УДК 519.21

О. В. Іванов, І. В. Орловський

Асимптотичні властивості оцінки параметрів лінійної регресії у випадку слабко залежних регресорів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України П. С. Кноповим)

Розглядається лінійна модель регресії зі слабко залежним випадковим шумом та регресорами, які залежать від часу та спостерігаються зі слабко залежними похибками. Досліджуються властивості консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів такої моделі регресії.

У роботі отримано умови консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (о. н. к.) невідомого параметра лінійної моделі регресії з випадковими регресорами та корельованими спостереженнями. Модель такого типу є природним узагальненням класичної моделі типу "сигнал + шум".

О. н. к. обрано як одну з найважливіших та широко вживаних оцінок параметрів регресійних моделей. Асимптотичні властивості о. н. к. параметрів лінійної та нелінійної регресії, без помилок у регресорах, розглядались багатьма дослідниками, і ми пошлемося лише на монографії О. В. Іванова та М. М. Леоненка [1], О. В. Іванова [2], в яких міститься достатньо повна бібліографія робіт з даного питання.

Асимптотичні властивості о. н. к. параметрів лінійних моделей з випадковими регресорами та корельованими спостереженнями є менш вивченими. В книзі А. Я. Дороговцева [3] розглядалась асимптотична поведінка о. н. к. параметрів лінійної моделі зі слабко залежними помилками в регресорах, які мають незалежні від часу тренди, та слабко залежним шумом. У статті Л. П. Голубовської, О. В. Іванова та І. В. Орловського [4] досліджено консистентність та асимптотичну нормальність параметрів моделей зі слабко залежними помилками в регресорах і слабко або сильно залежним випадковим шумом.

У роботі увагу зосереджено на отриманні сильної консистентності та асимптотичної нормальності о. н. к. параметрів лінійної моделі зі слабко залежними помилками в регресорах, які мають залежні від часу тренди.

1. Постановка задачі. Розглянемо модель регресії

$$X(t) = \sum_{i=1}^{q} \theta_i z_i(t) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0, T], \qquad z_i(t) = a_i(t) + y_i(t), \qquad i = \overline{1, q}, \tag{1}$$

де $\theta^* = (\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ — вектор невідомих параметрів (* означає транспонування), $a_i \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, q}$, — деякі невипадкові неперервні функції і:

A1. $y_i(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, q}$, — незалежні, неперервні у середньоквадратичному, вимірні стаціонарні гауссівські процеси, $Ey_i(0) = 0$.

A2. Випадковий шум $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — неперервний в середньому квадратичному, вимірний, гауссівський стаціонарний процес, що не залежить від $y_i(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, q}$, $E\varepsilon(0) = 0$.

Означення 1. О. н. к. невідомого параметра θ, одержаною за спостереженнями $\{X(t), z_i(t),\ i = \overline{1,q},\ t \in [0,T]\}$ виду (1), називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = \widehat{\theta}_T(X(t), z_i(t),\ i = \overline{1,q},\ t \in [0,T])$, для якого

$$Q_T(\widehat{\theta}_T) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}^q} Q_T(\tau), \qquad Q_T(\tau) = \int\limits_0^T \left[X(t) - \sum_{i=1}^q \tau_i z_i(t)\right]^2 dt.$$

Введемо такі позначення:

$$A^*(t) = (a_1(t), \ldots, a_q(t)), \qquad Y^*(t) = (y_1(t), \ldots, y_q(t)), \qquad Z(t) = A(t) + Y(t).$$

Тоді

$$\widehat{\theta}_T = \Lambda_T^{-1} T^{-1} \int\limits_0^T Z(t) X(t)\, dt = \theta + \Lambda_T^{-1} T^{-1} \int\limits_0^T Z(t)\varepsilon(t)\, dt, \tag{2}$$

де $\Lambda_T = (\Lambda_T^{il})_{i,l=1}^q = T^{-1} \int\limits_0^T Z(t) Z^*(t)\, dt$.

2. Допоміжні твердження. Розглянемо деякі твердження, які використовуються для отримання основних результатів роботи.

Введемо подальші припущення:

A3. Випадкові процеси $y_i(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,q}$, мають абсолютно інтегровані коваріаційні функції (к. ф.) $B_i(t) = E y_i(0) y_i(t)$.

Літерами k будемо позначати додатні константи. Нехай також,

$$d_T^2 = \mathrm{diag}(d_{iT}^2)_{i=1}^q, \qquad d_{iT}^2 = \int\limits_0^T a_i^2(t)\, dt, \qquad i = \overline{1,q}.$$

B1. $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} d_{iT}^2 = k_i$, $0 < k_i < \infty$, $i = \overline{1,q}$.

B2. $a_i(t)$, $t \in [0,\infty)$, $i = \overline{1,q}$, — обмежені функції.

Запишемо

$$J_T = (J_T^{il})_{i,l=1}^q, \qquad J_T^{il} = T^{-1} \int\limits_0^T a_i(t) a_l(t)\, dt.$$

B3. $\lim\limits_{T\to\infty} J_T = J$, де $J = (J^{il})_{i=1}^q$ — деяка додатно визначена матриця.

Введемо також позначення

$$\Lambda = R(0) + J, \qquad R(0) = \mathrm{diag}(B_i(0))_{i=1}^q.$$

У нижченаведеній лемі розглянуто асимптотичну поведінку Λ_T.

Лема 1. *Якщо виконано умови* **A1, A3, B1–B3**, *то*

$$\Lambda_T \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda, \quad \textit{майже напевно (м. н.).}$$

З леми випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Якщо виконано умови* **A1, A3, B1–B3**, *то для майже всіх* $\omega \in \Omega$ *існує таке* $T_0 = T_0(\omega)$, *що для всіх* $T > T_0$ *о. н. к.* $\widehat{\theta}_T$, *яку задано* (2), *є визначеною.*

Сформулюємо одну властивість повільно змінної функції (п. з. ф.), яка є узагальненням теореми 2.7 праці [5, с. 65–67] і використовується при доведенні консистентності о. н. к. параметрів моделі (теорема 2).

Лема 2. *Нехай число* $\eta \geqslant 0$ *та вимірна функція* $f(t,s)$, *визначена на* $(0,\infty) \times (0,\infty)$, *такі, що інтеграл*

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\beta} \frac{f(t,s)}{|t-s|^{\eta}} dtds$$

збігається при деякому $0 < \beta < \infty$. *Нехай п. з. ф.* L *обмежена на кожному скінченному інтервалі з* $\mathbb{R}_+$. *Тоді при* $\eta > 0$ *виконується співвідношення*

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\beta} L(T|t-s|) f(t,s)\, dtds \underset{T\to\infty}{\sim} L(T) \int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\beta} f(t,s)\, dtds.$$

У випадку $\eta = 0$ *для виконання цього співвідношення достатньо неспадання на півосі* $(0,\infty)$ *функції* L.

При доведенні асимптотичної нормальності о. н. к. (теорема 5) використовується однорідна нерівність Гельдера–Юнга–Браскампа–Ліба, формулювання якої можна знайти в [6, 7].

3. Сильна консистентність о. н. к. Зробимо додаткове припущення стосовно процесу $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

A4. Випадковий процес $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, має абсолютно інтегровну к. ф. $B(t) = E\varepsilon(0)\varepsilon(t)$.

Теорема 1. *Якщо виконано умови* **A1–A4** *та* **B1–B3**, *то о. н. к.* $\widehat{\theta}_T$ *є сильно консистентною оцінкою параметрів* θ, *тобто* $\widehat{\theta}_T \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ *м. н.*

Нехай замість **A4** виконано умову

A5. Випадковий шум $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, має к. ф. $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, де $L(t)$, $t > 0$, — п. з. ф., яка обмежена на кожному скінченному інтервалі, $\alpha \in (0, 1/2)$.

Теорема 2. *Якщо виконано умови* **A1–A3, A5** *та* **B1–B3**, *то* $\widehat{\theta}_T \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ *м. н.*

Зауважимо, що для випадку, коли деякі з $k_i = \infty$, є вірними аналогічні результати. У цьому випадку умови **B1–B3** переформулюються таким чином.

B1′. $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} d_{iT}^2 = k_i$, $0 < k_i \leqslant \infty$, $i = \overline{1,q}$, якщо для деякого i $k_i = \infty$, то існує таке $\mu_i > 0$, що $T d_{iT}^{-2} = o(T^{-\mu_i})$.

B2′. $\sup\limits_{t\in[0,T]} |a_i(t)| d_{iT}^{-1} \leqslant \breve{k}_i T^{-1/2}$, $i = \overline{1,q}$.

Позначимо

$$\widetilde{J}_T = (\widetilde{J}_T^{il})_{i,l=1}^q, \qquad \widetilde{J}_T^{il} = d_{iT}^{-1} d_{lT}^{-1} \int\limits_0^T a_i(t) a_l(t)\, dt.$$

B3′. $\lim\limits_{T\to\infty} \widetilde{J}_T = \widetilde{J}$, де $\widetilde{J} = (\widetilde{J}^{il})_{i,l=1}^q$ — деяка додатно визначена матриця.

Теорема 3. *Якщо виконано умови* **A1–A4** *та* **B1′–B3′**, *то*

$$T^{-1/2}d_T(\widehat{\theta}_T-\theta)\underset{T\to\infty}{\longrightarrow}0 \quad \textit{м. н.}$$

Теорема 4. *Якщо виконано умови* **A1–A3, A5** *та* **B1′–B3′**, *то*

$$T^{-1/2}d_T(\widehat{\theta}_T-\theta)\underset{T\to\infty}{\longrightarrow}0 \quad \textit{м. н.}$$

4. Асимптотична нормальність о. н. к. Введемо матричну міру $\mu_T(dx)$ на $(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}^1)$ з матрицею щільності

$$(\mu_T^{jl}(x))_{j,l=1}^q,$$

$$\mu_T^{jl}(x)=a_T^j(x)\overline{a_T^l(x)}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}|a_T^j(x)|^2dx\int\limits_{\mathbb{R}^1}|a_T^l(x)|^2dx\right)^{-1/2},$$

$$a_T^j(x)=\int\limits_0^T e^{ixt}a_j(t)\,dt, \qquad j,l=\overline{1,q}.$$

Зауважимо, що $d_{jT}^2=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^1}|a_T^j(x)|^2dx$, $j=\overline{1,q}$.

Зазначимо також, що за умови **A4** випливає, що випадковий процес $\varepsilon(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, має спектральну щільність f_ε.

B4. Сім'я мір $\mu_T(\cdot)$ слабко збігається до міри $\mu(\cdot)$ при $T\to\infty$ та $\int\limits_{\mathbb{R}^1}f_\varepsilon(x)\mu(dx)$ — додатно визначена матриця.

Означення 2. Матрична міра $\mu(\cdot)$ називається спектральною мірою функції регресії $\sum\limits_{i=1}^q\theta_ia_i(t)$ (більш детально див. [1, 8, 9]).

Введемо деякі позначення:

$$\Gamma=\operatorname{diag}(k_i)_{i=1}^q, \qquad \text{де} \qquad k_i \text{ задано в } \mathbf{B1}; \qquad b_i=\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_i(t)B(t)\,dt, \qquad i=\overline{1,q};$$

$$\sigma=2\pi\Gamma^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}f_\varepsilon(x)\mu(dx)\right)\Gamma^{1/2}+\operatorname{diag}(b_i)_{i=1}^q.$$

Теорема 5. *Якщо виконано умови* **A1–A4** *та* **B1–B4**, *то розподіл нормованої о. н. к.* $\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T-\theta)$ *при* $T\to\infty$ *збігається до гауссівського розподілу* $N(0,\Lambda^{-1}\sigma\Lambda^{-1})$.

Для випадку, коли деякі з $k_i=\infty$, теорема 5 переформулюється таким чином.

Теорема 6. *Якщо виконано умови* **A1–A4**, **B1′–B3′** *та* **B4**, *то розподіл нормованої о. н. к.* $d_T(T)(\widehat{\theta}_T-\theta)$ *при* $T\to\infty$ *збігається до гауссівського розподілу* $N(0,\widetilde{\Lambda}^{-1}\widetilde{\sigma}\widetilde{\Lambda}^{-1})$, *де*

$$\widetilde{\sigma}=2\pi\int\limits_{\mathbb{R}^1}f_\varepsilon(x)\mu(dx)+\operatorname{diag}\left(\frac{b_i}{k_i}\right)_{i=1}^q,$$

$\widetilde{\Lambda}=\operatorname{diag}((1/k_i)B_i(0))_{i=1}^q+\widetilde{J}$ *(вважатимемо, що* $1/k_i=0$ *у випадку* $k_i=\infty$*).*

Отримані результати узагальнюють результати, отримані в [3], та продовжують дослідження [4], розширюючи їх на випадок слабко залежних похибок у спостереженнях.

1. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* Статистический анализ случайных полей. – Київ: Вища шк., 1986. – 216 с.
2. *Ivanov A. V.* Asymptotic theory of nonlinear regression. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 327 p.
3. *Дороговцев А. Я.* Теория оценок параметров случайных процессов. – Киев: Вища шк., 1982. – 192 с.
4. *Голубовська Л. П., Іванов О. В., Орловський І. В.* Асимптотичні властивості оцінки параметрів лінійної регресії у випадку сильнозалежних регресорів // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 4(84). – С. 26–33.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
6. *Avram F., Leonenko N., Sakhno L.* On a Szegö type limit theorem, the Hölder–Young–Brascamp–Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields // ESAIM: PS. – 2010. – **14**. – P. 210–255.
7. *Lieb E. H.* Inequalities: selecta of Elliott H. Lieb. – Berlin: Springer, 2000. – 711 p.
8. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – Москва: Наука, 1970. – 384 с.
9. *Grenander U., Rosenblatt M.* Statistical analysis of stationary time series. – Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1956. – 300 p.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 05.11.2013

А. В. Иванов, И. В. Орловский

Асимптотические свойства оценки параметров линейной регрессии в случае слабо зависимых регрессоров

Рассматривается линейная модель регрессии со слабо зависимым случайным шумом и регрессорами, которые зависят от времени и наблюдаются со слабо зависимыми ошибками. Исследуются свойства состоятельности и асимптотической нормальности оценки наименьших квадратов параметров такой модели регрессии.

A. V. Ivanov, I. V. Orlovsky

Asymptotic properties of the estimator of linear regression parameters in the case of weakly dependent regressors

A linear regression model with weakly dependent random noise and time-dependent regressors which are observed with weakly dependent errors is considered. The consistency and the asymptotic normality of the least squares estimator of such a regression model are proved.