

Л. А. Ковальчук

## Моделирование динамики статистических распределений температуры воздуха посредством процесса Орнштейна–Уленбека и уравнения Фоккера–Планка

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. И. Осадчим)

*На основе анализа ежедневных аномалий температуры воздуха в Киеве за прошедшее столетие установлено, что экстремальная положительная аномалия естественным путем может достигнуть  $+15,13$  °C, превысив на  $1^\circ$  наблюдавшийся максимум. Климатический процесс был стабилен и не подвергался антропогенным деформациям. Предложена стохастическая модель динамики аномалий температуры воздуха, в основу которой положены “винеровские блуждания”, удерживаемые в естественных климатических границах процессом Орнштейна–Уленбека.*

**Состояние проблемы.** Экспертами дано определение климатической системы, как совокупности взаимодействующих между собой атмосферы, гидросферы, биосферы, литосферы и криосферы, а также дано определение климата, как статистического ансамбля состояний его характеристик. Однако нет определения климатического процесса, хотя такое выражение широко применяется в практике. Наша цель — обосновать возможность моделирования климатического процесса на основе теории случайных процессов [1]. В частности, посредством решения уравнения Фоккера–Планка процесса Орнштейна–Уленбека [2].

**Материал и методика.** В основу исследования положены ежедневные значения температуры воздуха в Киеве с 1900 по 2009 гг., полученные Гидрометеорологической службой Украины по результатам стандартных наблюдений, которые были очищены от детерминированной составляющей: годового хода. Из ежедневных значений температуры воздуха вычитались среднеголетние значения температуры соответствующего дня, т. е. значения медианы.

Нами климатический процесс определен, по аналогии со случайным процессом, как многомерная функция распределения вероятностей его характеристик. Рабочая гипотеза заключается в следующем: климатический процесс последнего столетия был стабилен и не подвергался антропогенным деформациям; динамику его аномалий можно описать процессом “винеровских блужданий”, удерживаемых в естественных климатических границах процессом Орнштейна–Уленбека. Проверка рабочей гипотезы потребовала: 1) обосновать естественность потепления второй половины века, т. е. определить естественный экстремальный максимум положительных аномалий; 2) минимизировать погрешности моделирования асимметричного климатического процесса посредством симметричного процесса Орнштейна–Уленбека, верифицировать результаты моделирования.

Естественный экстремальный максимум определен на основе функции распределения вероятностей (интеграла вероятностей) ежедневных аномалий температуры воздуха с 1900

по 2009 г. Сначала была определена вероятность наблюдаемого исторического экстремального минимума аномалий температуры, затем, соответственно полученной вероятности было вычислено значение естественного экстремального максимума аномалий температуры.

Погрешности моделирования минимизировались управляющими параметрами процесса Орнштейна–Уленбека и процедурой интегрирования при вычислении функции распределения вероятностей. Адекватность процесса Орнштейна–Уленбека определена по его способности долгосрочного “прогнозирования” среднегодовых и среднемесячных аномалий температуры воздуха в рамках их естественных климатических “коридоров” при наличии асимметрии распределения.

Закон статистического распределения ежедневных аномалий температуры воздуха ( $\Delta T$  °C) идентифицирован при помощи модели экспоненциального распределения [2], модифицированного для асимметричного случая:

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)} \exp\left(-\left|\frac{x-m}{\lambda\sigma}\right|^\alpha\right), \quad (1)$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$ ,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция;  $m = 0$  – центр распределения  $\Delta T$ ;  $\sigma = \sigma_{\Delta T < 0}$ ,  $\sigma_{\Delta T > 0}$  – стандартные отклонения,  $\alpha = \alpha_{\Delta T < 0}$ ,  $\alpha_{\Delta T > 0}$  – некоторые характеристики распределения, которые однозначно определяют параметр формы экспоненциальных распределений – эксцесс  $\varepsilon = \varepsilon_{\Delta T < 0}$ ,  $\varepsilon_{\Delta T > 0}$ :

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(5/\alpha)}{(\Gamma(3/\alpha))^2}. \quad (2)$$

В связи с тем что предполагаемая вероятность исторического минимума ежедневных аномалий температуры за 110-летний период может оказаться ниже  $10^{-6}$ , погрешность идентифицируемой функции распределения вероятностей (интеграла вероятностей) аномалий температуры не должна быть  $>10^{-10}$ , а достоверность критерия согласия ( $\chi^2$ ) должна быть выше 99,9999999999%.

Большинство суждений о динамике климата основаны на анализе многолетних вариаций средних аномалий температуры. Учитывая, что вероятностное пространство климатической системы ограничено, а статистические распределения многих гидрометеорологических характеристик относятся к семейству экспоненциальных, моделирование климатического процесса значительно упрощается благодаря процессу Орнштейна–Уленбека:

$$dx = -\beta(x - \xi)dt + \sigma\delta W, \quad (3)$$

где  $x$  – среднее значение месячной аномалии температуры воздуха ( $\mu_{\Delta T}$ );  $\beta$  – коэффициент “притяжения”;  $\xi$  – равновесный уровень “притяжения”;  $t$  – время;  $\sigma$  – стандартное отклонение ( $\sigma_{\mu_{\Delta T}}$ );  $W(t)$  – бесконечно малый винеровский “шум”.

$$\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}, \quad \varepsilon \sim N(0, 1). \quad (4)$$

Параметры  $\beta$  и  $\xi$  определялись на основе результатов наблюдений:

$$\beta = \frac{\sigma_{\mu_{\Delta T}}^2}{2R_{\mu_{\Delta T}}^2}, \quad (5)$$

здесь  $R$  — размах колебаний  $\mu_{\Delta T}$  (“коридор”);

$$\xi = \frac{\mu_{(\Delta T)k}}{\mu_{(\Delta T)h}}, \quad (6)$$

здесь  $k + h = s$  — период наблюдений.

Плотность вероятности перехода  $p(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$  аномалий температуры воздуха  $\Delta T$ , например, из экстремально теплого состояния в экстремально холодное состояние, оценивалась согласно решению Фоккера–Планка процесса Орнштейна–Уленбека, которое реализовано посредством формул, удобных для вычислений [3]:

$$p(x_0, t_0 \Rightarrow x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t, t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[x - \bar{x}(t, t_0)]^2}{D(t, t_0)} \right\}, \quad (7)$$

где  $x$  — ежедневные аномалии температуры воздуха ( $\Delta T$ ),

$$\bar{x}(t, t_0) = \xi + (x_0 - \xi)e^{-\beta(t-t_0)}, \quad (8)$$

$$D(t, t_0) = \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-t_0)}). \quad (9)$$

Параметры  $\xi$  и  $\beta$  определялись на основе результатов наблюдений:

$$\xi = \frac{\bar{x}_{(\Delta T)k}}{\bar{x}_{(\Delta T)h}}, \quad (10)$$

здесь  $k + h = s$  — период наблюдений;

$$\beta = \frac{\sigma^2}{2R^2}, \quad (11)$$

где  $\sigma$  — стандартное отклонение  $\Delta T$ ;  $R$  — размах колебаний  $\Delta T$  (“коридор”).

На основе полученных плотностей вероятностей перехода  $p(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$  при помощи интеграла вероятностей были вычислены вероятности перехода  $P(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$ .

**Обсуждение результатов исследований.** Функция вероятностей аномалий температуры воздуха идентифицирована с погрешностью  $10^{-13}$ , критерий согласия  $\chi^2 = 80,75$  при 86 степенях свободы имеет достоверность более 99,99999999999999%. Вычисленная вероятность экстремального исторического минимума аномалий температуры  $-25,55$  °C была равной 0,0000078. Вычисленный естественный максимум аномалий температуры воздуха, соответствующий вероятности 0,0000078, оказался равным  $+15,13$  °C, тогда как исторический максимум не превысил  $+14,15$  °C. Следовательно, естественным путем, без антропогенного воздействия, экстремальная аномалия температуры воздуха может достигнуть  $+15,13$  °C.

Адекватность процесса Орнштейна–Уленбека асимметричному климатическому процессу достигнута при помощи  $\xi$  — равновесного уровня “притяжения” (8). Установлено, что процесс Орнштейна–Уленбека адекватно моделирует, не выходя за границы размаха, возможные реализации как средних годовых, так и средне январских, и средне июльских аномалий температуры воздуха. Однако сами “блуждающие” траектории, в силу бесконечной малости винеровского “шума” (2), не следует рассматривать в качестве конкретных будущих реализаций средних аномалий температуры, так как они сами являются совокупностями множества реализаций. В случае “прогноза” средних годовых аномалий температуры на

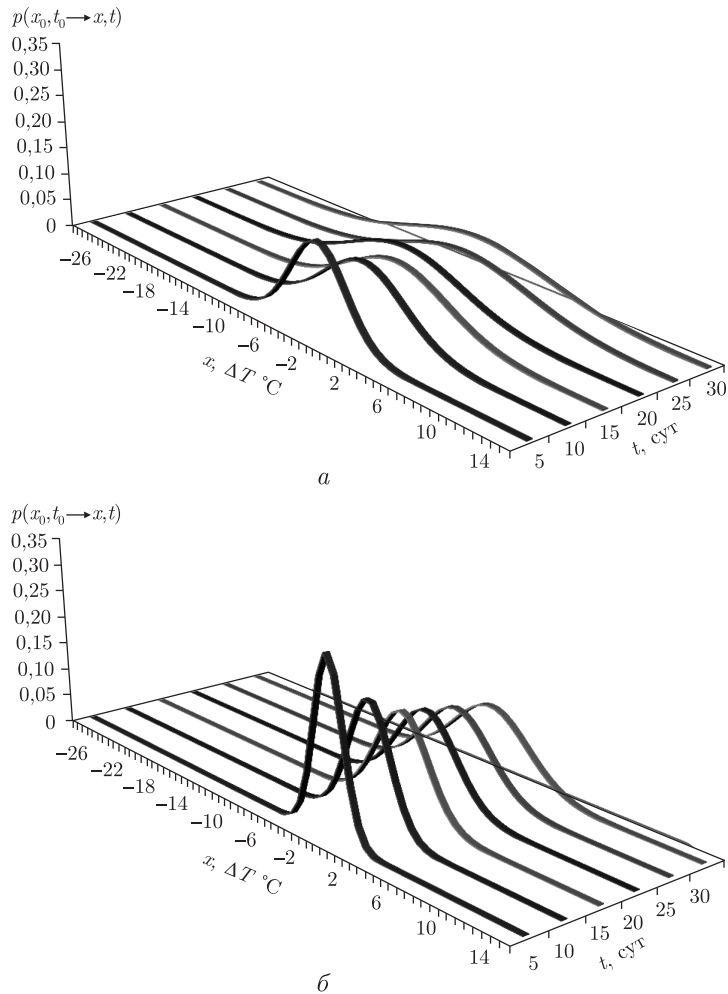


Рис. 1. Плотность вероятности перехода  $p(x_0, t_0 \rightarrow x, t)$  аномалий температуры воздуха  $\Delta T$  °С по суткам в январе (а) и июле (б)

несколько лет вперед при  $\Delta t = 5$  сут в течение первых двух лет реализации не выходили за пределы  $\pm 1$  °С, но, выполняя тот же “прогноз” при  $\Delta t = 4$  ч, реализации приблизились бы к своим границам значительно раньше. Подтверждение тому “прогноз” средне январских аномалий температуры на несколько месяцев вперед при  $\Delta t = 4$  ч, когда уже через месяц-полтора реализации колебались в пределах  $\pm 4$  °С, а также “прогноз” средне июльских аномалий температуры при  $\Delta t = 4$  ч, когда уже через декаду реализации достигли нижней границы “коридора” — 3 °С.

Блуждание “прогнозных” средне январских или средне июльских аномалий температуры воздуха отражалось на вероятностях перехода от текущего значения средней аномалии к своему возможному значению, что проявилось в плавно искривленных по координате времени траекториях максимума плотности вероятности перехода  $p(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$  (рис. 1). Существенные различия в форме январских и июльских кривых плотностей вероятностей перехода обусловлены превышением в 3,5 раза январской дисперсии над июльской дисперсией аномалий температуры воздуха. Именно рост дисперсии с увеличением заблаговременности “прогноза” приводит к “расползанию” области возможных реализаций аномалий

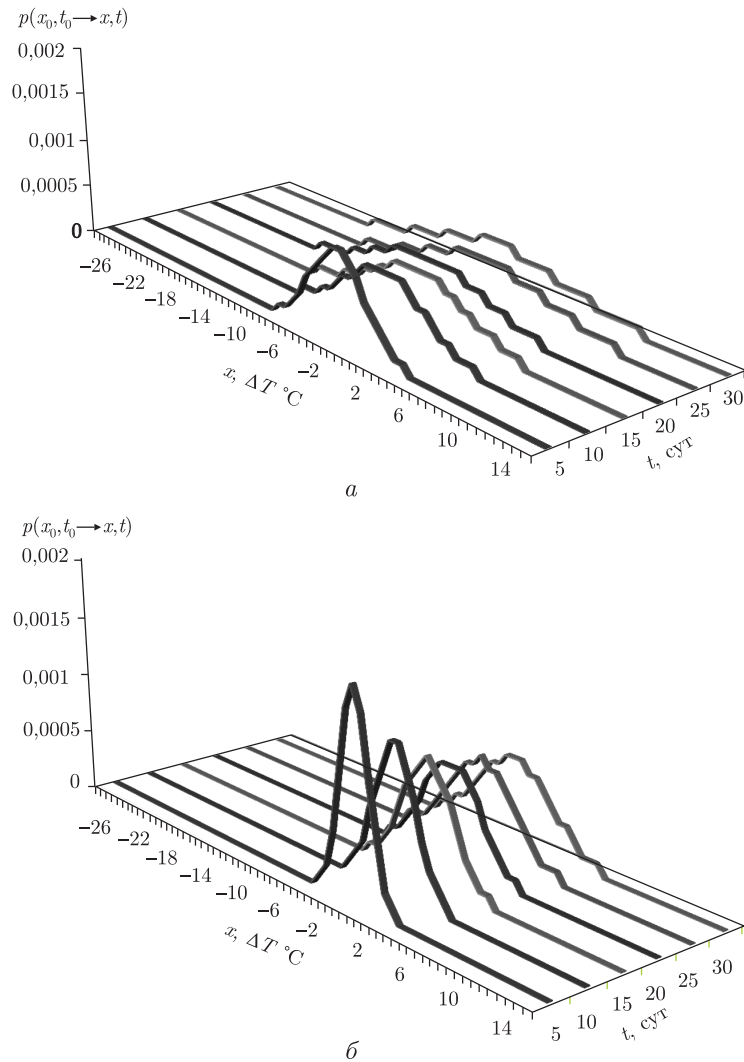


Рис. 2. Вероятности перехода  $p(x_0, t_0 \rightarrow x, t)$  аномалий температуры воздуха  $\Delta T$  °С по суткам в январе (а) и июле (б).

Волнистость перехода  $p(x_0, t_0 \rightarrow x, t)$  обусловлена “не идеальной гладкостью”  $p(x_0, t_0 \rightarrow x, t)$

температуры воздуха, т. е. неопределенности. Если в январе на 5-е сут диапазон неопределенности распространялся от  $-8$  до  $+5$  °С, то на 30-е сут неопределенность охватывала уже от  $-15$  до  $+10$  °С, что привело к уменьшению максимума плотности вероятности перехода за тот же период в 2,1 раза от 0,15 до 0,07. В июле на 5-е сут неопределенность находилась в пределах от  $-4$  до  $+3$  °С, а на 30-е сут — от  $-8$  до  $+7$  °С, при этом максимум плотности вероятности перехода уменьшился от 0,30 до 0,11. Следовательно, более интенсивный рост дисперсии вероятности перехода, т. е. неопределенности, относительно изменчивости средних аномалий температуры объясняет непредсказуемость далее 5-ти сут абсолютных значений аномалий температуры.

Зависимость вероятности перехода  $P(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$  от дисперсии оказалась подобной зависимости от нее плотности вероятности перехода  $p(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$ . В январе, вероятность сохранения средней аномалии температуры на 5-е сут оказалась равной 0,0009, что на по-

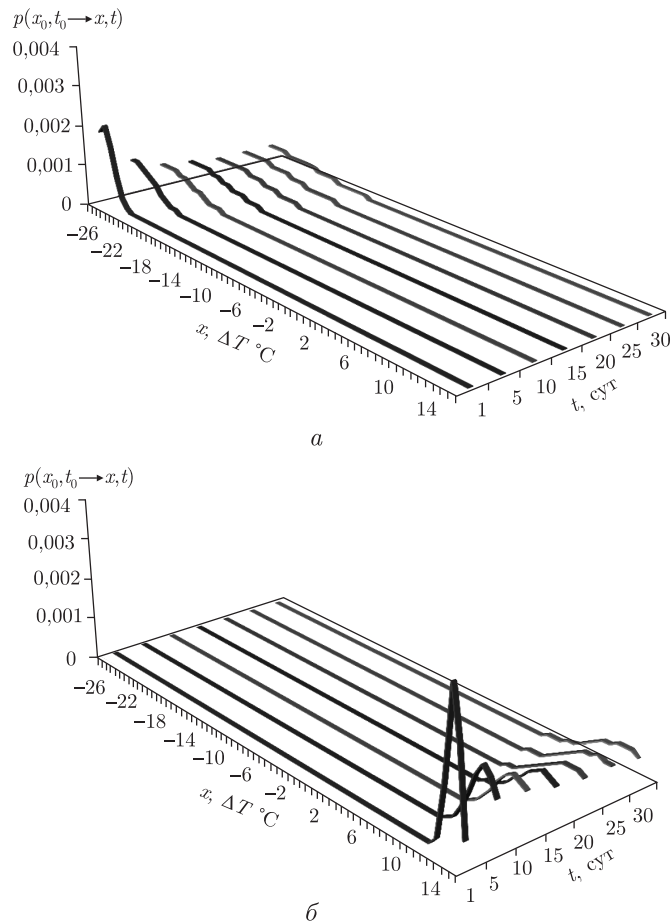


Рис. 3. Вероятность перехода  $p(x_0, t_0 \rightarrow x, t)$  экстремальных аномалий температуры воздуха  $\Delta T$  °С по суткам в январе (а) и июле (б)

рядок выше вероятности перехода температуры в диапазон около  $-7$  °С или вблизи  $+5$  °С (рис. 2, а). На 10-е сут вероятность “самосохранения” средней аномалии температуры понизилась до 0,0006, а крайние границы возможного, хотя и маловероятного (0,0001) перехода расширились от  $-8$  до  $+7$  °С. На 30-е сут вероятность наблюдения средне многолетней аномалии температуры составляла всего лишь 0,0004, тогда как диапазон возможного ее перехода расширился от  $-14$  до  $+10$  °С. Напротив, в июле, вероятность сохранения средней аномалии на 5-е сут была близкой 0,0017 при диапазоне возможных переходов от  $-3$  до  $+3$  °С (см. б на рис. 2). На 10-е сут вероятность “самосохранения” июльской средней аномалии понизилась до 0,0012, а на 30-е сут — до 0,0006 при диапазоне вероятных переходов от  $-8$  до  $+6$  °С. Следовательно, в январе “стохастическая память самосохранения” средней аномалии температуры воздуха в два раза ниже, чем в июле, ввиду более стремительного роста январской дисперсии.

“Стохастическая способность самосохранения” как январского минимума  $-25,55$  °С, так и июльского максимума  $+14,15$  °С оказалась похожей. Для январского минимума вероятность “самосохранения” составляла на первые сутки — 0,002, на пятые — 0,0009, на десятые — 0,0006, на тридцатые — 0,0004; для июльского максимума — на первые сутки — 0,0037, на пятые — 0,0017, на десятые — 0,0012, на тридцатые — 0,0007 (рис. 3). У январ-

ского минимума аномалий температуры, принятого нами в качестве предельного, переход возможен только в диапазоны более высоких температур (см. *а* на рис. 3). В связи с тем, что возможный экстремум положительных аномалий температуры воздуха  $+15,13\text{ }^{\circ}\text{C}$  еще не реализован, то переход от наблюдаемого максимума  $+14,15\text{ }^{\circ}\text{C}$  возможен как в диапазон более высоких температур, так и в диапазон более низких температур. При этом вероятность перехода в диапазон возможного температурного экстремума составляла на первые сутки — 0,0005, на пятые — 0,0011, на десятые — 0,001, на тридцатые — 0,0006. Диапазоны вероятных переходов январского минимума и июльского максимума хоть и зеркальные по форме, но существенно различаются по величине: на тридцатые сутки для минимума диапазон простирался от  $-25$  до  $-13\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а для максимума от  $+15$  до  $+6\text{ }^{\circ}\text{C}$  (см. *б* на рис. 3), что согласуется с известной изменчивостью температурных аномалий воздуха в январе и относительной устойчивостью их в июле.

Таким образом, климатический процесс на протяжении прошедшего века был стабилен, что позволило моделирование его посредством решения уравнения Фоккера–Планка процесса Орнштейна–Уленбека; доминирующим при этом полагался процесс “винеровских блужданий”, которые удерживались в рамках естественных климатических изменений за счет механизмов процесса Орнштейна–Уленбека.

1. Гизман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. – Москва, Наука, 1971. – 664 с.
2. Степанов С. С. Стохастический мир. – <http://synset.com>.
3. Булашев С. В. Статистика для трейдеров. – Москва: Компания Спутник+, 2003. – 245 с.

Украинский гидрометеорологический институт  
ГСЧС Украины и НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 31.10.2013

**Л. А. Ковальчук**

### **Моделювання динаміки статистичних розподілів температури повітря за допомогою процесу Орнштейна–Уленбека та рівняння Фоккера–Планка**

*На основі аналізу щоденних аномалій температури повітря в Києві за минуле століття встановлено, що екстремальна додатна аномалія природним шляхом може досягнути  $+15,13\text{ }^{\circ}\text{C}$ , перевершивши на  $1^{\circ}$  спостережений максимум. Кліматичний процес був стабільний і не зазнавав антропогенних деформацій. Запропонована стохастична модель динаміки аномалій температури повітря, в основу котрої покладено “вінеровські блукання”, які утримувалися в природних кліматичних межах процесом Орнштейна–Уленбека.*

**L. A. Kovalchuk**

### **Dynamic simulation of statistical distributions of the air temperature by using the Ornstein–Uhlenbeck process and the Fokker–Planck equation**

*Based on the analysis of daily air temperature anomalies in Kiev during the last century, it is found that the extreme positive anomaly naturally can reach  $+15.13\text{ }^{\circ}\text{C}$ , exceeding the observed maximum by  $1^{\circ}$ . The climate process was stable and not subjected to human-induced deformations. We propose a stochastic model of the dynamics of air temperature anomalies, which is built on the “Wiener walks” held under natural climatic boundaries of the Ornstein–Uhlenbeck process.*