А.А.Каминский, М.Ф.Селиванов, Ю.А.Черноиван

О ДОКРИТИЧЕСКОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ВЯЗКОУПРУГОМ КОМПОЗИТНОМ ТЕЛЕ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua

Abstract. In the framework of nonlinear fracture mechanics, the equations of a crack mode III growth in the composite material with the linearly viscoelastic components are obtained. The study is carried out using two models of a crack growth: the model with constant length of the prefracture zone and the model with constant shear stress in this zone. The solving scheme is offered and applied to obtain a numerical solution in the form of kinetic curves of the crack growth. An analysis of findings is given.

Keywords: Subcritical crack growth, linear viscoelasticity, mode III, prefracture zone.

Введение.

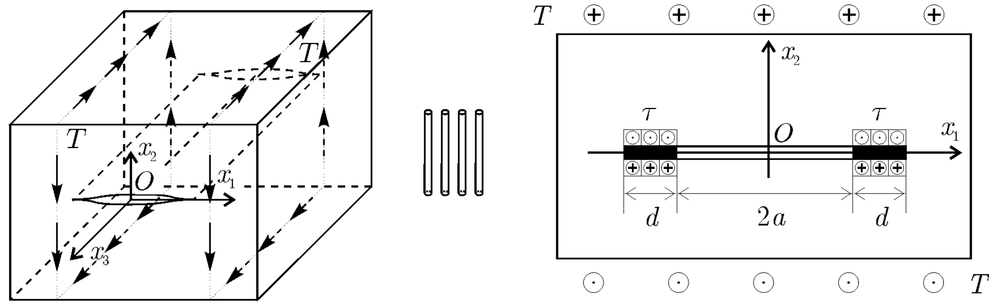
Изучение механизмов и закономерностей разрушения современных композитных материалов с вязкоупругими свойствами, как актуальная проблема механики разрушения, требует построения эффективных методов решения задач, связанных с развитием трещин при взаимодействии разных типов нагрузки на тела из композитных материалов [1, 2]. До сих пор основное внимание уделялось изучению развития трещин в условиях нормального отрыва [2, 4, 12]. Исследование задач о распространении трещин продольного сдвига выполнено в [9, 10] в рамках концепций линейной механики разрушения с использованием упрощений в постановке задачи (изотропный материал, специальная форма зависимости вязкоупругих характеристик от времени). В [8, 11, 13, 14, 16] разработаны эффективные методики, с помощью которых можно на основе характеристик вязкоупругого поведения компонентов композитного материала и принципа Вольтерра построить систему определяющих уравнений, численное решение которой предоставляет возможность строить кинетические кривые развития трещин с немалыми зонами предразрушения.

В данной работе на основе имеющихся результатов приведены схемы построения решения задачи о докритическом распространение трещины продольного сдвига в композитном материале, компоненты которого обладают вязкоупругими свойствами. Определяющие уравнения построены для двух основных моделей распространения трещины в материале с вязкоупругими свойствами: модели неизменности длины зоны предразрушения во время ее роста и модели неизменности равномерно распределенных напряжений в этой зоне.

1. Постановка задачи. Применяемые модели.

Рассмотрим композитный материал с однонаправленным армированием дискретными трансверсально-изотропными волокнами. Волокно моделируем эллипсоидом вращения; отношение большей оси эллипсоида к меньшей обозначим k, концентрацию фазы армирования – c_1. Примем, что материалы обеих фаз проявляют вязкоупругие свойства, которые обусловливают наследственное поведение композита.

Исследуем длительное разрушение вязкоупругого композитного тела со сквозной трещиной. На бесконечности на тело действуют усилия T в нормальном к оси x_1 направлении (рис. 1, *а*).



а *б*

Рис. 1

Деформирование тела из композитного материала происходит в условиях плоской деформации. Трещина расположена в одной из плоскостей симметрии механических свойств композита и при своем развитии не выходит из нее. Это предположение выполняется для композитов с высокой степенью адгезии, не предрасположенных к расслоению. Рассмотрим случай, когда направление армирования нормально относительно плоскости трещины, т.е. совпадает с направлением оси x_2 (рис. 1).

Для исследования кинетики развития трещины используем определяющие уравнения докритического развития трещины, аналогичные полученным в работе [3, раздел 3]. В основе построения этих уравнений лежит модель трещины с зоной предразрушения.

Трещину-щель в вязкоупругом композите представим как разрез, берега которого имеют два характерных участка: на одном берега взаимодействуют, на другом – нет [7, 14]. При этом взаимодействие берегов происходит в узких зонах предразрушения на краях трещины (рис. 1 *б*). При продольном сдвиге распространение трещины сдерживается материалом в зоне вершины трещины, пока сдвиг берегов в зоне вершины не превысит критического значения ($\delta_{\mathrm{III}*}$), [1, 6, 7]

$$2w(t)\Big|_{x_1=a} \equiv \Delta(t)\Big|_{x_1=a} = \delta_{\mathrm{III}*}, \tag{1}$$

где $2a$ – размер трещины; $w(t)$ – смещение вдоль оси x_3; t – время.

При моделировании противодействия материала в зоне устья трещины (зоне предразрушения) соответствующими касательными напряжениями будем использовать одну из двух концепций.

1. Напряжения τ равномерно распределены вдоль берегов зоны предразрушения $d(t)$ и не изменяются на протяжении периода докритического роста (концепция $\tau = \mathrm{const}$);

2. Напряжения $\tau(t)$ равномерно распределены по берегам зоны предразрушения, размер которой во время роста трещины сохраняет постоянное значение d (концепция $d = \mathrm{const}$).

Распространение трещины определяется как процесс перехода точек области, где есть взаимодействие берегов, в область, где оно отсутствует.

Для характеристики продолжительной трещиностойкости в данной работе используем такие параметры: геометрический параметр $\eta_* = a_* / a_0$, где a_0 и a_* – начальный и критический полуразмеры трещины, соответственно; при использовании концепции $\tau = \text{const}$ введем силовой параметр, который равняется отношению интенсивности касательных напряжений в зоне предразрушения к интенсивности внешней нагрузки $\rho_2 = \tau / T$; при использовании концепции $d = const$ вводим геометрический параметр $\rho = d / a_0$.

2. Вязкоупругое смещение берегов трещины.

Вязкоупругое смещение на продолжении трещины определяем на основе решения задачи об упругом раскрытии в ортотропном теле в условиях плоской деформации. С этой целью воспользуемся принципом упруго-вязкоупругой аналогии, являющимся аналогом принципа Вольтерра, который получил обоснование для аналогичных задач [3]. Согласно этому принципу в выражении для смещений берегов на продолжении трещины заменим упругие модули соответствующими преобразованными величинами и воспользуемся обратным преобразованием.

В случае, когда релаксационные свойства материалов компонентов композита можно описать в рамках линейной теории вязкоупругости, эффективные модули представим рядом функций Миттаг – Леффлера [15]

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{(ij)\infty} + \sum_{k=1}^{n} \mu_{(ij)k} E_{\alpha_{(ij)},1}\left(-\beta_{(ij)k} t^{\alpha_{(ij)}}\right); \quad E_{\alpha,\delta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left[\alpha n + \delta\right]}. \tag{2}$$

При проведении вычислений оставим лишь одно слагаемое в выражении (2) и используем один параметр α функции Миттаг – Леффлера для описания долговременных свойств материалов компонентов композита с целью качественного исследования результатов. Примем также, что материалы компонентов композита являются изотропными (механические свойства описываем модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν). Отметим, что ни одно из этих упрощений не обусловлено использованным методом решения поставленной задачи.

При указанных упрощениях выражение (2) в области преобразования принимает вид

$$\tilde{E}^{(i)}(s) = E_{\infty}^{(i)} + \left(E_0^{(i)} - E_{\infty}^{(i)}\right) \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta^{(i)}}, \tag{3}$$

где $\tilde{E}(s) = s\bar{E}(s)$, $\bar{E}(s)$ – преобразование Лапласа функции $E(t)$; E_0 – мгновенное значение модуля; $i = 1$ отвечает армированию, $i = 2$ – наполнителю.

Композит с однонаправленными короткими волокнами моделируем трансверсально-изотропным телом с приведёнными характеристиками [8]. Рассмотрим продольный сдвиг этого тела, когда плоскость изотропии перпендикулярна оси x_2 (рис. 1). Таким образом, сдвиг происходит в плоскости, перпендикулярной к плоскости расположения трещины.

Обобщенный закон Гука имеет вид $\gamma_{23} = a_{44}\tau_{23}$; $\gamma_{13} = a_{66}\tau_{13}$, где a_{ij} – компоненты тензора податливости трансверсально-изотропного тела с осью симметрии вращения, которая совпадает с осью x_3 .

Исходя из симметрии задачи, трещину рассматриваем как разрез вдоль оси x_1 , при этом на участке $a < x_1 \le a + d$ касательные напряжения, которые стягивают берега трещины, распределены равномерно с интенсивностью τ . Общая длина разреза $2(a+d)$ определяется в ходе решения задачи. Поэтому краевую задачу линейной теории упругости сформулируем так: в упругой области есть разрез по оси x_1 длиной $2(a+d)$ с центром в начале координат; на поверхности разреза действуют напряжения

$$\sigma_{11}(x_1, 0) = 0; \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = 0; \quad \tau_{23} = \begin{cases} 0, & x_1 \le a; \\ \tau, & a < x_1 \le a + d. \end{cases}$$

В бесконечно отдаленных точках плоскости приложена внешняя нагрузка интенсивности $\tau_{23}(x_1, \infty) = T$. Сдвиг берегов трещины длины $2a$ в точке $(x_1, 0)$ представим на основе результатов работы [7] в форме

$$\delta(x_1, a) = LTa\delta_0(s; \rho_i) \quad (s = x_1 / a,\ i = \overline{1,5}); \tag{4}$$

$$\delta_0(s;\rho_i) = \rho_3 \mathrm{Re}\{(1-b)t_1 + t_2 + (s+1)t_3 + (s-1)t_4)\} + 2(1-\rho_2)t_5,$$

причем величины b , t_3 , t_4 и t_5 зависят от геометрического параметра s ;

$$t_1 = \ln\frac{d_2}{d_1};\quad t_2 = \ln\frac{d_3}{d_2};\quad t_3 = \ln\frac{d_2 - \overline{b}}{d_3 - \overline{b}};\quad t_4 = \ln\frac{d_4 - \overline{b}}{d_2 - \overline{b}};\quad t_5 = \sqrt{\rho_5 - s^2};$$

$$d_1 = 1 + i\rho_4;\quad d_2 = -1 + i\rho_4;\quad d_3 = -1 - i\rho_4;\quad d_4 = 1 - i\rho_4;\quad b = s + it_5;$$

$$\rho_2 = \tau / T;\quad \rho_3 = 2\rho_2 / \pi;\quad \rho_4 = \rho_3^{-1};\quad \rho_5 = 1 + \rho_4^2. \tag{5}$$

Параметр ρ_5 связан с параметрами модели таким образом:

$$\rho_5 = (1+\rho_1)^2,\quad \rho_1 = d / a. \tag{6}$$

Условие конечности напряжений τ_{23} в точке $(a+d, 0)$, которое используется при получении выражения (4), во введенных обозначениях имеет вид

$$\rho_2 = \pi / 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{(1+\rho_1)^2 - 1}, \tag{7}$$

откуда следует утверждение о постоянстве величины ρ_1 во время распространения трещины в случае использования концепции $\tau = \mathrm{const}$ и постоянной интенсивности внешней нагрузки. В этом случае из выражений (5) – (7) следует, что величины ρ_i , $i = \overline{1,5}$, являются постоянными и зависят только от параметра ρ_2 , введенного в п. 1 как относительный параметр трещиностойкости для концепции $\tau = \mathrm{const}$. С ростом трещины увеличивается длина зоны предразрушения.

В случае использования концепции $d = \mathrm{const}$ при росте трещины величина ρ_2 увеличивается и, таким образом, увеличивается напряжение в зоне предразрушения при постоянных интенсивностях внешней нагрузки. Величины ρ_i , $i = \overline{1,5}$, в этом случае зависят от размера трещины. Учитывая выбор второго параметра трещиностойкости, в рамках этой концепции величины ρ_i выражения для раскрытия трещины (4), вычисляем в обратном порядке

$$\rho_5 = [1 + \rho / (a / a_0)]^2;\ \rho_4 = \sqrt{\rho_5 - 1};\ \rho_3 = \arctan^{-1}\rho_4;\ \rho_2 = \pi\rho_3 / 2.$$

Раскрытие в вершине трещины, согласно (4), имеет вид

$$\delta(a,a) = LTa\delta_0(1;\rho_i) = LTa\rho_6;\ \rho_6 = -2\rho_3 \ln\cos\rho_3^{-1}. \tag{8}$$

В выражениях (4) и (8) характеристика L , связанная со свойствами материала, определяется следующим образом [7]:

$$L = L(a_{ij}) = 1 / \sqrt{\lambda_{44}\lambda_{55}}, \tag{9}$$

где λ_{ij} – эффективные модули композита с однонаправленными дискретными волокнами. Эти модули приведем для направления оси симметрии вращения, которое совпадает с направлением оси Ox_3 . Для выбранных направлений координатных осей ось симметрии вращения совпадает с направлением оси Ox_2 , но здесь оставим λ_{ij} в форме для оси симметрии вращения вдоль Ox_3 , т.е. в таком виде, как они получены в [8]:

$$\lambda_{44}=\langle\lambda_{44}\rangle+\frac{4c_1c_2\lambda_{44}^{[3]2}K_5}{1-4\lambda'_{44}K_5};\ \lambda_{66}=12\left(\langle\lambda_{11}\rangle-\langle\lambda_{12}\rangle\right)+\frac{c_1c_2\left(\lambda_{11}^{[3]}-\lambda_{12}^{[3]}\right)^2K_2}{1-2(\lambda'_{11}-\lambda'_{12})K_2},$$

где c_1 – объемное содержимое армирования, $c_2=1-c_1$ – наполнителя;

$$\langle\lambda_{ij}\rangle=c_1\lambda_{ij}^{(1)}+c_2\lambda_{ij}^{(2)};\ \lambda_{ij}=c_1\lambda_{ij}^{(2)}+c_2\lambda_{ij}^{(1)}-\lambda_{ij}^{c};\ \lambda_{ij}^{[3]}=\lambda_{ij}^{(2)}-\lambda_{ij}^{(1)};$$

знак $^{(1)}$, как и раньше, отвечает характеристике армирования, $^{(2)}$ – наполнителя;

$$K_2=\lambda_{44}^cE_1+\left(\frac{\lambda_{33}^c}{k^2}-2\lambda_{44}^c\right)E_2-\left(\frac{\lambda_{33}^c}{k^2}-\lambda_{44}^c\right)E_3+F_1-F_2;$$

$$K_5=\lambda_{11}^cE_1-2\left(\lambda_{11}^c+\frac{\lambda_{13}^c}{k^2}\right)E_2+\left(\lambda_{11}^c+\frac{2\lambda_{13}^c}{k^2}+\frac{\lambda_{33}^c}{k^4}\right)E_3+F_2;$$

$$E_n=-\frac{1}{8\lambda_{11}^c\lambda_{44}^c}\int_0^1\frac{x^{2(n-1)}}{\Delta_1(x)}dx;\ F_n=-\frac{1}{8\lambda_{66}^c}\int_0^1\frac{x^{2(n-1)}}{\Delta_2(x)}dx;$$

$$\Delta_1(x)=(1-x^2)^2+\frac{2\overline{p}}{k^2}x^2(1-x^2)+\frac{\overline{q}}{k^4}x^4;\ \Delta_2(x)=1+\left(\frac{\overline{\mu}}{k^2}-1\right)x^2;$$

$$\overline{p}=\frac{\lambda_{11}^c\lambda_{33}^c-\lambda_{13}^c(\lambda_{13}^c+2\lambda_{44}^c)}{2\lambda_{11}^c\lambda_{44}^c};\ \overline{q}=\frac{\lambda_{33}^c}{\lambda_{11}^c};\ \overline{\mu}=\frac{\lambda_{44}^c}{\lambda_{66}^c},$$

где коэффициент k – отношение продольного и поперечного размеров эллипсоида вращения, которым моделируется волокно.

В случае, когда материалы компонент композита являются изотропными ($\lambda^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ – преобразованные характеристики Ламе волокон, $\lambda^{(2)}$ и $\mu^{(2)}$ – наполнителя), имеем:

при $\lambda^{(1)}>\lambda^{(2)}$ –

$$\lambda_{13}^c=\frac{s_1}{\Delta_c};\ \lambda_{11}^c+\lambda_{12}^c=\frac{s_3}{\Delta_c};\ \lambda_{33}^c=\frac{s_4}{\Delta_c};\ \lambda_{44}^c=\lambda_{66}^c=\frac{1}{\langle 1/\mu\rangle};\ \Delta_c=s_3s_4-2s_2^2;$$

$$s_1=\left\langle\frac{\lambda}{\Delta_s}\right\rangle;\ s_3=\left\langle\frac{2(\lambda+\mu)}{\Delta_s}\right\rangle;\ s_4=\left\langle\frac{\lambda+2\mu}{\Delta_s}\right\rangle;\ \Delta_s=2(3\lambda+2\mu)\mu;$$

при $\lambda^{(1)}<\lambda^{(2)}$ –

$$\lambda_{11}^c=\langle\lambda_{11}\rangle;\ \lambda_{12}^c=\langle\lambda_{12}\rangle;\ \lambda_{13}^c=\langle\lambda_{13}\rangle;\ \lambda_{33}^c=\langle\lambda_{33}\rangle;\ \lambda_{44}^c=\langle\lambda_{44}\rangle.$$

В соответствии с принципом упруго-вязкоупругой аналогии [5], заменим зависимые от времени характеристики релаксации $E^{(i)}(t)$ соответствующими преобразованными величинами $\tilde{E}^{(i)}(s)$ (согласно (3)), предварительно переписав характеристики Ламе через модуль упругости E, который используется для описания наследственных характеристик материалов компонент композита, и коэффициент Пуассона ν; примем объемную деформацию упругой, что позволит записать коэффициенты Пуассона материалов компонент в виде

$$\tilde{\nu}^{(i)}=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-2\nu_0^{(i)}\right)\frac{\tilde{E}^{(i)}}{E_0^{(i)}}\right].$$

Подставляя преобразованные величины $\tilde{\lambda}_{ij}$ в агрегат (9), получаем $\tilde{L}$ в области преобразования. Агрегат L как функцию времени определим с помощью обратного преобразования Лапласа

$$L(t) = L^{-1}\left\{\tilde{L}/s\right\}. \tag{10}$$

С помощью результатов работы [15] получим $L(t)$ в форме

$$L'(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{z_k t}, \quad t_j \le t \le \Lambda t_j \tag{11}$$

$$\left(\gamma_k = -\frac{h}{2\pi i}\left(\tilde{L}(z_k)/z_k\right)z'_k \;\; z_k = T(x_k);\; T(x) = \lambda[1-\sin(\alpha + ix)];\right.$$

$$z'_k = T'_x(x_k);\; x_k = h\cdot k;\; k = -n, \dots, n; \tag{12}$$

$$\left.\lambda = \frac{2\pi dn(1-\vartheta)}{t_0 \Lambda a_s(\vartheta)};\; h = \frac{a_s}{n};\; a_s(\vartheta) = \operatorname{arch}\left(\lambda s(1-\vartheta)\sin\alpha\right)\right),$$

где параметры a и d удовлетворяют дополнительному условию, а $0 < s < 1$, $0 < \vartheta < 1$. Отметим также, что параметр Λ принимает значение порядка 10 и соответствующий ему интервал мал по сравнению с промежутками интегрирования в интегралах в уравнениях докритического роста трещины (см. п. 3). Поэтому возникает необходимость разбить упомянутый промежуток интегрирования и получить решение в виде (11) на каждом из интервалов.

Для определения вязкоупругого раскрытия необходима производная от $L(t)$, которую определим как $L'(t) = L^{-1}\left\{\tilde{L} - \tilde{L}_\infty\right\}$. Коэффициенты представления этой функции можно получить аналогично тому, как это было определено для (10).

Процесс докритического стабильного роста трещины продольного сдвига (как и для трещины нормального отрыва) условно разделим на три периода [3]: инкубационный, переходной и основной. Исходя из принципа Вольтерра и соотношений для определения упругого сдвига берегов трещины (4) и (8), запишем выражение для вязкоупругого раскрытия трещины в точке $x_1 = a(t)$ в зависимости от ее положения на линии продолжения трещины.

1. При $x_1 = a_0$ (a_0 – начальный полуразмер трещины) имеем раскрытие для инкубационного периода, во время которого наблюдается сдвиг берегов трещины без ее роста

$$\Delta(t) = L_0 T a_0 \delta_0(1;\rho_i) + \int_0^t L'(t-\tau) T a_0 \delta_0(1;\rho_i)\, d\tau$$

или

$$\Delta(t) = L(t) T a_0 \delta_0(1;\rho_i) \tag{13}$$

– в случае отсутствия зависимости интенсивности внешней нагрузки от времени.

2. При $a_0 < x_1 a_0 + d_0$ (d_0 – начальный размер зоны предразрушения) имеем раскрытие для переходного периода

$$\Delta(t) = L_0 T a(t) \delta_0(1;\rho_i) + \int_0^{t_0} L'(t-\tau) T a_0 \delta_0(a(t)/a_0;\rho_i)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} L'(t-\tau) T a(\tau) \delta_0\left(a(t)/a(\tau);\rho_i\right) d\tau,$$

где t_0 – продолжительность инкубационного периода (см. ниже); за время этого периода трещина стартует и проходит расстояние, которое равняется длине ее начальной зоны предразрушения. Первое слагаемое в выражении является мгновенным значением раскрытия в вершине трещины, второе – раскрытием в точке $x_1 = a(t)$ трещины размера a_0, которое получено на протяжении инкубационного периода, третье – раскрытием в точке $x_1 = a(t)$ трещины размера $a(\tau)$, которое получено на протяжении текущего периода. В случае отсутствия зависимости интенсивности внешней нагрузки получим выражение для раскрытия в следующем виде:

$$\Delta(t) = T\Bigg[L_0 a(t)\delta_0(1;\rho_i) + \left[L(t) - L(t-t_0)\right] a_0 \delta_0(a(t)/a_0;\rho_i) + \\ + \int_{t_0}^{t} L'(t-\tau)a(\tau)\delta_0\left[a(t)/a(\tau);\rho_i\right]d\tau\Bigg]. \tag{14}$$

3. При $x_1 > a_0 + d_0$ имеем раскрытие для основного периода

$$\Delta(t) = L_0 T a(t)\delta_0(1;\rho_i) + \int_{t'}^{t} L'(t-\tau)Ta(\tau)\delta_0(a(t)/a(\tau);\rho_i)d\tau, \tag{15}$$

где t' определяется из уравнения $a(t) - a(t') = d(t)$; за время этого периода трещина медленно подрастает до своего критического размера, после чего начинается ее динамическое развитие.

В рамках концепции $\tau = \text{const}$ величины ρ_i в выражениях (13) – (15) являются постоянными и зависят только от относительного параметра трещиностойкости ρ_2. В рамках концепции $d = \text{const}$ эти величины, согласно (6), зависят от величины d/a, которая не является постоянной во время роста трещины. Итак, в первых слагаемых выражений (14) и (15) будут ρ_i зависеть от $a(t)$, а в третьем слагаемом выражения (14) и во втором выражении (15) – от $a(\tau)$ (по переменной τ выполняется интегрирование).

3. Развитие трещины.

Для построения уравнений докритического развития трещины продольного сдвига в рамках обеих использованных концепций, запишем параметр критического раскрытия, который содержится в исходном уравнении (1), в виде

$$\delta_{\text{III}*} = L_0 T a_* \delta_0(1;\rho_i), \tag{16}$$

где ρ_i зависят от a_* при использовании концепции $d = \text{const}$.

Также введем обозначение

$$\zeta(\xi,\eta) = \eta\delta_0(\xi/\eta;\rho_i); \quad \zeta(\eta) = \zeta(\eta,\eta), \tag{17}$$

где $\eta = a/a_0$ – безразмерная длина трещины. При использовании концепции $d = \text{const}$ величины ρ_i зависят от η, когда эта величина превышает единицу.

Определяющие уравнения докритического роста трещины продольного сдвига получим на основании подхода, изложенного в [2, 3, 13], исходя из критерия разрушения (1), вязкоупругого сдвига берегов трещины (13) – (15). Для трех периодов развития трещины, учитывая (16) и (17), получаем:

$$\zeta_1 L_1(t_0) = \zeta_*, \tag{18}$$

$$\zeta[\eta(t)] + \zeta(\eta(t),1)[L(t) - L(t-t_0)] + \int_{t_0}^{t} L'_1(t-\tau)\zeta[\eta(t),\eta(\tau)]d\tau = \zeta_*, \tag{19}$$

$$\zeta[\eta(t)] + \int_{t'}^{t} L'_1(t-\tau)\zeta[\eta(t),\eta(\tau)]d\tau = \zeta_* \tag{20}$$

на каждом из отмеченных этапов, соответственно. В уравнениях (18) – (20) $\eta(t) = a(t)/a_0$ – относительный размер трещины, $L_1(t) = L(t)/L_0$, $\zeta_* = \zeta(\eta_*)$, $\eta_* = a_*/a_0$. В уравнении (20) величина t' определяется из уравнения

$$\eta(t) - \eta(t') = d(t)/a_0 \quad \text{или} \quad \eta(t') = (1-\rho_1)\eta(t), \tag{21}$$

если задачу решаем в рамках концепции постоянства напряжений в зоне предразрушения, и уравнения

$$\eta(t) - \eta(t') = \rho, \tag{22}$$

если задачу решаем в рамках концепции постоянства длины зоны предразрушения.

Решая последовательно уравнения (18) – (20), можно исследовать кинетику развития трещины сдвига, а также определить долговечность вязкоупругого композита с трещиной.

4. Численные решения и обсуждение результатов.

Зафиксируем характеристики материала наполнителя и введем коэффициенты, которые характеризуют взаимное расположение зависимостей от времени для модулей материалов армирования и наполнителя (согласно модельному представлению (3))

$$k_E = \lg\frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(2)}};\ k_\beta = -\frac{1}{\alpha}\lg\frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}};\ k_1 = \lg\frac{E_0^{(1)}}{E_\infty^{(1)}}. \tag{23}$$

Первый из коэффициентов определяет соотношение между мгновенным модулем Юнга двух материалов, второй – отношение мгновенного и долговременного модулей Юнга для материала армирования, третий – сдвиг в положительном направлении оси времени кривой, которая описывает изменение во времени модуля материала армирования относительно зависимости изменения во времени модуля материала наполнителя.

Разобьем отрезок на продолжении трещины от точки a_0 до точки a_* на N отрезков Δa_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда уравнения (18) – (20) могут быть использованы для определения времени прохождения трещиной K-го узла разбивки

$$\eta(t_K) = \eta_K = 1 + \sum_{i=1}^{N}\Delta\eta_i; \quad \Delta\eta_i = \Delta a_i / a_0;$$

в пределах каждого из них будем строить решение в форме показательной функции

$$\eta(t) = \eta_{K-1}(\eta_K/\eta_{K-1})^{(t-t_{K-1})/\Delta t_K};\ \Delta t_K = t_K - t_{K-1}, \tag{24}$$

которая удовлетворяет условиям $\eta(t_{K-1}) = \eta_{K-1}$, $\eta(t_K) = \eta_K$.

Продолжительность инкубационного периода t_0 определим из уравнения (18). Моменты времени прохождения K-го узла разбивки определяем из уравнений:

$$\zeta(\eta_K) + \zeta(\eta_K,1)[L(t_K) - L(t_K - t_0)] + \int_0^{t_K - t_0} L'_1(\theta)\zeta[\eta_K,\eta(t_K-\theta)]d\theta = \zeta_*, \tag{25}$$

если $1 < \eta_K \le 1 + \rho_1$ ($\tau = \text{const}$) или $1 < \eta_K \le 1 + \rho$ ($d = \text{const}$);

$$\zeta(\eta_K) + \int_0^{t_K - t'} L'_1(\theta)\zeta[\eta_K,\eta(t_K-\theta)]d\theta = \zeta_*, \tag{26}$$

если $\eta_K > 1 + \rho_1$ ($\tau = \text{const}$) или $\eta_K > 1 + \rho$ ($d = \text{const}$); $\eta(t_K - \theta)$ определяется согласно (24); согласно (21), (22) и (24) определим

$$t' = t_K - t_{I-1} - \frac{\ln(\eta' / \eta_{I-1})}{\ln(\eta_I / \eta_{I-1})} \Delta t_I ,$$

где I удовлетворяет условию $\eta_{I-1} \le \eta' \le \eta_I$, $\eta' = (1-\rho_1)\eta_K$ ($\tau = \text{const}$) или $\eta' = \eta_K - \rho$ ($d = \text{const}$).

Исходя из того, что для исследованного класса задач наблюдается увеличение ускорения при приближении этапа нестабильного роста трещины, выполним разбивку отрезка $[1, \eta_*]$ с возрастающими $\Delta\eta_K$, например, полагая длину каждого следующего отрезка разбивки в q раз большей длины предыдущего, т.е.

$$\eta_K = 1 + (\eta_* - 1)(q^K - 1)/(q^N - 1) \quad (K = 0, 1, \dots, N). \tag{27}$$

Отметим, что если M удовлетворяет равенству $\eta_M = 1 + \rho_1$ ($\tau = \text{const}$) или $\eta_M = 1 + \rho$ ($d = \text{const}$), то время $t_I = t_M - t_0$ является продолжительностью переходного периода, время $t_{II} = t_N - t_M$ – продолжительностью основного периода. Долговечность определяется величиной t_N.

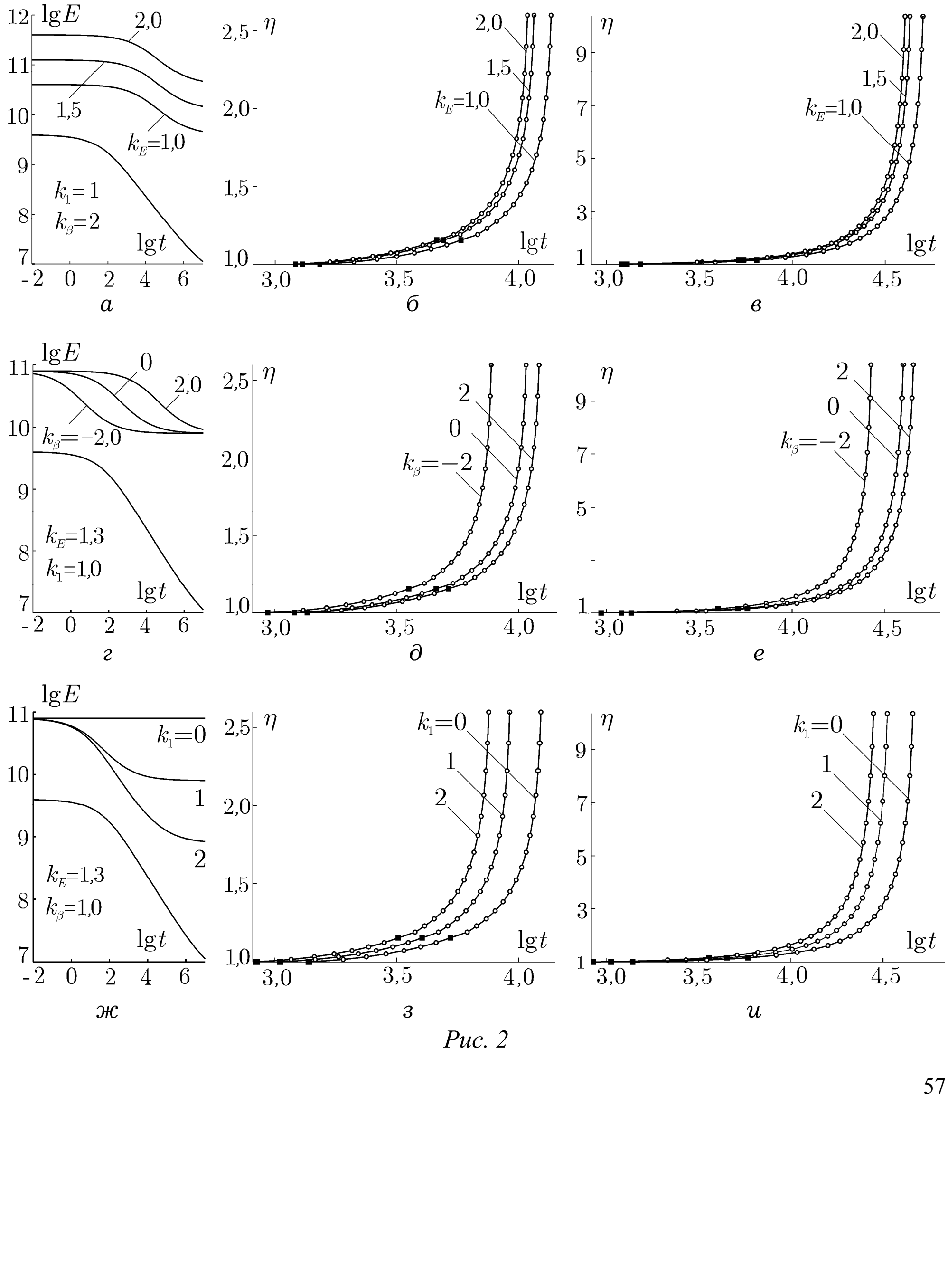


Рис. 2

На рис. 2, *а* представлено взаимное расположение кривых релаксации материала волокон и кривой релаксации наполнителя (нижняя кривая) для указанных значений k_E и фиксированных k_1 и k_β. Соответствующие кинетические диаграммы роста трещины в композитном теле в рамках концепции $\tau = \text{const}$ представлены на рис. 2, *б*.

На рис. 2, *в* представлены кинетические кривые для случая использования концепции $d = \text{const}$ для композита, релаксационные свойства компонент которого приведены на рис. 2, *а*.

Кинетические кривые, позволяющие оценить влияние на характер разрушения параметра k_β, для параметров, значения которых указаны на рис. 2, *г*, представлены на рис. 2, *д* (концепция $\tau = \text{const}$) и рис. 2, *е* (концепция $d = \text{const}$). Кинетические кривые, позволяющие оценить влияние на характер разрушения параметра k_1, для параметров, значения которых указаны на рис. 2, *ж*, представлены на рис. 2, *з* (концепция $\tau = \text{const}$) и рис. 2, *и* (концепция $d = \text{const}$).

Диаграммы получены на основании решения уравнений (18), (25) (26) при следующих значениях параметров задачи: $k = 10$, $c_1 = 0,33$ (параметры формы и концентрации элементов армирования); $\alpha = 0,5$ (параметр функции Миттаг-Леффлера); $\nu_0^{(1)} = 0,3$ (мгновенный коэффициент Пуассона материала элементов армирования); $E_0^{(2)} = 4 \cdot 10^9$ Па, $\nu_0^{(2)} = 0,35$ (мгновенные характеристики наполнителя), $\beta^{(2)} = 0,1$ сек$^{-\alpha}$ (реологический параметр наполнителя); $\eta_* = 5$, $\rho_2 = 3$ (параметры трещиностойкости). Другие реологические параметры определяются при помощи введенных в (23) коэффициентов, значение которых представлено на рисунке. Приведем также параметры для реализации обратного преобразования Лапласа согласно выражениям (11) и (12): $d = 0,7$, $\alpha = 0,8$, $n = 35$, $\Lambda = 5$, $\theta = 0,8$, $s = 0,5$. Таким образом, на каждом интервале изменения времени $[t_j, \Lambda t_j]$ мы получаем ядро в виде линейной комбинации 71 экспонент.

Разбивка интервала $[1, \eta_*]$ выполнена согласно к (27), причем параметр q выбран следующим образом: принимая q_0 незначительно большим единицы, вычисляем количество интервалов переходного периода как наименьшее натуральное число M большее M_0 – корня уравнения

$$1 + (q^{M_0} - 1)/(q^N - 1)(\eta_* - 1) = 1 + \rho_1; \tag{28}$$

дальше параметр q определен как корень уравнения (28) (с параметром M вместо M_0), ближайший к q_0. Такое построение позволяет сохранить разбивку в виде геометрической прогрессии, без добавления отдельного узла в точку $1 + \rho_1$.

Количество интервалов в расчетах $N = 30$. Причем на рисунке показаны лишь части кинетических кривых для $\eta < 2,6 < 5 = \eta_*$ (на отсутствующей части существенно возрастает скорость распространения трещины).

Заполненные квадратики на каждой из кинетических кривых соответствуют продолжительности инкубационного периода и времени окончания переходного периода.

При расчетах, результаты которых приведены на рис. 2(*в, е, и)* сохранены все исходные параметры, кроме параметра η_*, который выбран таким образом, чтобы во время инкубационного периода параметр ρ_2 представлял такую же величину, которая была выбрана при исследовании в рамках концепции $\tau = \text{const}$; согласно (7) параметр $\rho = \cos^{-1}(\pi / 2\rho_2) - 1$; параметр M выбран как и при использовании концепции $\tau = \text{const}$, когда в выражении (28) вместо ρ_1 принято ρ.

Характер кинетических диаграмм развития трещины продольного сдвига качественно отвечает аналогичным диаграммам для трещины нормального отрыва, полученным в работах [2 – 4]. Близость долговечностей для разных значений одного из параметров k_E, k_1 и k_β и фиксированных других обусловлена соответствующими расхождениями между кривыми релаксации материала волокон на временном промежутке, в котором получено решение уравнений докритического развития трещины.

Изучение кривых на рис. 2 показывает, что использование модели с постоянной длиной зоны предразрушения приводит к получению больших значений долговечности, чем использование модели с постоянным напряжением в зоне предразрушения. Следовательно, если с помощью проведенных исследований не удается определить, которой из моделей следует отдать предпочтение при прогнозировании развития трещин в том или ином композитном материале, тогда оценку долговечности следует выполнять по результатам исследования с использованием модели постоянного напряжения в зоне предразрушения.

Р Е З Ю М Е . В рамках нелінійної механіки руйнування отримано рівняння розвитку тріщини поздовжнього зсуву в композитному матеріалі, компоненти якого мають лінійно-в’язкопружні властивості. Дослідження проведено на основі двох моделей механізму розвитку тріщини: моделі сталості довжини зони передруйнування та моделі сталості напружень у цій зоні. Створену схему розв’язання задачі застосовано для побудови числового розв’язку у формі кінетичних кривих розвитку тріщини. Наведено аналіз отриманих результатів.

1. *Ву Э.* Прочность и разрушение композитов (Композиционные материалы, т. 5 – Разрушение и усталость, под. ред. Браутман Л.). – М.: Мир, 1978. – 484 с.
2. *Гузь А.Н, Каминский А.А. Назаренко В.М.* Механика разрушения. – К.: Наук. думка, 1996. – 340с. – (Механика композитов: в 12-ти т.; т. 5).
3. *Каминский А.А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с.
4. *Каминский А.А., Гаврилов Д.А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.
5. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
6. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
7. *Серенсен С.В., Зайцев Г.П.* Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 295 с.
8. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: в 12 т.; т. 3).
9. *Alex R., Schovanec L.* An anti-plane crack in a nonhomogeneous viscoelastic body // Engng Fract. Mech. – 1996. – **1**, N 5 – P. 727 – 735.
10. *Herrmann J.M., Schovanec L.* Quasi-static mode III fracture in a nonhomogeneous viscoelastic body // Acta Mech. – 1990. – **85**, N 3 – 4. – P. 235 – 249.
11. *Kaminsky A.A., Chernoivan Yu.A.* On certain numerical-analytical method of solving the boundary problems of linear theory of viscoelasticity of anisotropic body // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 509 – 517.
12. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Growth of a penny-shaped crack with a nonsmall fracture process zone in a composite // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 8. – P. 866 – 871.
13. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Determination and analysis of the effective relaxation properties of a composite with viscoelastic components // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 1. – P. 18 – 27.
14. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Mode II macrocrack initiation in orthotropic composite viscoelastic plate // Int. J. Fract. – 2006. – **139**, N 1. – P. 153 – 160.
15. *López –Fernández M., Palencia C., Schädle A.* A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms // SIAM J. Numer. Anal. – 2006 – **44**, N 3, P. 1332 – 1350.
16. *Selivanov M.F.* On the effective properties of linear viscoelastic composite // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1139 – 1146.

Поступила 11.11.2010 Утверждена в печать 22.11.2012