

Нестационарная нагрузка на поверхности упругого полупространства

Рассматривается осесимметричная задача определения напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, на границе которого действует нестационарное нормальное напряжение. Решение задачи строится с применением интегральных преобразований Лапласа и Бесселя. Выполнено совместное обращение интегральных преобразований. Как результат, получено точное решение задачи и определено напряжение и перемещение вдоль оси симметрии задачи. Приведен пример числовых расчетов.

Формулировка задачи. Рассматривается упругое полупространство, к поверхности которого приложена нестационарная нагрузка. Имеет место осевая симметрия задачи, поэтому полупространство отнесено к цилиндрической системе координат Orz , выбранной таким образом, что ось Oz , являющаяся осью симметрии, направлена вглубь полупространства, ось Or — вдоль его поверхности (рис. 1).

Нестационарная нагрузка в виде нормального напряжения возникает в некоторый начальный момент времени $t = 0$ и в общем случае является функцией времени и координаты r . Физические свойства материала среды описываются при помощи упругих постоянных — модуля всестороннего сжатия K , модуля сдвига μ и плотности γ . Введем в рассмотрение также некоторую “акустическую” среду с параметрами E , γ и $\mu = 0$, где E — модуль Юнга. Через c_0 обозначим скорость звука в акустической среде. Таким образом, скорости распространения волн определяются формулами $c_p = ((K + 4/3\mu)/\gamma)^{1/2}$; $c_s = (\mu/\gamma)^{1/2}$; $c_0 = (E/\gamma)^{1/2}$.

Вводятся безразмерные переменные и обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R}, & \bar{z} &= \frac{z}{R}, & \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{E} & (i, j = r, z), & \bar{u}_i &= \frac{u_i}{R}, \\ \bar{t} &= \frac{c_0 t}{R}, & \beta &= \frac{c_s}{c_0}, & \alpha &= \frac{c_p}{c_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь R — некоторый характерный линейный размер; u_i — проекции вектора упругих перемещений; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Ниже (если не будет оговорено иное) будут использоваться только безразмерные обозначения, поэтому черту над ними опускаем.

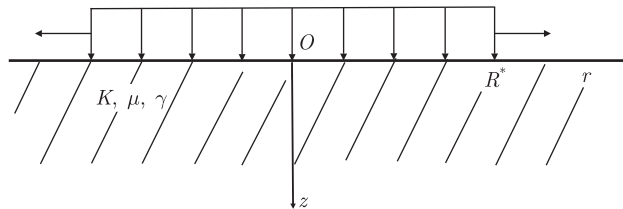


Рис. 1. Система координат

Движение упругой среды в осесимметричном случае описывается двумя скалярными волновыми потенциалами Φ и Ψ , удовлетворяющими уравнениям [2]

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \Delta\Psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Физические величины (перемещения, напряжения) выражаются через потенциалы Φ и Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}; & u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} &= \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}\right); \\ \sigma_{rr} &= \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^2 \partial z}\right); \\ \sigma_{rz} &= 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{2\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right). \end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности $z = 0$ состоят в задании нормального напряжения σ_{zz} и отсутствии касательного напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= Q(t, r), \\ \sigma_{zr}|_{z=0} &= 0, \quad r \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $Q(t, r)$ — заданная функция. Начальные условия для потенциалов Φ и Ψ являются нулевыми

$$\Phi|_{t=0} = \dot{\Phi}|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \dot{\Psi}|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

на бесконечности волновые возмущения затухают.

Общее решение. Решение задачи (1)–(4) получим при помощи интегральных преобразований Лапласа по времени t с параметром s и преобразования Бесселя (Ханкеля) порядка 0 по r с параметром ξ [6]. В частности,

$$\begin{aligned} f^L(s) = L\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt; & f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{ts} f^L(p) dp; \\ f^B(\xi) = B\{f(r)\} &= \int_0^\infty f(r) r J_0(r\xi) d\xi; & f(r) = B^{-1}\{f^B(\xi)\} &= \int_0^\infty f^B(\xi) \xi J_0(r\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь через L и B , соответственно, обозначены операторы интегральных преобразований Лапласа и Бесселя; L^{-1} , B^{-1} — операторы обращения, изображение функции обозначается соответствующим верхним индексом; J_m — цилиндрическая функция Бесселя индекса m [3].

В пространстве изображений по Лапласу и Бесселю получим следующую граничную задачу (в которой начальные условия уже реализованы):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LB} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LB} &= 0, \\
\left(1 - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) s^2 \Phi^{LB} + 2\beta^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi^{LB}}{\partial z^2} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial z} \Psi^{LB} \right] &= Q^{LB}(s, \xi), \quad z = 0, \\
\frac{\partial \Phi^{LB}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{2\beta^2} \Psi^{LB} &= 0, \quad z = 0, \\
\Phi^{LB} \rightarrow 0, \quad \Psi^{LB} \rightarrow 0, \quad z &\rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{6}$$

Общее решение волновых уравнений, затухающее при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\Phi^{LB} = A e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}}; \quad \Psi^{LB} = B e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}. \tag{7}$$

Определяя произвольные постоянные A, B из граничных условий, будем иметь выражение для изображения нормального напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{LB}(s, \xi, z) &= Q^{LB}(s, \xi) \times \\
&\times \frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2} e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}}{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Перемещение u_z и напряжение сдвига σ_{rz} в изображениях имеют вид

$$u_z^{LB} = -Q^{LB}(s, \xi) \frac{\frac{1}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \left[(s^2 + 2\beta^2 \xi^2) e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - 2\beta^2 \xi^2 e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right]}{(2\beta^2 \xi^2 + s^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}, \tag{9}$$

$$\sigma_{rz}^{LB} = -Q^{LB}(s, \xi) \frac{\frac{1}{\alpha} (s^2 + 2\beta^2 \xi^2) \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \left(e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right)}{(2\beta^2 \xi^2 + s^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}. \tag{10}$$

Обращение интегральных преобразований. Обратим внимание на то обстоятельство, что дробь в выражениях (8)–(10) является однородной функцией параметров преобразований s и ξ . Это позволяет надеяться, что для некоторых внешних воздействий, которые задают функцию $Q^{LB}(s, \xi)$, можно получить аналитическое выражение для σ_{zz} , σ_{rz} , u_z^{LB} на основе метода Каньяра [4, 5] совместного обращения интегральных преобразований.

Методика обращения зависит от свойств функции $Q(r, t)$, поэтому ее необходимо конкретизировать. В рамках данной публикации ограничимся нагрузкой следующего вида:

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - r), \tag{11}$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда: $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Функция (11) задает внезапно возникающее и распространяющееся с постоянной скоростью по поверхности полупространства напряжение.

Нетрудно определить преобразование Лапласа и Бесселя этой функции

$$Q_{zz}^L(r, s) = Q_0 \frac{1}{s} e^{-s \frac{r}{k}}; \quad Q_{zz}^{LB}(s, \xi) = Q_0 \frac{k^2}{(s^2 + \xi^2 k^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

Тогда, например, из (8) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{LB}(s, \xi, z) &= Q_0 \frac{k^2}{(s^2 + \xi^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\times \frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2} e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}}{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}. \end{aligned}$$

Запишем инверсию преобразования Бесселя на оси z , т. е. при $r = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L(s, z) &= Q_0 \int_0^\infty \frac{k^2}{(s^2 + \xi^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\times \frac{\left[(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2} e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right]}{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \xi^2 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \xi d\xi \end{aligned}$$

и сделаем замену переменного $\xi = s\eta$, $d\xi = s d\eta$, предполагая s вещественным. Будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L(s, z) &= Q_0 \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{k^2}{(1 + \eta^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\times \frac{\left[(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2 e^{-s \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} e^{-s \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \right]}{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \eta d\eta. \quad (13) \end{aligned}$$

Перепишем (13) в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L(s, z) &= Q_0 \frac{1}{s} [R_1^L(z, s) + R_2^L(z, s)] = Q_0 \frac{1}{s} \left[\int_0^\infty \bar{R}_1^L(s, z, \eta) d\eta + \int_0^\infty \bar{R}_2^L(s, z, \eta) d\eta \right], \\ \bar{R}_1^L(s, z, \eta) &= e^{-s \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} \frac{k^2}{(1 + \eta^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2}{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \eta, \quad (14) \\ \bar{R}_2^L(s, z, \eta) &= -4 \frac{\beta^3}{\alpha} e^{-s \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \frac{k^2}{(1 + \eta^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}}{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2 - 4 \frac{\beta^3}{\alpha} \eta^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \eta. \end{aligned}$$

В выражении (14) сделаем следующие замены переменного:

$$\begin{aligned} \text{для } \bar{R}_1^L(s, z, \eta): \quad & \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} = t; \\ \text{для } \bar{R}_2^L(s, z, \eta): \quad & \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} = t. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} R_1^L(s, z) &= \int_{\frac{z}{\alpha}}^{\infty} e^{-st} \bar{R}_{zz}^{(1)}(t, z) dt; \\ R_1(t, z) &= \frac{\alpha^3 k^2 [\alpha^2 z^2 + 2\beta^2 A(t, z)]^2 t z}{[\alpha^2 z^2 + k^2 A(t, z)]^{\frac{3}{2}} ([\alpha^2 z^2 + 2\beta^2 A(t, z)]^2 - 4\alpha\beta^3 t A(t, z) \sqrt{\alpha^2 z^2 + \beta^2 A(t, z)})}, \\ R_2^L(s, z) &= \int_{\frac{z}{\beta}}^{\infty} e^{-st} \bar{R}_{zz}^{(2)}(t, z) dt; \\ R_2(z, t) &= 4 \frac{\beta^4 k^2}{\alpha} \frac{B(t, z) \sqrt{\beta^2 z^2 + \alpha^2 B(t, z)} t^2 z}{[\beta^2 z^2 + k^2 B(t, z)]^{\frac{3}{2}} [(2\beta^2 t^2 - z^2)^2 - 4 \frac{\beta}{\alpha} t B(t, z) \sqrt{\beta^2 z^2 + \alpha^2 B(t, z)}]}, \\ A(t, z) &= \alpha^2 t^2 - z^2; \quad B(t, z) = \beta^2 t^2 - z^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Интегральные операторы в (15) есть операторы преобразования Лапласа, следовательно, оригиналами $R_1^L(s, z)$ и $R_2^L(s, z)$ есть, соответственно, $H(t - z/\alpha)R_1(t, z)$ и $H(t - z/\beta) \times R_2(z, t)$.

Окончательно, учитывая множитель $1/s$ в выражении (14), будем иметь следующее аналитическое выражение для нормального напряжения $\sigma_{zz}(t, z)$ на оси симметрии задачи:

$$\sigma_{zz}(t, z) = Q_0 \left[H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) \int_{\frac{z}{\alpha}}^t R_1(\tau, z) d\tau - H\left(t - \frac{z}{\beta}\right) \int_{\frac{z}{\beta}}^t R_2(\tau, z) d\tau \right]. \tag{16}$$

Выражения для остальных напряжений и перемещений получаются аналогично.

Числовые результаты. Приведем некоторые числовые результаты, в частности, для напряжения σ_{zz} . При вычислениях были выбраны следующие значения параметров материала упругого полупространства: $\alpha = 1,28$, $\beta = 0,69$, кроме того, параметр нагрузки $Q_0 = 1$.

На рис. 2, а, б скорость расширения нагрузки такова, что $\bar{k} = k/\alpha = 1$.

На рис. 2, а представлено распределение напряжения вдоль оси z в фиксированные моменты времени:

$$1 - t = 1,0; \quad 2 - t = 5,0; \quad 3 - t = 10,0; \quad 4 - t = 15,0.$$

Можно видеть, что напряжение, оставаясь равным единице на поверхности полупространства, с течением времени и с ростом расстояния от граничной поверхности изменяет

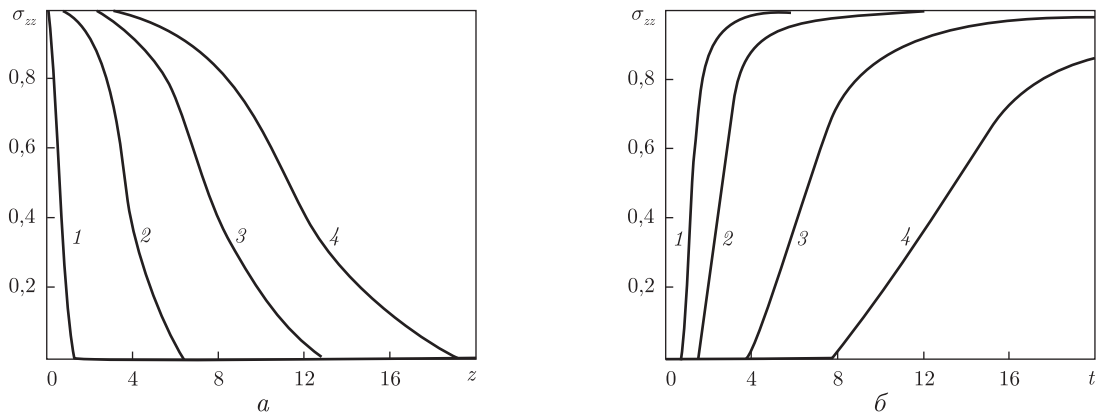


Рис. 2. Напряжение σ_{zz} при $k = 1$

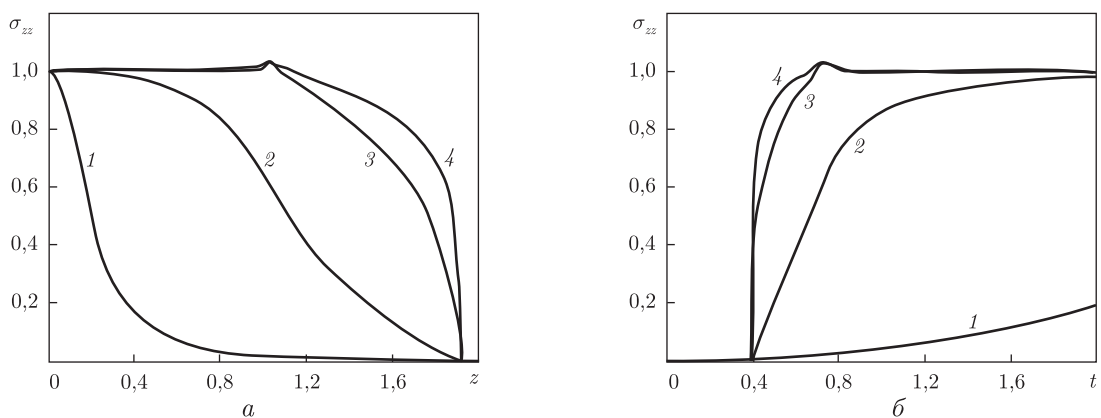


Рис. 3. Напряжение σ_{zz} при различных k

профиль таким образом, что его крутизна уменьшается. При этом увеличивается зона, в которой значения напряжения близко к значению на границе. Рис. 2, б иллюстрирует развитие напряжения во времени в нескольких точках оси z :

$$1 - z = 1,0; \quad 2 - z = 2,0; \quad 3 - z = 5,0; \quad 4 - z = 10,0.$$

С ростом z нарастание напряжения в рассматриваемой точке становится все менее резким, а время достижения значения, близкого к значению на границе, увеличивается.

Рис. 3, а, б построены для нескольких значений безразмерного параметра k : 1 — $k = 0,1$; 2 — $k = 1,0$; 3 — $k = 5,0$; 4 — $k = 10,0$. При этом рис. 3, а показывает напряжение σ_{zz} как функцию z в момент времени $t = 1,5$, рис. 3, б — как функцию t в точке $z = 0,5$.

Как следует из графиков, характер изменения напряжения существенно зависит от скорости распространения нагрузки. С уменьшением параметра k градиент роста напряжения уменьшается. Наблюдаемый на рис. 3, а, б (кривые 3, 4) излом отвечает фронту порожденной сдвиговой волны и имеет место только при движении нагрузки по поверхности полупространства с опережением фронта волны расширения.

Укажем, что решение аналогичной плоской задачи изложено в работе [7].

1. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.

2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
4. Sagniard L. Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives. – Paris: Gauthier-Villars, 1939. – 255 p.
5. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. – Ленинград: Судостроение, 1972. – 374 с.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
7. Кубенко В. Д. Нестационарная нагрузка на поверхности упругой полуплоскости // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 67–71.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.11.2013

Академік НАН України **В. Д. Кубенко**

Нестационарное навантаження на поверхні пружного півпростору

Розглядається вісесиметрична задача визначення напруженого стану пружного півпростору, на границі якого діє нестационарне нормальне напруження. Розв'язок задачі будується із застосуванням інтегральних перетворень Лапласа і Бесселя. Виконано спільне обернення інтегральних перетворень. Як результат, одержано точний розв'язок задачі і визначено напруження і переміщення вздовж осі симетрії задачі. Наведено приклад числового розрахунку.

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko**

Nonstationary loading at the elastic half-space surface

A nonstationary stress is applied to the surface of an elastic half-space. It is necessary to build a solution of the transient boundary problem and to determine the stress-strain state of the half-space. The solution is realized with help of the Laplace and Fourier integral transformations. The coupled inversion of the integral transforms is realized. As a result, the exact solution for a stress and a displacement along the axis of symmetry of the problem is determined. Numerical examples are given.