

В.Б.Ларин<sup>1</sup>, А.А.Тунник<sup>2</sup>

### О СИСТЕМЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ БЕЗ ДАТЧИКОВ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

<sup>1</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua  
<sup>2</sup>НАУ, пр-т Комарова, 1, Киев, Украина; e-mail: aatunik@hotmail.com

**Abstract.** The algorithms of functioning the autonomic system of inertial navigation are stated, which do not include the sensors of angular velocity. The systems are considered, which have 6, 9 or 12 accelerometers. Owing to the fact that 6 accelerometers is enough to measure the angle acceleration of object, the opportunity occurs in the case of 9 or 12 accelerometers to increase the exactness in determination of the object angle velocity vector. For this purpose, the additional information is used, which is caused by presence of additional accelerometers. The corresponding algorithms of correction are shown. It is shown on examples that such systems can be effective in the cases of motion of object with the big angle velocity, when, as it is well-known, the use of sensors of angle velocity becomes problematic.

**Key words:** autonomic system of inertial navigation, sensors of angular velocity, attitude determination, quaternion.

#### Введение.

Традиционные системы инерциальной навигации (INS) [1, 3] используют датчики угловой скорости (ДУС) и акселерометры. В настоящее время продолжаются интенсивные исследования, направленные на создание малогабаритной и сравнительно дешевой элементной базы [17]. Представляет интерес оценка возможности создания INS на базе только акселерометров и поэтому, как отмечено в [7], в ряде стран ведутся разработки таких INS. Естественно, что такого рода INS, при значительном времени автономной работы, могут не обеспечить достаточную точность определения координат объекта. Поэтому указанные INS целесообразно интегрировать со спутниковой навигационной системой GPS [10], т.е. рассматривать ее как элемент навигационного комплекса GPS/INS [18]. Этот комплекс может быть использован в сравнительно дешевых беспилотных летательных аппаратах [6].

В данной статье, как и в [14], рассмотрена задача создания INS без ДУС'ов. Она включает в себя как задачу определения угловой скорости объекта по результатам измерений с помощью GPS линейных скоростей трех точек объекта, так и задачу определения, с помощью акселерометров, углового ускорения, интегрируя которое можно вычислить текущее значение угловой скорости. В этой связи ниже, как и в [14], рассмотрены две задачи определения кинематических параметров движения твердого тела. В *первой*, по результатам измерения скоростей трех точек тела определены вектор угловой скорости и скорости точки, принятой в качестве начала подвижной системы координат связанной с телом. В *второй задаче*, по результатам наблюдения ускорения трех точек тела и известной угловой скорости тела, вычислены угловые ускорения и ускорения начала подвижной системы координат. Далее рассмотрены бортовые измерительные системы, содержащие 6, 9, 12 акселерометров. Различные системы, содержащие 6 акселерометров (например, [14, 19]) позволяют определять угловые ускорения, но не дают возможность корректировать результаты его ин-

тегрирования без «внешних» источников информации. Показано, что в случае 9 акселерометров можно использовать избыточную информацию, обусловленную дополнительными 3 акселерометрами, для коррекции результатов интегрирования углового ускорения. Однако, такая измерительная система не всегда позволяет проводить коррекцию результатов интегрирования. Существенно более эффективной является измерительная система, содержащая 12 акселерометров. На примере показана эффективность такой схемы INS в случае движения объекта с большой угловой скоростью, когда, как отмечено в [7], использование ДУС'ов может быть проблематичным.

Так как в [14] подробно рассмотрены вопросы создания на базе таких INS навигационного комплекса GPS/INS, в данной статье эти вопросы не рассматриваются.

В связи с тем, что рассматриваемая INS не относится к высокоточным, при рассмотрении алгоритмов их функционирования для простоты изложения вращение Земли и ускорение Кориолиса не принимались во внимание, хотя учёт этих факторов и не связан с принципиальными трудностями.

### §1. Основные соотношения.

Приведем известные соотношения, связанные с задачей определения ориентации твердого тела [4, 5, 13, 20]. Опишем различные способы определения ориентации.

Углы Эйлера  $\psi, \vartheta, \varphi$  (прецессии, нутации и чистого вращения) определяют ориентацию тела, т.е. переход тела из начального положения, определяемого осями  $Oxyz$ , в конечное, определяемое осями  $Ox'y'z'$  (рис. 1). Этот переход можно осуществить и посредством одного поворота на угол  $\chi$  относительно оси, направление которой определяется углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Поэтому ориентацию

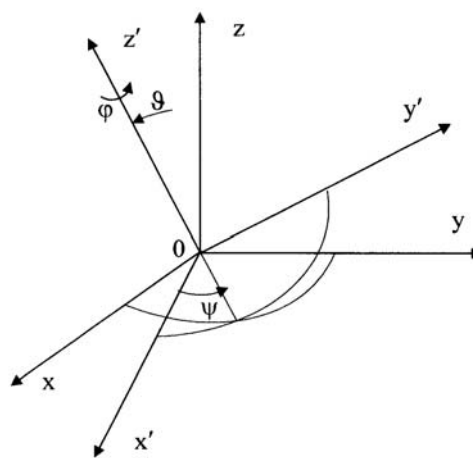


Рис. 1

тела можно характеризовать четырьмя параметрами Родрига – Гамильтона [4]  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (параметры Эйлера [20])

$$\lambda_1 = \cos \alpha \sin \chi / 2; \quad \lambda_2 = \cos \beta \sin \chi / 2; \quad \lambda_3 = \cos \gamma \sin \chi / 2; \quad \lambda_0 = \cos \chi / 2.$$

Очевидно, что

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Параметры Родрига – Гамильтона выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}; & \lambda_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}; \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}; & \lambda_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ориентацию твердого тела относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$  можно определить матрицей  $A$  преобразования координат (матрицей косинусов между осями неподвижной и подвижной систем координат), т.е., если  $m$  – некоторый вектор в неподвижной системе координат, а составляющие вектора  $k$  являются проекциями этого вектора на оси подвижной системы координат ( $Ox'y'z'$ ), то

$$k = Am. \quad (1.2)$$

Эта матрица имеет следующее представление через параметры Родрига – Гамильтона  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Имеют место и обратные соотношения. Так, например, если  $A = [a_{ij}]$ ,  $ij = \overline{1,3}$  и  $1 + a_{11} + a_{22} + a_{33} > 0$ , то [5, 20]

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}; \quad \lambda_1 = \frac{a_{23} - a_{32}}{2\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}}; \quad (1.4)$$

$$\lambda_2 = \frac{a_{31} - a_{13}}{2\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}}; \quad \lambda_3 = \frac{a_{12} - a_{21}}{2\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}}; \quad a = \sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}.$$

Приведем выражения через углы Эйлера проекций  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  вектора угловой скорости тела на оси, связанные с телом [4]

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi; \quad \omega_3 = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \quad (1.5)$$

При измерении проекций вектора угловой скорости твердого тела  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  на оси, связанные с телом, и известном положении твердого тела в начальный момент вектор (кватернион) параметров Родрига – Гамильтона  $\lambda = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  определяется в результате интегрирования кинематических уравнений

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \Omega \lambda; \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \|\lambda\|^2 = \lambda^T \lambda = 1. \quad (1.6)$$

Здесь и далее  $\|\cdot\|$  обозначает спектральную матричную норму; верхний индекс  $T$  – транспонирование.

В случае близости трехгранников  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  (углы Эйлера малы) можно использовать приближенное выражение, например, [20, ф-ла (26)] для матрицы  $A$

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & 1 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – малые углы поворота трехгранника  $Oxyz$  относительно осей  $x, y, z$ , соответственно.

## §2. Определение скоростей.

Задача определения угловой скорости твердого тела и скорости одной его точки по результатам наблюдения скоростей трех точек тела рассмотрена рядом авторов ([9, 16 и др.]). Задача формулируется следующим образом (рис. 2). Три вектора  $r_1, r_2, r_3$  определяют точки, в которых происходит измерение линейной скорости. По результатам этих измерений необходимо определить векторы угловой скорости тела

( $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ) и линейной скорости ( $v_0 = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ ) начала системы координат  $O_1$ , связанной с телом. Приняв во внимание известное соотношение (см., например [4, ф-ла (2.7.8)], [9, ф-ла (2)]), определяющее скорость точки твердого тела заданной вектором  $r$

$$v = v_0 + \omega \times r, \quad (2.1)$$

можно записать следующие линейные соотношения (уравнения [16, ф-ла (6)], [9, ф-ла (4)]), связывающие искомые компоненты векторов  $\omega, v$  и результаты наблюдения скоростей точек

$$V = \Omega P + v_0 h^T; \quad (2.2)$$

$$\left( \Omega = \omega \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad P = [r_1 \ r_2 \ r_3]; \quad h = [1 \ 1 \ 1]^T; \right.$$

$V$  – матрица, столбцы которой являются векторами скоростей точек, определяемых векторами  $r_1, r_2, r_3$ ).

Пусть  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – столбцы матриц  $P^T$  и  $V^T$ , т.е.  $P^T = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ ;  $V^T = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ . В этом случае, соотношение (2.2) можно записать как систему линейных уравнений относительно  $\omega, v_0$ :

$$A_v x = B; \quad x = \begin{bmatrix} \omega \\ v_0 \end{bmatrix}; \quad A_v = \begin{bmatrix} o & \beta_3 & \beta_2 & h & o & o \\ -\beta_3 & o & \beta_1 & o & h & o \\ \beta_2 & -\beta_1 & o & o & o & h \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$o$  – нулевая матрица размера  $3 \times 1$ .

Учитывая то, что измерения скорости сопровождаются погрешностями, представим (2.3) в следующем виде:

$$A_v x = B_0 + n_v, \quad (2.4)$$

где  $n_v$  – погрешности измерений, вектор  $B_0$  формируется из точных значений скоростей рассматриваемых точек.

### §3. Определение ускорений.

По аналогии с описанной выше задачей, рассмотрим задачу определения углового ускорения тела и ускорения одной его точки по результатам наблюдения ускорения трех точек тела. Задачу сформулируем следующим образом. Пусть три вектора  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  определяют точки твердого тела, в каждой из которых расположено три акселерометра, позволяющие регистрировать компоненты вектора ускорения данной точки. По результатам этих измерений и значению вектора угловой скорости ( $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ) необходимо определить вектор углового ускорения ( $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T = d\omega/dt$ ) и ускорения ( $w_0 = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ ) начала системы координат, связанной с те-

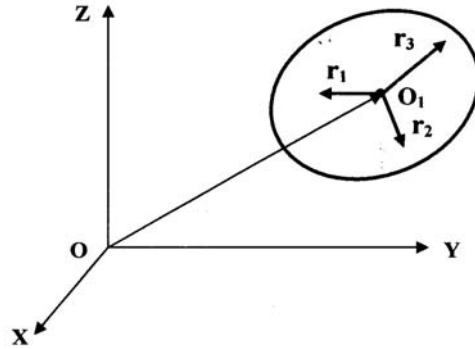


Рис. 2

лом. Применительно к рассматриваемой задаче, аналогом соотношения (2.1) будет соотношение [4, ф-ла (2.17.9)], определяющее ускорение ( $w$ ) точки твердого тела, определяемой вектором  $\rho$

$$w = w_0 + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho). \quad (3.1)$$

Обозначив  $U = [W_1 W_2 W_3]$ ,  $W_i$  – векторы ускорения точек, определяемых  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), можно, базируясь на (3.1), записать аналог соотношения (2.2), т.е.

$$U = \Omega^2 P_w + E P_w + w_0 h^T \quad (3.2)$$

$$(P_w = [\rho_1 \rho_2 \rho_3]; E = \varepsilon \times = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ матрицы } \Omega, h \text{ аналогичны, фигурирую-$$

щим в (2.2)).

Соотношение (3.2) можно, как и (9), представить в виде системы линейных уравнений относительно  $\varepsilon, w_0$ . Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \delta_1, \delta_2, \delta_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  столбцы матриц  $U^T, P_w^T, (\Omega^2 P_w)^T$ , т.е.

$$U^T = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]; P_w^T = [\delta_1 \delta_2 \delta_3]; (\Omega^2 P_w)^T = [\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3].$$

Тогда соотношение (3.2) запишем в форме, аналогичной (2.3), а именно:

$$A_w x = B_\omega + B_w; \quad x = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ w_0 \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

$$A_w = \begin{bmatrix} o & \delta_3 & \delta_2 & h & o & o \\ -\delta_3 & o & \delta_1 & o & h & o \\ \delta_2 & -\delta_1 & o & o & o & h \end{bmatrix}; \quad B_\omega = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

(здесь  $o$  – как и в (2.3), нулевая матрица размера  $3 \times 1$ ).

Как и в случае соотношения (2.3), полагая, что показания акселерометров сопровождаются погрешностями, представим (3.3) в следующем виде:

$$A_w x = B_\omega + B_{w_0} + n_w, \quad (3.4)$$

где  $n_w$  – погрешности измерений, а компоненты  $B_{w_0}$  формируются точными значениями ускорений.

В связи с тем, что размер матрицы  $A_w$  в (3.4) равен  $9 \times 6$ , имеется возможность исключить из рассмотрения три строки в (3.4). Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим схему расположения акселерометров приведенную на рис. 3. Здесь  $X_1, Y_1, Z_1$  – точки осей  $OX, OY, OZ$ , в которых установлено по два акселерометра. Ориентация осей их чувствительности указана на рисунке; например  $a_x^y$  обозначает, что этот акселерометр измеряет ускорение точки  $Y_1$  в

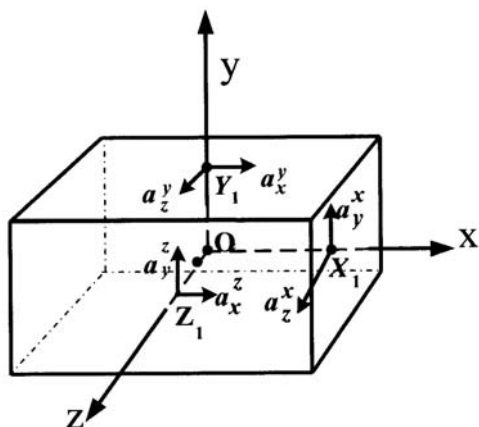


Рис. 3

направлении оси  $OX$ . При такой схеме расположения акселерометров, в системе 9 уравнений (3.4) можно оставить 6 уравнений, вычеркнув первую, пятую и девятую строки. Таким образом, при известном векторе угловой скорости (векторе  $B_\omega$ ) для определения векторов  $\varepsilon$  и  $w_0$  достаточно 6 акселерометров (см. пример 1).

Отметим, что в [19] приведена иная схема расположения 6 акселерометров, которая позволяет сразу определить вектор углового ускорения  $\varepsilon$  как линейную комбинацию показаний акселерометров. Однако, очевидно, что точность определения текущего значения вектора угловой скорости в результате интегрирования углового ускорения будет существенно зависеть от точности задания значения вектора угловой скорости в начальный момент времени. Для снижения этой зависимости целесообразно увеличить число акселерометров, а полученную в результате этого избыточную информацию использовать для повышения точности определения текущего значения  $\omega$ .

Рассмотрим случай 9 акселерометров. Пополним, изображенную на рис. 3 схему 6 акселерометров, тремя акселерометрами, расположенными в точке  $O$ , оси чувствительности которых направлены вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно, т.е. эти акселерометры измеряют ускорение начала координат. Показания этих акселерометров обозначим  $a_x^0, a_y^0, a_z^0$ . Предположим, что расстояние от начала координат каждой из точек  $X_1, Y_1, Z_1$  равно  $L$ .

Введем обозначения:  $n_y^x = a_y^x - a_y^0$ ;  $n_x^y = a_x^y - a_x^0$ ;  $n_z^x = a_z^x - a_z^0$ ;  $n_z^y = a_z^y - a_z^0$ ;  $n_x^z = a_x^z - a_x^0$ ;  $n_y^z = a_y^z - a_y^0$ . При такой схеме расположения акселерометров, из (3.1) или (3.2) следуют следующие соотношения:

$$2L\varepsilon_1 = n_z^y - n_y^z; \quad 2L\varepsilon_2 = n_x^z - n_z^x; \quad 2L\varepsilon_3 = n_y^x - n_x^y; \quad (3.5)$$

$$2L\omega_2\omega_3 = n_z^y + n_y^z; \quad 2L\omega_1\omega_3 = n_x^z + n_z^x, \quad 2L\omega_1\omega_2 = n_y^x + n_x^y. \quad (3.6)$$

Отметим, что уравнения (3.5) совпадают с [1, ф-ла (3.390)]. Таким образом, в случае 9 акселерометров соотношения (3.6) определяют еще три величины:  $\omega_1\omega_2, \omega_1\omega_3, \omega_2\omega_3$ . Эту информацию целесообразно использовать для коррекции результатов интегрирования углового ускорения  $\varepsilon$ . Отметим, что, если две из трех компонент вектора  $\omega$  равны нулю (вращение относительно неподвижной оси), то соотношения (3.6) не могут быть использованы для коррекции результатов интегрирования.

В этой связи целесообразно рассмотренную выше систему 9 акселерометров дополнить еще 3 акселерометрами таким образом, что в точке  $X_1$  измеряется еще и ускорение вдоль оси  $OX$ , в точке  $Y_1$  – вдоль оси  $OY$  и в точке  $Z_1$  – вдоль оси  $OZ$ . Отметим, что эта схема расположения акселерометров совпадает с приведенной в [1, рис. 3.7]. Пусть показания этих 3 акселерометров –  $a_x^x, a_y^y, a_z^z$ . Введем обозначения:  $n_x^x = a_x^x - a_x^0$ ;  $n_y^y = a_y^y - a_y^0$ ;  $n_z^z = a_z^z - a_z^0$ . В рассматриваемой измерительной системе из 12 акселерометров соотношения (3.5), (3.6) должны быть дополнены следующими:

$$2L\omega_1^2 = n_x^x - n_y^y - n_z^z; \quad 2L\omega_2^2 = -n_x^x + n_y^y - n_z^z; \quad 2L\omega_3^2 = -n_x^x - n_y^y + n_z^z. \quad (3.7)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае (12 акселерометров) для коррекции результатов интегрирования углового ускорения следует использовать соотношения (3.6), (3.7).

#### §4. Система инерциальной навигации.

Принимая во внимание, что  $w_0 = dv_0 / dt$ ;  $\varepsilon = d\omega / dt$ , систему (3.4) рассматриваем как систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно  $\omega$ , т.е., рассматривая сигналы акселерометров ( $B_w$ ) как известные внешние воздействия, можем,

при заданных начальных условиях, путем интегрирования (3.4) вычислить значения  $\omega(t)$  и  $v_0(t)$ . Таким образом, рассматриваемый подход позволяет получить информацию об угловой скорости объекта без использования датчиков угловой скорости. Однако, в этом случае при создании инерциальной навигационной системы необходимо принимать во внимание следующие обстоятельства.

Фигурирующий в (3.4) вектор  $x$  задан в подвижной системе координат. В связи с тем, что исследователя интересует положение объекта в инерциальной системе координат, целесообразно проектировать вторую компоненту вектора  $x$  (вектор  $w_0$ ) в инерциальную систему координат и там осуществить дальнейшее интегрирование, которое позволит определить в подвижной системе координат скорость и координаты точки объекта, которая принята в качестве начала подвижной системы координат. Относительно первой части вектора  $x$  (вектора  $\varepsilon$ ) отметим, что его следует использовать для определения текущей ориентации тела, которую можем определить как параметрами Родрига – Гамильтона (1.1), так и матрицей косинусов (1.2) (связь между ними определяется соотношениями (1.3), (1.4)). В данном случае удобно определять параметры Родрига – Гамильтона путем интегрирования уравнения (1.6), в котором компоненты вектора  $\omega$  определяются в процессе интегрирования уравнения (3.4). Далее значение матрицы  $A$ , которая используется для проектирования  $w_0$  в инерциальную систему координат, определяем в соответствии с (1.3). Эта матрица позволяет спроектировать вектор  $w_0$  в инерциальную систему координат и, как отмечено выше, путем интегрирования определить текущие значения скорости и координат объекта.

Таким образом, реализация такого типа инерциальной системы включает: 1) вычисление  $\omega$  путем интегрирования трех дифференциальных уравнений (первые три соотношения (3.4) или соотношения (3.5)); 2) получение кватерниона  $\lambda$ , определяющего, согласно (1.3), матрицу косинусов  $A$  (которая позволяет спроектировать вектор ускорения  $w_0$  в инерциальную систему координат) путем интегрирования системы (1.6) (4 уравнения); 3) определение скорости и координат объекта путем интегрирования 6 уравнений.

Другими словами, необходимо интегрировать систему дифференциальных уравнений 13 порядка. Начальные условия для этой системы – значения следующих величин в начальный момент времени: координат объекта ( $r_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ ); начальной ориентации (кватернион  $\bar{\lambda}$ ) или соответствующей матрицы косинусов  $A(\bar{\lambda})$ ; скорости объекта ( $\bar{v}_0 = [v_{x0} \ v_{y0} \ v_{z0}]^T$ ), вектора угловой скорости ( $\omega_0 = [\omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0}]$ ).

Отметим, что  $\bar{v}_0$ ,  $\omega_0$  определим по результатам измерений с помощью GPS скорости трех точек объекта, используя алгоритм, описанный в §2.

Таким образом, функционирование рассматриваемой системы INS связано с интегрированием нелинейной (в случае 6 акселерометров) системы дифференциальных уравнений 13 порядка. С точки зрения реализации такой INS представляется целесообразным рассмотреть вопрос о «дискретизации» этой системы, т.е. рассмотреть случай, когда съем показаний датчиков производится не непрерывно, а через равные промежутки времени  $\Delta t$ , т.е. с частотой  $f = 1/\Delta t$ . Соответственно, искомые навигационные параметры (матрица косинусов  $A(\lambda)$ , скорость  $v$ , координаты  $r$ ) вычисляем через интервал времени  $\Delta t$ . В связи с тем, что для вычисления навигационных параметров могут быть использованы различные процедуры «дискретизации», отдельно остановимся на каждой из них. Определим оценки кватернионов в моменты времени  $t_i, t_i - t_{i-1} = \Delta t$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$  [2, 13]. Итак, пусть известны на промежутке вре-

мени  $\Delta t$  квазикоординаты (компоненты вектора  $\nabla\theta_i = \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \omega dt$ ). Выразив через эти

квазикоординаты решение  $\delta\lambda(t_i)$  уравнения (1.6) на промежутке времени  $\Delta t$  при начальном условии  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  (т.е. вычислив кватернион, соответствующий малому повороту твердого тела за время  $\Delta t$ ), ориентацию тела определяем последовательным перемножением  $\delta\lambda(t_i)$  «элементарных» кватернионов

$$\lambda(t_i) = \lambda(t_{i-1})\delta\lambda(t_i); \quad \delta\lambda(t_i) = [\delta\lambda_0(t_i) \ \delta\lambda_1(t_i) \ \delta\lambda_2(t_i) \ \delta\lambda_3(t_i)]^T. \quad (4.1)$$

В матричном виде эта процедура выглядит так:

$$\lambda(t_i) = \begin{bmatrix} \delta\lambda_0(t_i) & -\delta\lambda_1(t_i) & -\delta\lambda_2(t_i) & -\delta\lambda_3(t_i) \\ \delta\lambda_1(t_i) & \delta\lambda_0(t_i) & \delta\lambda_3(t_i) & -\delta\lambda_2(t_i) \\ \delta\lambda_2(t_i) & -\delta\lambda_3(t_i) & \delta\lambda_0(t_i) & \delta\lambda_1(t_i) \\ \delta\lambda_3(t_i) & \delta\lambda_2(t_i) & -\delta\lambda_1(t_i) & \delta\lambda_0(t_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0(t_{i-1}) \\ \lambda_1(t_{i-1}) \\ \lambda_2(t_{i-1}) \\ \lambda_3(t_{i-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

В [2, 13] приведены выражения кватернионов  $\delta\lambda(t_i)$  через вектор квазикоординат  $\nabla\theta_i$ , которые, в зависимости от сложности, обеспечивают то или иное качество аппроксимации.

Далее используем следующую аппроксимацию кватерниона  $\delta\lambda(t_i)$  (соотношение [13, ф-ла (2.6)]):

$$\delta\lambda(t_i) = \begin{bmatrix} 1 - \|\nabla\theta_i\|^2 / 12 \\ \nabla\theta_i / 2 - (\nabla\theta_i \times \nabla\theta_{i-1}) / 24 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Как и в [13], для вычисления  $\nabla\theta_i$  используем квадратичную сплайн-аппроксимацию вектора угловой скорости  $\omega(t)$ . Так, если известны значения  $\omega(t_{i-2})$ ,  $\omega(t_{i-1})$ ,  $\omega(t_i)$ , то

$$\nabla\theta_i = \frac{\Delta t}{12} (5\omega(t_i) + 8\omega(t_{i-1}) - \omega(t_{i-2})); \quad (4.4)$$

$$\omega(t_i) = \omega(t_{i-1}) + \frac{\varepsilon(t_i) + \varepsilon(t_{i-1})}{2} \Delta t. \quad (4.5)$$

В (4.5)  $\varepsilon(t_i)$  – вектор угловых ускорений, определяемых по результатам показаний акселерометров в момент  $t_i$  (в (3.2) для вычисления элементов матрицы  $\Omega$  используются компоненты вектора  $\omega(t_{i-1})$ ). Располагая полученной, согласно (4.4), оценкой кватерниона  $\delta\lambda(t_i)$ , находим, используя (4.1), (4.2), кватернион  $\lambda(t_i)$  и далее, согласно (1.3), матрицу  $A(\lambda(t_i))$ .

Спроектировав с помощью матрицы  $A(\lambda(t_i))$ , определенный выражением (3.3) вектор  $w_0(t_i)$  в неподвижную систему координат, получим оценки скорости ( $v(t_i)$ ) и координат ( $r(t_i)$ ) объекта [13].

В этой связи, в рассматриваемых примерах ограничимся только оценкой точности определения матрицы  $A(\lambda)$ .

##### §5. Повышение точности определения $\omega$ .

Рассмотрим задачу использования соотношений (3.6) для повышения точности определения  $\omega$  в случае 9 акселерометров и аналогичную задачу в случае 12 акселерометров. В последнем случае используются кроме упомянутых соотношений (3.6)



еще и соотношения (3.7). Итак, рассмотрим случай 9 акселерометров, показания которых определяют как вектор углового ускорения  $\varepsilon$  (соотношения (3.5)), так и компоненты вектора  $\Omega_n = [\omega_2\omega_3 \ \omega_1\omega_3 \ \omega_2\omega_1]^T$  (соотношения (3.6)). Предполагая  $\Delta\omega_i = \omega(t_i) - \omega(t_{i-1})$  малой величиной, можно записать следующее соотношение:

$$\Omega_n = H\Delta\omega_i + \Omega_{n0}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Omega_{n0} = [\omega_2\omega_3 \ \omega_1\omega_3 \ \omega_1\omega_2]^T. \quad (5.1)$$

В (5.1)  $\Omega_n$  определяется (3.6), а значения компонент вектора  $\omega$ , фигурирующие в  $H$  и  $\Omega_{n0}$ , соответствуют значениям компонент вектора  $\omega(t_{i-1})$ . Иначе, в результате сделанного предположения о малости  $\Delta\omega_i$ , имеем стандартную задачу оценки параметров методом взвешенных наименьших квадратов [8]. А именно, если имеется начальная оценка  $\Delta\bar{\omega}_i = [\varepsilon(t_i) + \varepsilon(t_{i-1})]\Delta t / 2$ , то согласно (5.1) наблюдается вектор  $z$

$$z = \Omega_n - \Omega_{n0} = H\Delta\omega + \nu, \quad (5.2)$$

где  $\nu$  – вектор погрешностей измерений. Оценка величины  $\Delta\bar{\omega}_i$  определяется соотношением [8, (12,2, 7)]

$$\Delta\bar{\omega}_i = \Delta\bar{\omega}_i + PH^T R^{-1}(z - H\Delta\bar{\omega}_i); \quad P^{-1} = M^{-1} + H^T R^{-1}H \quad (5.3)$$

(здесь  $M$  – ковариационная матрица погрешностей оценки  $\Delta\bar{\omega}_i$ ;  $R$  – ковариационная матрица погрешностей измерений  $\nu$  в (5.2)). Окончательно, величина вектора  $\omega$  в момент  $t_i$  определяется соотношением

$$\omega(t_i) = \omega(t_{i-1}) + \Delta\bar{\omega}_i, \quad (5.4)$$

в котором  $\Delta\bar{\omega}_i$  находится из (5.3).

Отметим, что матрица  $P^{-1}$  может быть плохообусловленной и поэтому для получения матрицы  $P$ , фигурирующей в (5.3), может оказаться целесообразным использовать подход [12, 13].

Так как матрицы  $M, R$  – симметричны и положительно определены, то их можно представить в виде:  $M = m^2$ ;  $R = r^2$ , т.е.  $m = M^{1/2}$ ;  $r = R^{1/2}$ . Соответственно, выражения для матрицы  $P^{-1}$  можем записать так:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} m^{-1} & H^T r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^{-1} & H^T r^{-1} \end{bmatrix}^T. \quad (5.5)$$

Используя процедуру  $QR$ -разложение, преобразуем матрицу  $\begin{bmatrix} m^{-1} & H^T r^{-1} \end{bmatrix}^T$  следующим образом:

$$\begin{bmatrix} m^{-1} & H^T r^{-1} \end{bmatrix}^T = Q[\rho \ 0]^T, \quad (5.6)$$

где  $Q$  – ортогональная матрица;  $\rho$  – обратимая матрица.

Приняв во внимание, что  $Q^T Q = I$ , подставив (5.6) в (5.5), получим  $P^{-1} = \rho^T \rho$  или  $P = \rho^{-1} \rho^{-T}$ . Таким образом, выражение (5.3) можно представить в виде

$$\Delta\bar{\omega}_i = \Delta\bar{\omega}_i + \rho^{-1} \rho^{-T} H^T R^{-1}(z - H\Delta\bar{\omega}_i). \quad (5.7)$$

Если предположить, что  $M = \mu^2 I$ ,  $R = \gamma^2 I$ , то соотношение (5.7) можно записать так:

$$\Delta \bar{\omega}_i = \Delta \bar{\omega}_i + \rho^{-1} \rho^{-T} H^T (z - H \Delta \bar{\omega}_i), \quad (5.8)$$

где  $\rho$  определяется QR-разложением следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & H^T \end{bmatrix}^T; \quad \lambda = \gamma / \mu. \quad (5.9)$$

Отметим, что описанный выше алгоритм коррекции можно использовать и в случае 12 акселерометров. Так, в этом случае, фигурирующие в (5.1), матрица  $H$  и вектор  $\Omega_{n_0}$  имеют вид

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 & 2\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 & 0 & 2\omega_2 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_3 \end{bmatrix}^T; \quad \Omega_{n_0} = [\omega_2\omega_3 \quad \omega_1\omega_3 \quad \omega_1\omega_2 \quad \omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \omega_3^2]^T.$$

Здесь, как и в случае 9 акселерометров, компоненты  $H$  и  $\Omega_{n_0}$  определяются компонентами вектора  $\omega(t_{i-1})$ . Компоненты вектора  $\Omega_n$  определяются соотношениями (3.6), (3.7).

### §6. Примеры.

*Пример 1* [14]. Рассмотрим следующую навигационную задачу. Пусть система координат  $Oxyz$  связана с поверхностью Земли. В этой системе координат объект (с которым связана система  $Ox'y'z'$ ) движется по кругу в плоскости  $xu$  со скоростью  $\bar{v} = 30$  м/сек и периодом  $T = 60$  сек. В процессе движения его ориентация (система  $Ox'y'z'$ ) определяется следующей зависимостью от времени ( $t$ ) углов Эйлера:  $\psi = \dot{\psi}t$ ;  $\dot{\psi} = 2\pi / T$ ;  $\varphi = 0$ ;  $\vartheta = 0$ . Согласно (1.5) проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат – следующие:  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ;  $\omega_3 = \dot{\psi}$ . Начальная ориентация объекта, согласно (1.1), задается кватернионом  $\lambda = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  и, следовательно, согласно (1.3), матрица косинусов – единичная матрица. В момент  $t = 0$  объект расположен на оси  $y$  на расстоянии  $R_0 = T\bar{v} / 2\pi$ , его скорость (вектор  $v_0$ , фигурирующий в (2.2)) и ускорение  $w_0$  в (3.2) определяются следующими соотношениями:

$$v_0 = [-\bar{v} \ 0 \ 0]^T; \quad w_0 = \left[ 0 \quad -\frac{\bar{v}^2}{R_0} + g \right]^T; \quad \text{здесь } g = 9,81 \text{ м/сек}^2 \text{ – ускорение силы тяжести.}$$

Акселерометры установлены по осям трехгранника так, как показано на рис. 3, причем величина  $L$  принята равной 0,1 м. Погрешности акселерометров ( $n_w$  в (3.4)) моделируются равномерно распределенными некоррелированными случайными числами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_w = 10^{-3}$  м/сек<sup>2</sup>.

Таким образом, приведенные начальные условия и принятые предположения о погрешностях акселерометров позволяют выполнить моделирование работы рассматриваемой инерциальной системы навигации, которая не содержит датчиков угловой скорости. Однако, для иллюстрации алгоритма, описанного в §2, рассмотрим ситуацию, когда начальные значения скоростей объекта (угловой и линейной) определяются с помощью GPS путем обработки результатов измерения при  $t = 0$  скоростей 3 точек объекта. В этой связи предположим, что матрица  $P$  в (2.2) имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что так как матрица  $P^{-1}$  не существует, использовать алгоритм [16] не представляется возможным.

Погрешности измерений (компоненты вектора  $n_v$  в (2.4)) предполагаются некоррелированными равномерно распределенными числами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_v = 10^{-1}$  м/сек. При этих исходных данных, используя алгоритм §2, получим следующие оценки:

$$\omega(0) = [-10^{-3} \quad 6,4 \cdot 10^{-3} \quad 0,1024]^T; \quad v_0(0) = [-29,9955 \quad -3,4 \cdot 10^{-3} \quad 0,0101]^T. \quad (6.1)$$

Эти оценки приняты в качестве соответствующих начальных условий при моделировании системы инерциальной навигации (размерность  $\omega(0)$  – 1/сек; размерность  $v_0(0)$  – м/сек). Для остальных параметров, а именно параметров, определяющих начальное положение и ориентацию объекта, в качестве начальных приняты точные их значения при  $t = 0$ .

Моделирование работы системы в течение 15с произведено с использованием процедур пакета MATLAB, а именно, для интегрирования системы дифференциальных уравнений использована процедура ode 45.m, для генерирования случайных чисел – процедура rand.m.

На рис. 4 приведены (полученные в результате моделирования погрешности определения ориентации) величины  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  (размерность – градусы), которые являются наддиагональными элементами матрицы  $A^T(\bar{\lambda})A(\lambda)$ , аппроксимированной в виде (1.7)

$$A^T(\bar{\lambda})A(\lambda) \cong \begin{bmatrix} 1 & \mu_z & -\mu_y \\ -\mu_z & 1 & \mu_x \\ \mu_y & -\mu_x & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\lambda$  – значение кватерниона, полученного путем интегрирования;  $\bar{\lambda}$  – точное значение. Соответственно,  $A(\bar{\lambda}), A(\lambda)$  – точное значение матрицы косинусов и полученная в результате интегрирования ее оценка.

На рис. 4 и др. сплошная линия соответствует  $\mu_x$ , штриховая –  $\mu_y$ , штрихпунктирная –  $\mu_z$ . Отметим, что результаты, приведенные на рис. 4, соответствуют результатам, приведенным в [14, Fig. 9 – 11]. Необходимо подчеркнуть, что приведенные на рис. 4 результаты получены с использованием процедуры интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений (ode 45.m).

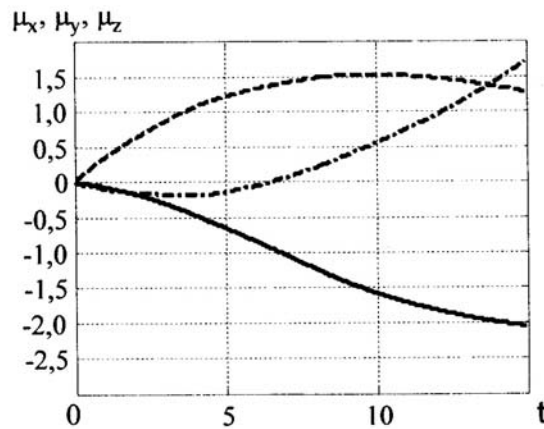


Рис. 4

**Пример 2.** На объекте установлено 9 акселерометров, а именно, 6 акселерометров как показано на рис. 3 и еще 3 акселерометра – в начале координат (подробности см. конец §3). Начало координат приборного трехгранника, связанного с подвижной системой координат  $(Ox'y'z')$ , задаем вектором  $R = [0 \ 1 \ 0]^T$ . Ориентацию подвижной системы координат задаем следующей зависимостью от времени углов Эйлера:  $\psi(0) = 0$ ;  $\theta(0) = \pi / 4$ ;  $\phi(0) = 0$ ;  $\dot{\psi} = 1$ ;  $\dot{\theta} = 0$ ;  $\dot{\phi} = 10$ . Проекция угловой скорости на оси подвижной системы координат определяем (1.5). Отметим, что в рассматриваемом примере модуль вектора угловой скорости превосходит 600 град/с, в то время как в примере 1 он составил 6 град/с. В этой связи в рассматриваемом примере принято, что  $\Delta t = 10^{-3}$  с. Начальную ориентацию (кватернион) определяем соотношениями (1.1). Как и в примере 1, принимаем, что  $\sigma_w = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>,  $L = 0,1$  м. Погрешность выставки начального значения угловой скорости (аналог (6.1)) моделируем следующим образом. В качестве начального значения ( $\tilde{\omega}(0)$ )

$$\tilde{\omega}(0) = \omega(0) / 2, \quad (6.2)$$

где  $\omega(0)$  – точное значение, определяемое (5).

Принимаем, что в (5.9)  $\lambda = 0,1$ . Результаты погрешностей определения кинематических параметров движения, полученные при моделировании движения в течение 15с, приведены на рис. 5, 6.

На рис. 5 приведены значения (размерность град / сек) величины

$$\text{dom}(t_k) = \left( \sum_{i=1}^k \|\omega(t_i) - \tilde{\omega}(t_i)\| \right) / k.$$

Здесь  $\tilde{\omega}(t_i)$  – оценка значения угловой скорости, полученная согласно (5.4);  $\omega(t_i)$  – точное значение вектора угловой скорости. Т.е. величина *dom* характеризует точность оценки текущего значения вектора угловой скорости, полученной согласно (5.4) (на рис. 5 размерность *dom* – град / сек). На рис. 6 приведены значения погрешностей определения ориентации (обозначения совпадают с принятыми на рис. 4). Таким образом, согласно приведенным результатам можно утверждать, что в рассматриваемом примере использование алгоритма коррекции (5.4) позволило существенно повысить точность определения текущего значения  $\omega$  и, как следствие, повысить точность определения ориентации. Так, согласно графику *dom* (рис. 5) величина

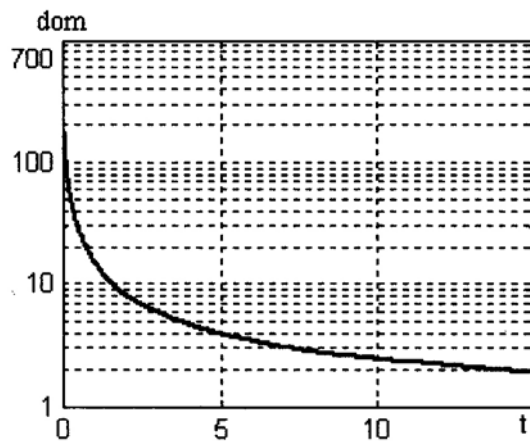


Рис. 5

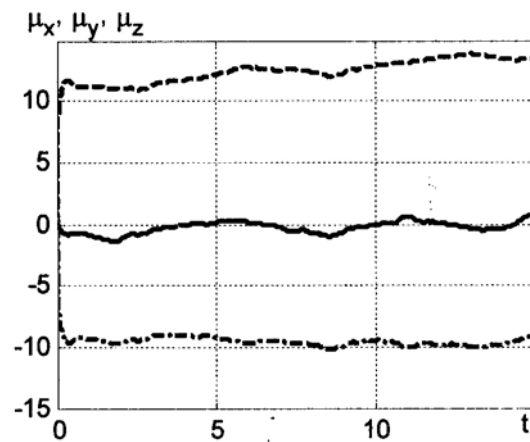


Рис. 6

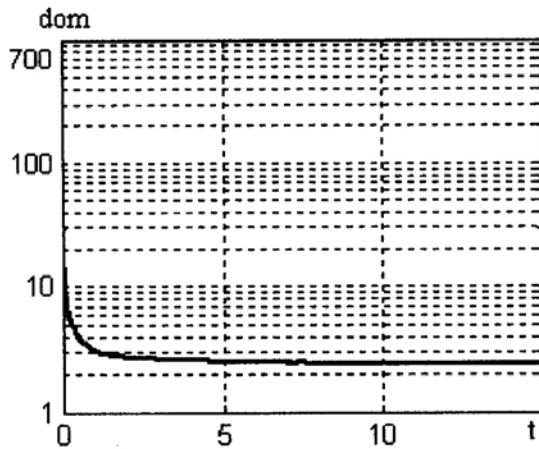


Рис. 7

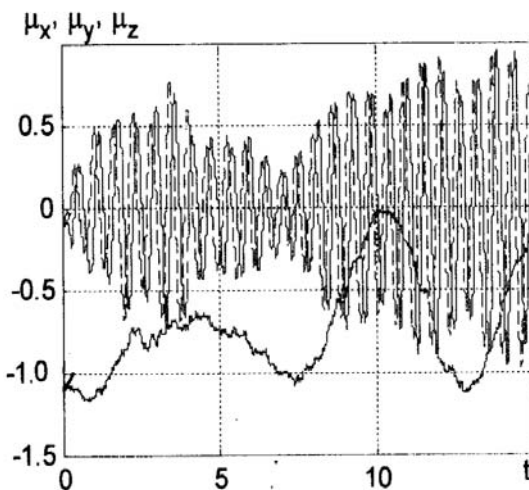


Рис. 8

погрешности  $\omega$  на 15 сек имеет порядок 2 град/сек, в то время как, в соответствии с (6.2), погрешность начальной выставки  $\omega$  имеет порядок 300 град/сек. Как следствие этого можно констатировать и повышение точности определения ориентации (рис. 6). Так, в начальный период наблюдается разное нарастание погрешности определения ориентации, обусловленное грубой начальной выставкой  $\omega$ . Однако, далее, после снижения погрешности определения текущего значения  $\omega$  можно констатировать, что погрешности определения ориентации не претерпевают существенных изменений. Отметим, что в то время как погрешность начальной выставки угловой скорости имеет порядок 300 град/сек, погрешность ориентации объекта на 15 секунде имеет порядок 10 градусов.

**Пример 3.** Рассмотрим измерительную систему, содержащую 12 акселерометров (ее описание приведено в конце §3). Сохраним исходные данные примера 2 (параметры движения, погрешность начальной выставки и т.д.), изменив только значения  $\sigma_w$  и  $\lambda$ . Так, принимаем, что  $\sigma_w = 10^{-1}$  м/сек<sup>2</sup>;  $\lambda = 700$ , т.е. точность акселерометров снижена на два порядка. Результаты моделирования приведены на рис.7, 8 (обозначения совпадают с принятыми на рис.5, 6).

Эти результаты свидетельствуют о существенно большей эффективности измерительной системы, содержащей 12 акселерометров. Так, согласно 7, несмотря на то, что погрешности измерения ускорений возросли на два порядка, величина погрешности текущего значения  $\omega$  на 15 сек имеет практически тот же порядок, что и в примере 2. Можно констатировать, что в такой системе уменьшение ошибки начальной выставки  $\omega$  происходит существенно быстрее и, как следствие, снижаются погрешности определения ориентации (ср. рис. 6, 8).

**Пример 4.** Продолжим рассмотрение примера 1. Сохраним все исходные данные (параметры движения, точность акселерометров и т. п.) примера 1. Однако, предположим, что измерительная система содержит уже не 6, а 12 акселерометров (как и в примере 3). Принимаем, что в (5.9)  $\mu = 7$ . Результаты моделирования приведены на рис. 9.

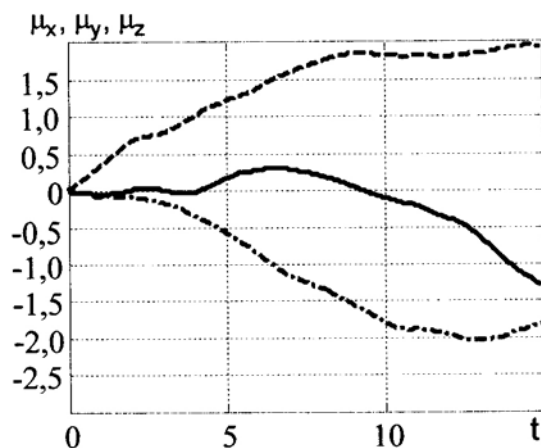


Рис. 9

Сравнивая их с результатами рис. 4, можно констатировать одинаковую точность определения ориентации. Однако, в отличие от примера 1, в этом примере, для получения оценки  $\omega$  использована не процедура интегрирования нелинейного дифференциального уравнения (ode 45.m), а конечно-разностная схема (4.5).

#### Заключение.

Изложены алгоритмы работы автономных систем инерциальной навигации, не содержащих датчиков угловой скорости. Рассмотрены системы, содержащие 6, 9 и 12 акселерометров. В связи с тем, что 6 акселерометров достаточно для измерения углового ускорения объекта, то в случаях, когда система содержит 9 или 12 акселерометров имеется возможность повысить точность определения вектора угловой скорости объекта, используя дополнительную информацию, обусловленную наличием дополнительных акселерометров. Приведены соответствующие алгоритмы коррекции. На примерах показано, что такие системы могут быть эффективны в случаях движения объекта с большой угловой скоростью, когда, как известно, использование датчиков угловой скорости становится проблематичным.

**РЕЗЮМЕ.** Викладено алгоритми роботи автономних систем інерціальної навігації, що не містять датчиків кутової швидкості. Розглянуто системи, які мають 6, 9 і 12 акселерометрів. У зв'язку з тим, що 6 акселерометрів достатньо для вимірювання кутового прискорення об'єкту, то у випадках, коли система містить 9 або 12 акселерометрів є можливість підвищити точність визначення вектора кутової швидкості об'єкту. З цією метою використана додаткова інформація, обумовлена наявністю додаткових акселерометрів. Наведено відповідні алгоритми корекції. На прикладах показано, що такі системи можуть бути ефективними у випадках руху об'єкту з великою кутовою швидкістю, коли, як відомо, використання датчиків кутової швидкості стає проблемним.

1. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. – М.: Наука, 1966. – 580 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
3. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
5. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. – К.: Наук. думка, 1983. – 208 с.
6. Ahn I.K., Ryu H., Larin V.B., Tunik A.A. Integrated Navigation, Guidance and Control Systems for Small Unmanned Aerial Vehicles // The World Congress «Aviation in the XXI Century». Ukraine. – K., 2003. – P. 14 – 16.

7. *Bogdanov M.B., et al.* Integrated inertial/satellite orientation and navigation system on accelerometer-based SINS // Proc. of 18<sup>th</sup> Saint-Petersburg Conf. on Integrated Navigation Systems. – 2011. – P. 216 – 218.
8. *Bryson A.E. Jr., Ho-Yu-Chi.* Applied optimal control. Optimization, estimation and control. – Massachusetts: Waltham, 1969. – 544 p.
9. *Fenton R.G., Willgoss R.A.* Comparison of Methods for Determining Screw Parameters of Infinitesimal Rigid Body Motion from Position and Velocity Data // J. Dynamic Syst. Measurement and Control. – 1990. – **112**. – P. 711 – 716.
10. *Greenspan R.L.* Global navigation satellite systems. Ser. 207 // AGARD Lecture, NATO. – 1996. – P. 1 – 1, 1 – 9.
11. *Grewal M.S., Andrews A.P.* Kalman Filtering. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1993. – 381 p.
12. *Larin V.B.* On Integrating Navigation Systems // J. Autom. and Inform. Scie. – 1999. – **31**, N 10. – P. 95 – 98.
13. *Larin V.B.* Attitude-Determination Problems for a Rigid Body // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N7. – P. 870 – 898.
14. *Larin V.B., Tunik A.A.* About Inertial-Satellite Navigation System without Rate Gyros // Appl. and Comp. Math.. – 2010. – **9**, N 1. – P. 3 – 18.
15. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial Navigation System Error Correction // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N2. – P. 213 – 223.
16. *Laub A.J., Shiflett G.R.* A Linear Algebra Approach to the Analysis of Rigid Body Velocity from Position and Velocity Data // Trans. ASME – 1983. – **105**. – P. 92 – 95.
17. *Schmidt G.* INS/GPS Technology Trends, NATO RTO Lecture Series, RTO-EN-SET-116, Low-Cost Navigation Sensors and Integration Technology. October – 2008. – P. 1 – 1, 1 – 18.
18. *Schmidt G., Phillips R.* INS/GPS Integration Architecture Performance Comparison. – NATO RTO Lecture Series, RTOEN-SET-116, Low-Cost Navigation Sensors and Integration Technology, Publ., Prague. October – 2008. – P. 5 – 1, 5 – 18.
19. *Tan C.-W., Park S.* Design and error analysis of accelerometer-based inertial navigation systems, California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2002-21, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley, 2002. – 29 p.
20. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. B.G. Teubner, Stuttgart. – 1977.– 292 p.

Поступила 13.02.2012

Утверждена в печать 22.11.2012