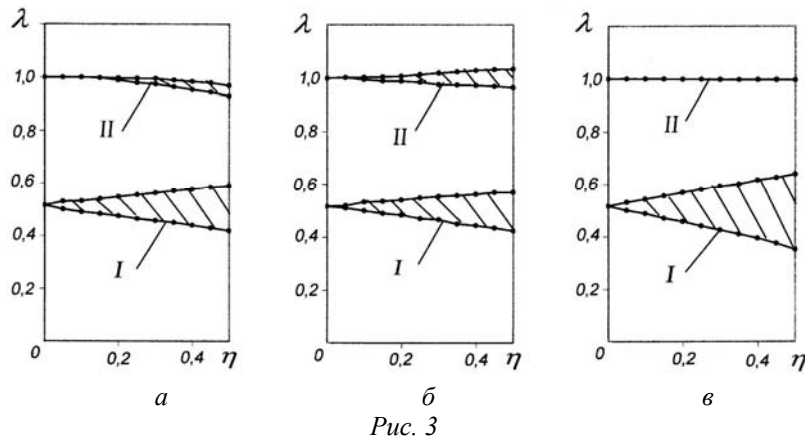
Оболочка	P	N^- / P ; $N^- / N, \%$	N^+ / P ; $N^+ / N, \%$	$P_{кр}, P > 0$	$P_{кр}, P < 0$
I	$q_n = q_0 > 0$	0; 0	$0,3677 \cdot 10^2$; 100	Нет	$0,941 d_1$
	$Q_s = Q^* > 0$	$0,5808 \cdot 10$; 6,2	$0,8824 \cdot 10^2$; 93,8	Нет	$0,482 \cdot 10^{-1} d_2$
	$N_s = N_z^* > 0$	0,4518; 0,5	$0,8370 \cdot 10^2$; 99,5	Нет	$0,595 d_2$
II	$q_n = q_0 > 0$	$0,2082 \cdot 10^2$; 52,7	$0,1858 \cdot 10^2$; 47,3	$0,128 \cdot 10^2 d_1$	$0,138 \cdot 10^2 d_1$
	$Q_s = Q^* > 0$	$0,8487 \cdot 10^2$; 62,3	$0,5136 \cdot 10^2$; 37,7	$0,435 d_2$	$0,428 \cdot 10 d_2$
	$N_s = N_z^* > 0$	$0,2434 \cdot 10^2$; 22,0	$0,8645 \cdot 10^2$; 78,0	$0,596 \cdot 10 d_2$	$0,227 d_2$

В оболочке знакопеременной кривизны (II) в силу того, что в ней имеются зоны растяжения и сжатия, оболочка может терять устойчивость при разных знаках приложенных нагрузок. Значения $P_{кр}$ при внутреннем ($q_n = q_0 > 0$) и внешнем ($q_n = q_0 < 0$) нормальных давлениях практически одинаковы и на порядок выше, чем для цилиндрической оболочки при $q_n < 0$. При разном направлении действия сосредоточенной силы Q^* ее критические значения различаются на порядок и значительно превосходят соответствующее значение для цилиндра. Аналогично и при растягивающей осевой нагрузке ($P = N_s = N_z^* > 0$) величина ее критической силы для оболочки с синусоидальным профилем более, чем на порядок превышает соответствующую величину для цилиндрической оболочки. И только при сжимающем осевом усилии $P < 0$ наблюдается обратная картина – $P_{кр}$ для оболочки знакопеременной кривизны почти втрое меньше, чем для цилиндра.

Заметим, что приведенные в таблице критические значения нагрузки $P_{кр}$ для цилиндрической оболочки при нормальном давлении ($0,941 d_1$) и при осевом сжатии ($0,595 d_2$) хорошо согласуются ($0,92 d_1$) и ($0,605 d_2$) с данными в работе [2].

Основной (третий) этап исследования – анализ главной ОДН – включает две серии расчетов: при чисто гармоническом воздействии рассмотренных нагрузок ($\bar{P}_0(s) = 0$) и при наличии их статической составляющей ($\bar{P}_0(s) \neq 0$).

При чисто гармоническом воздействии главные ОДН в осях $\lambda = \omega(\eta) / \omega_{II}(0)$ и $\eta = P_t / P_{кр} \in [0; 0,5]$ для нагружений (A), (B) и (C) представлены на рис. 3 (а, б, в), соответственно; ($\omega_{II}(0)$ – собственная частота оболочки знакопеременной кривизны). Эти области для оболочки синусоидального профиля (II) расположены выше по частотной оси и являются более узкими, чем для цилиндрической оболочки (I). Из рассмотренных видов воздействия наиболее динамически устойчивой является оболочка знакопеременной кривизны при действии осевого усилия, в то же время цилиндрическая оболочка при этой нагрузке является наименее устойчивой.



Во второй серии расчетов, кроме гармонической составляющей стационарной нагрузки, исследовано влияние на главную ОДН статической составляющей. Рассмотрены два варианта стационарного нагружения $P(s, t) = P_0 (1 + \mu(P_t / P_0))$:

- 1) статическое воздействие представлено перерезывающей силой $P_0 = Q^*$, гармоническое – осевым контурным усилием $P_t = N_z^*$;
- 2) статическое воздействие представлено осевым контурным усилием $P_0 = N_z^*$, гармоническое – перерезывающей силой $P_t = Q^*$.

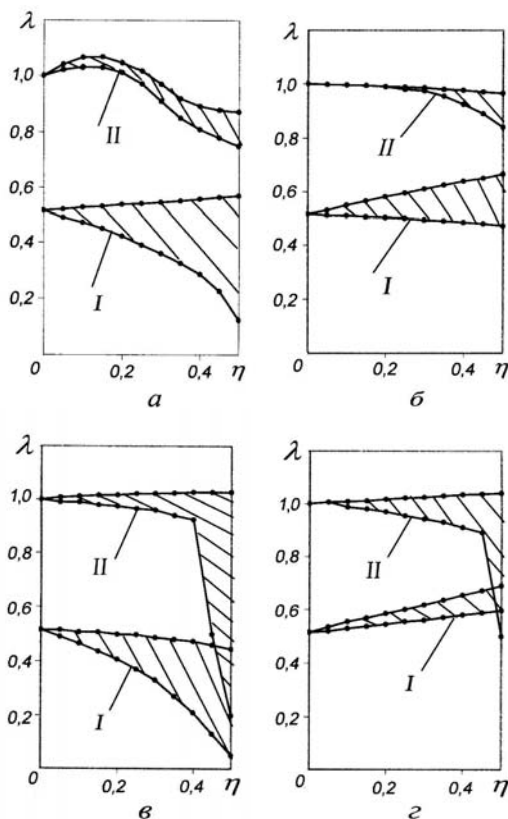


Рис. 4

Результаты расчета первого варианта воздействия представлены на рис. 4, а для случая сжимающей ($Q^* < 0$) и рис. 4, б – растягивающей ($Q^* > 0$) перерезывающей силы с теми же обозначениями, что и на рис. 3. Случай чисто гармонической осевой силы при отсутствии статической нагрузки ($P_0 = Q^* = 0$) представлен на рис. 3, в. Сравнивая данные этих рисунков, видно, что для цилиндрической оболочки (I) наличие сжимающей статической силы вызывает расширение ОДН, а растягивающей – ее сужение. В то же время для оболочки знакопеременной кривизны (II) как сжимающая, так и растягивающая перерезывающие силы приводят к расширению ОДН.

Аналогичную картину наблюдаем для второго варианта комбинированного стационарного нагружения, когда статическая часть представлена осевым усилием (сжимающим – рис. 4, в, растягивающим – рис. 4, г), а гармоническая – сосредоточенной перерезывающей силой. По сравнению с отсутствием статической нагрузки (рис. 3, б,

$P_0 = N_z^* = 0$) наличие сжимающего осевого усилия, как и в первом варианте комбинированного нагружения, приводит в цилиндрической оболочке к расширению ОДН, а растягивающего – к ее сужению. Для оболочки знакопеременной кривизны независимо от знака статического усилия главная ОДН расширяется.

Выводы.

Проведенные исследования позволяют отметить следующие особенности ОДН оболочки знакопеременной кривизны по сравнению с ОДН цилиндрической оболочки.

1. При рассмотренных видах осесимметричного нагружения (нормальное давление, сосредоточенная перерезывающая сила, осевая контурная нагрузка) меридиональные и окружные усилия в цилиндрической оболочке являются знакопостоянными функциями осевой координаты. В оболочке синусоидальной формы для этих усилий характерно чередование зон сжатия и растяжения, распределенных достаточно равномерно (нормальное давление) и концентрирующихся в окрестности центрального сечения (сосредоточенная перерезывающая сила) или у граничных контуров (осевое воздействие).

2. При статическом нагружении цилиндрическая оболочка теряет устойчивость только при сжимающем характере рассмотренных нагрузок, в то время как оболочка знакопеременной кривизны – при разных направлениях воздействия. Значения критических нагрузок для оболочки знакопеременной кривизны выше, чем для цилиндрической (на порядок и более). Исключение составляет лишь случай сжимающей осевой силы.

3. При чисто гармонических нагрузках главная ОДН для цилиндрической оболочки расположена ниже по частотной оси и значительно шире, чем для оболочки знакопеременной кривизны.

4. Статическая составляющая в стационарном воздействии при её сжимающем характере приводит в цилиндрической оболочке к расширению главной ОДН, а при растягивающем – к ее сужению. В оболочке знакопеременной кривизны наличие статической нагрузки любого знака приводит к расширению ОДН.

Таким образом, полученные физически правдоподобные результаты позволяют ожидать, что применение в инженерной практике оболочек знакопеременной кривизны даёт возможность расширить область безопасных параметров гармонических нагрузок по сравнению с оболочками постоянной кривизны.

Р Е З Ю М Е . Досліджено вплив знакозмінної кривизни оболонок на області динамічної нестійкості при комбінованих статико-динамічних навантаженнях. Показано можливість розширення області безпечних параметрів гармонічних навантажень для оболонок обертання з синусоїдальною формою твірної в порівнянні з оболонками циліндричної форми.

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат. – 1956. – 600 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука. – 1967. – 984 с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544с. – (Методы расчёта оболочек: В 5 т., Т.4).
4. Ефимов А.А. Параметрические колебания и устойчивость магистральных нефтепроводов при подводной прокладке // Известия ВУЗов. Нефть и газ. – 2008. – № 2. – С. 123 – 126.
5. Петрушева И.И. Определение областей динамической неустойчивости слоистой упругой цилиндрической оболочки // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. – Новосибирск, 2005. – С. 218 – 223.
6. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Research of Stability and Nonlinear Vibrations by R-Functions Method // in Book: Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. Springer Netherlands. – 2009. – P. 179 – 189.
7. Babich I.Yu., Semenyuk N.P., Zhukova N.B., Trach V.M. Stability of Cross Corrugated Cylindrical Shells under Hydrostatic Loading // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 9. – P. 1001 – 1009.
8. Bepalova E.I., Urusova G.P. Determining Domains of Dynamical Instability of Inhomogeneous Anisotropic Shell Systems under Periodical Actions // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 2. – P. 186 – 194.
9. Eshmatov B.Kh., Khodjaev D.A. Dynamic Stability of a Viscoelastic Plate with Concentrated Masses // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 2. – P. 208 – 216.
10. Eshmatov B.Kh. Nonlinear vibrations and dynamic stability of a viscoelastic circular cylindrical shell with shear strain and inertia of rotation taken into account // Appl. Mathem. and Mechanics. – 2009. – 45, N 3. – P. 421 – 434.
11. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariichenko L.I. Influence of Geometrical Parameters on the Stress State of Longitudinally Corrugated Elliptic Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 2. – P. 187 – 192.
12. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Analysis of Longitudinally Corrugated Hollow Orthotropic Elliptic Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 3. – P. 255 – 263.
13. Jung D., Chung J., Mazzoleni A. Dynamic stability of a semi-circular pipe conveying harmonically oscillating fluid // J. of Sound and Vibration. – 2008. – 315, NN 1-2. – P. 100 – 117.
14. Koval'chuk P.S., Podchasov N.P. Stability of Elastic Cylindrical Shells Interacting with Flowing Fluid // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 1. – P. 60 – 68.
15. Li Jing-Jing, Cheng Chang-Jun, Zhang Neng-Hui, Dynamic stability of viscoelastic plates with finite deformation and shear effects // J. of Shanghai University (English Editor). – 2002. – 6, N 2. – P. 115 – 124.
16. Semenyuk N.P., Zhukova N.B., Ostapchuk V.V. Stability of Corrugated Composite Noncircular Cylindrical Shells under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 12. – P. 1380 – 1389.
17. Singha M.K., Rupesh Daripa. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // J. of Sound and Vibration. – 2009. – 328, NN 4 – 5. – P. 541 – 554.
18. Yang J., Liew K.M., Kitipornchai S. Dynamic stability of laminated FGM plates based in higher – order shear deformation theory // J. Computational Mechanics, 2004. – P. 305 – 315.
19. Zhou Cheng-ti, Wang Lie-dong. Nonlinear theory of dynamic stability for laminated composite cylindrical shells // Appl. Mathem. and Mechanics. – 2001. – 22, N 1. – P. 53 – 62.

Поступила 16.12.2010

Утверждена в печать 06.06.2013