

УДК 532.528

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ВИСОКОШВИДКІСНОГО СУПЕРКАВІТАЦІЙНОГО РУХУ ЗА ІНЕРЦІЄЮ З НЕТОНКИМИ КАВІТАТОРАМИ

З. І. МАНОВА, І. Г. НЕСТЕРУК, Б. Д. ШЕПЕТЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 06.05.2009

Розглянуті задачі максимізації відстані, яка пройдена осесиметричним суперкавітуючим тілом за інерцією під довільним кутом до горизонту у випадку дуже великих швидкостей та товстих насадків. Сформульовані та розв'язані різні ізопериметричні задачі з фіксованими значеннями маси, кінетичної енергії, видовження та калібру тіла. Запропоновані два безрозмірні параметри, що впливають на розв'язки. Показано, що при малих значеннях цих параметрів оптимальні форми тіл можуть використовувати лише носову частину каверни. Отримані аналітичні та чисельні розв'язки для максимальної дальності та оптимальної форми тіла. Показано, що у випадку висхідного суперкавітаційного руху можливе різке збільшення дальності та вихід тіла на поверхню при нескінченно малому перевищенні деякого критичного значення початкової глибини. Розраховані відповідні значення критичних глибин.

Рассмотрены задачи максимизации расстояния, пройденного осесимметричным суперкавитирующим телом по инерции под произвольным углом к горизонту в случае очень больших скоростей и толстых насадков. Сформулированы и решены различные изопериметрические задачи с фиксированными значениями массы, кинетической энергии, удлинения и калибра тела. Предложены два безразмерных параметра, влияющих на решения. Показано, что при малых значениях этих параметров оптимальные формы тел могут использовать только носовую часть каверны. Получены аналитические и численные решения для максимальной дальности и оптимальной формы тела. Показано, что для восходящего суперкавитационного движения возможно резкое увеличение дальности и выход тела на поверхность при бесконечно малом превышении некоторого критического значения начальной глубины. Рассчитаны соответствующие значения критических глубин.

Maximum range problems are considered for the supercavitating motion of the axisymmetric body on inertia under an arbitrary angle to horizon in the case of very high velocities and non-slender cavitators. Different isoperimetric problems were formulated and solved with the fixed values of body mass, kinetic energy, aspect ratio and caliber. Two dimensionless parameters are proposed which influence the solution. At small values of these parameters the optimal body shapes may use the nose part of the cavity only. Analytic and numeric solutions for the maximal range and the optimal body shapes are obtained. It was shown that infinite small exceeding of some critical value of the initial depth can cause a jump of the range and coming to the water surface. The corresponding values of the critical initial depth are calculated.

ВСТУП

В статтях [2–4] розглянуто низку задач максимізації пройденого за інерцією шляху в режимі горизонтального суперкавітаційного руху. В роботах [5–7] зроблено узагальнення на випадок негоризонтального руху кавітуючого тіла, показано, що розв'язки залежать від ізопериметричних умов. Огляд різних ізопериметричних задач та їхніх аналітичних та чисельних розв'язків наведений у [8]. При цьому вважалось, форма оптимального суперкавітуючого тіла фіксованого об'єму збігається з формою каверни. Для випадків заданих калібрів та довжин тіла ці величини повинні збігатись з максимальним діаметром та довжиною каверни відповідно.

В статті [9] розглядався рівномірний суперкавітаційний рух тіла, що займає лише носову частину каверни. Показано, що для дуже малих чисел кавітації ($\sigma < 0.01$) можна досягти значного зменшення об'ємного коефіцієнта опору. При цьому з міркувань міцності конструкції тіла його видовження є обмеженим деякою величиною λ_m .

Збільшення швидкостей руху тіл у воді робить актуальними дуже малі числа кавітації, які можуть бути меншими 0.0001 навіть у випадку парової кавітації, тому цікаво дослідити форму оптимальних суперкавітуючих тіл, що рухаються негоризонтально за інерцією. Оскільки каверни для дуже малих чисел кавітації мають дуже велике видовження, то корпуси апаратів можуть розташовуватись лише в їхній носовій частині.

Аналіз задач суперкавітаційного руху за інерцією ускладнюється відсутністю точних розв'язків та нестационарним характером течії. Разом з тим, в деяких випадках високошвидкісного руху існує діапазон квазістационарного обтікання з фіксованим значенням опору тиску (див., наприклад, [7]), коли можна користуватись відомими співвідношеннями для форми стационарної каверни в невагомій рідині, утвореної нетонким насадком, наприклад, [10]:

$$\bar{R}^2 = \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{\lambda^2}, \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{L}{D} = \sqrt{\frac{-\ln \sigma}{\sigma}}, \quad (2)$$

$$\frac{D}{R_n} = 2\sqrt{\frac{C_x}{\sigma}}, \quad (3)$$

$$\frac{L}{R_n} = \frac{2\sqrt{-C_x \ln \sigma}}{\sigma}, \quad (4)$$

де $\bar{R} = R/L$ – безрозмірний радіус перерізу каверни; $\bar{x} = x/L$ – поздовжня координата; λ – видовження каверни; D – максимальний діаметр каверни; L – довжина каверни.

Обмежимося випадком малих чисел кавітації та великих чисел Фруда:

$$\sigma = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho U^2} \ll 1, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \gg 1, \quad (5)$$

де ρ – густина води; U – поточна швидкість тіла; p_∞ – тиск у воді далеко від перерізу початку каверни на глибині його руху; p_c – тиск у каверні, який можна вважати сталим через велику різницю у густинах води та газів, що заповнюють каверну; L – довжина каверни.

Тоді, якщо додатково вважати коефіцієнт кавітаційного опору C_x сталим, то рівняння руху легко інтегрується, і пройдений тілом шлях S визначається формулою (див.[2–4])

$$S = \frac{2m}{\rho C_x \pi R_n^2} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (6)$$

де U_0 – фіксована початкова швидкість тіла; U – кінцева швидкість тіла, при якій відбувається його замивання водою (припинення суперкавітаційного режиму обтікання і зупинка).

Формула (6) дозволяє проаналізувати питання максимізації пройденого шляху для різних ізопериметричних умов. У даній роботі ми будемо вважати видовження тіла λ_m фіксованим та обмежимося випадком нетонких насадків (диск або конуси з великими кутами при вершині). Тоді розмірами кавітатора можна знехтувати і використовувати лише формули (1)–(4) для розрахунку оптимального суперкавітуючого тіла, розташованого в носовій частині каверни (до її міделя) $0 < \bar{x} \leq \alpha \leq 0.5$. Зокрема, для тіла фіксованого калібру D_b з (1)–(4), (6) можна отримати

$$S = \frac{32m\alpha(1-\alpha)}{\pi\rho\sigma D_b^2} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{4\sigma\lambda_m^2}{4\sigma\lambda_m^2 - \ln \sigma}, \quad \lambda_m < 0.5\sqrt{\frac{-\ln \sigma}{\sigma}}, \quad (8)$$

де σ є кінцевим числом кавітації в момент замивання поверхні тіла водою (вважаємо, що припинення режиму суперкавітації приводить до зупинки тіла).

Випадок фіксованої довжини тіла L_b не потребує додаткових досліджень, оскільки $L_b = \lambda_m D_b$, і для заданих величин видовження та калібру довжина тіла також буде фіксованою. Об'єм тіла, розташованого в передній частині каверни, можна апроксимувати об'ємом конуса

$$V_b \approx \frac{\pi D_b^2 L_b}{12} = \frac{\pi D_b^3 \lambda_m}{12},$$

тому оптимальні розв'язки задачі з фіксованими калібром і видовженням приблизно збігатимуться з розв'язками для заданих об'єму та видовження.

Отже, для випадків, коли тіло фіксованого видовження займає лише передню частину каверни, немає потреби розглядати окремо п'ять груп сформульованих та розв'язаних в [6, 7] задач з фіксованими:

- 1 – масою та калібром тіла;
- 2 – масою та довжиною тіла;
- 3 – масою та об'ємом тіла або еквівалентну задачу з фіксованими середньою густиною та об'ємом тіла;
- 4 – середньою густиною та калібром тіла;
- 5 – середньою густиною та довжиною тіла.

Достатньо обмежитись лише ізопериметричними задачами з фіксованою масою та калібром тіла.

Будемо розглядати випадки як парової, так і пугучної кавітації із заданою величиною тиску в каверні p_c в момент замивання. Формулу (5) для числа кавітації зручно переписати у вигляді

$$\sigma = \frac{2gh_2}{U_0^2 \bar{U}^2}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_0}. \quad (9)$$

Тут і в подальшому кінцева глибина h та $h_2 = 10 + h - p_c$ вимірюються в метрах, а тиск у каверні p_c – в метрах водяного стовпа.

1. ІЗОПЕРИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ З ФІКСОВАНИМИ МАСОЮ, КАЛІБРОМ ТА КІНЦЕВОЮ ГЛИБИНОЮ

Якщо поряд з масою, калібром та кінцевою глибиною зафіксувати також кінцеву швидкість, то відповідно до формули (9) заданим також буде кінцеве число кавітації. Тоді формули (1)–(4), (8) дозволяють розрахувати форму суперкавітуючого корпусу та розмір насадки. Рівняння (7) свідчить,

що максимальна віддаль досягається при максимально можливій початковій швидкості.

Подібний тривіальний розв'язок задачі оптимізації властивий також випадкам $\alpha > 0.5$ (зокрема, ситуації, коли весь об'єм каверни заповнений тілом). Щоб переконатись у цьому, достатньо зауважити, що рівняння (7) справедливе і для випадку $\alpha > 0.5$, якщо в нього підставити $\alpha = 0.5$. Такий самий висновок про максимальну дальність при найбільшій початковій швидкості можна зробити для всіх п'яти задач, що вказані у вступі.

Якщо замість маси тіла зафіксувати його початкову кінетичну енергію T_0 , то для заданих значень калібра та кінцевих глибини і швидкості можна отримати

$$S = \frac{32T_0U^2\alpha(1-\alpha)}{\pi\rho gh_2D_b^2U_0^2} \ln \frac{U_0}{U}.$$

Тоді максимальне значення відстані збігається з максимумом функції

$$f = -\bar{U}^2 \ln \bar{U}, \quad (10)$$

досягатиметься при

$$\bar{U}^* = e^{-0.5} \quad (11)$$

і становитиме

$$S^* = \frac{16T_0\alpha(1-\alpha)}{\pi e\rho gh_2D_b^2}.$$

Рівняння (11) дозволяє також отримати оптимальне значення маси тіла

$$m^* = \frac{2T_0}{eU^2}.$$

Деяко складнішим є аналіз задач з фіксованою початковою швидкістю. Зокрема, для випадку $\alpha > 0.5$ з рівняння (7) випливає, що найбільша дальність також збігається з максимумом функції (10) і досягається при значенні безрозмірної швидкості (11) (див. також [6]).

Варто зауважити, що розв'язки різних з наведених вище п'яти ізопериметричних задач досягаються для різних функцій, подібних до (10), та деяко відмінних від (11) значень оптимальної безрозмірної швидкості. Докладний виклад випадку повного використання простору каверни для розміщення оптимального тіла можна знайти в [6].

Нетривіальний розв'язок властивий також випадку $\alpha \leq 0.5$, який заслуговує на докладний виклад. З рівнянь (7), (9) випливає

$$\bar{S} = \frac{Sgh_2\rho D_b^2}{mU_0^2} = -\frac{16\bar{U}^2\alpha(1-\alpha)}{\pi} \ln \bar{U}, \quad (12)$$

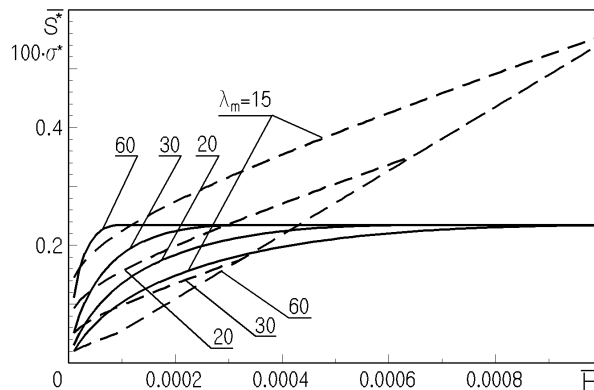


Рис. 1. Залежності максимальної дальності \bar{S}^* та оптимального кінцевого числа кавітації σ^* від параметра \bar{H} для різних значень максимального видовження тіла λ_m

тому найбільша дальність відповідає максимуму функції

$$f_1(\bar{U}) = -\alpha(1-\alpha)\bar{U}^2 \ln \bar{U}. \quad (13)$$

Оскільки за формулою (8) безрозмірна довжина тіла α залежить від числа кавітації і відповідно до формули (9) від безрозмірних швидкості \bar{U} та параметра

$$\bar{H} = \frac{gh_2}{U_0^2}, \quad (14)$$

то аналіз максимуму функції (13) потребує певних розрахунків, приклади яких наведені на рис. 1. Суцільними лініями показані значення максимального шляху \bar{S}^* , штриховими – оптимального кінцевого числа кавітації σ^* , з використанням якого за рівняннями (1)–(4) можна визначити форму оптимального тіла так, щоб воно було вписаним у відповідну каверну, а його діаметр збігався з діаметром каверни при $\bar{x} = \alpha$. З рис. 1 видно, що дальність збільшується при зростанні видовження тіла, але різниця у величині пройденого шляху відчутна лише для дуже малих значень параметра \bar{H} або для великих швидкостей руху. Для випадків $\bar{H} > 0.001$, $\lambda_m > 15$ можна не зважати на відмінності у видовженні тіла і користуватись результатами, викладеними в [6]. Зокрема, безрозмірне значення максимальної дальності буде наближатись до $\bar{S}^* = 2/(e\pi) \approx 0.234$.

При великих швидкостях руху порушується постульоване в [6] положення, що калібр оптимального тіла повинен збігатись з максимальним діаметром каверни. Найбільша дальність може досягатись при $\alpha < 0.5$. Даний висновок ілюструє приклад розрахунку форми оптимального тіла для

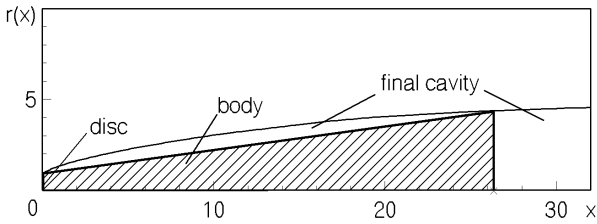


Рис. 2. Приклад форми оптимального тіла для значень параметрів $\bar{H} = 1$ та $\lambda_m = 5$

значень параметрів $\lambda_m = 3$, $\bar{H} = 0.001$, наведений на рис. 2. Безрозмірна дальність руху за інерцією для такого тіла становить $\bar{S}^* \approx 0.083$ і перевищує інерційний шлях будь-яких інших суперкавітуючих апаратів з такими ж значеннями λ_m та \bar{H} . Величина параметра α при цьому становить приблизно 0.252. Якщо припустити, що калібр тіла збігається з максимальним діаметром каверни в момент замивання ($\alpha = 0.5$), то за формулами (1)–(4), (12) можна отримати $\bar{S} \approx 0.063$, тобто дальність, меншу оптимальної приблизно на 24%.

Характерною особливістю розглянутих в даному розділі ізопериметричних задач є незалежність розв'язків від кута руху тіла по відношенню до горизонту. Даний факт зазначався також в [6]. Варто зауважити, що горизонтальний рух тіла є окремим випадком викладеної теорії.

2. ІЗОПЕРИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ З ФІКСОВАНИМИ МАСОЮ, КАЛІБРОМ ТА ПОЧАТКОВОЮ ГЛИБИНОЮ

Якщо фіксована не кінцева, початкова глибина h_0 , то величину h_2 у формулі (9) можна переписати у вигляді

$$h_2 = h_1 - S \sin \gamma, \quad h_1 = 10 + h_0 - p_c, \quad (15)$$

де γ – кут траєкторії тіла по відношенню до горизонту ($\gamma > 0$ для руху догори). Тепер число кавітації і розв'язки задачі залежитимуть від кута руху тіла. Підстановка (15) у формули (9) та (7) дає нелінійні рівняння для дальності, що додатково ускладнює пошук оптимальних розв'язків.

2.1. Задачі з фіксованими масою, калібром, початковою глибиною та кінцевою швидкістю

Розглянемо спочатку випадок фіксованої кінцевої швидкості. Тоді рівняння (7) набуває вигляду

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma) = \frac{16\alpha(1-\alpha)}{\pi} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (16)$$

$$\bar{S} = \frac{SD_b}{U} \sqrt{\frac{\rho g}{m}}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1 D_b}{U} \sqrt{\frac{\rho g}{m}}. \quad (17)$$

Для визначення максимального пройденого за інерцією шляху продиференціюємо обидві частини рівняння (16) по U_0 :

$$\bar{S}' [\bar{h}_1 - 2\bar{S} \sin \gamma] = \frac{16\alpha(1-\alpha)}{\pi U_0}. \quad (18)$$

Тут враховано, що кінцеве число кавітації і відповідно довжина тіла α не залежать від початкової швидкості. Для руху донизу ($\gamma \leq 0$) квадратні дужки в лівій частині рівняння (18) завжди додатні. Для руху догори ($\gamma > 0$) вони можуть бути також від'ємними, але розглянемо спочатку випадок великих початкових глибин, достатніх для того, щоб вираз у квадратних дужках у рівнянні (18) був додатнім. Тоді похідна \bar{S}' весь час додатня, і для збільшення дальності потрібно максимально збільшувати початкову швидкість. Такий тривіальний розв'язок властивий і випадку $\alpha > 0.5$, а також всім п'яти згаданим у вступі ізопериметричним задачам.

Для додатніх значень кута γ (рух тіла догори) розв'язки рівняння (16) існують не для всіх \bar{h}_1 , а лише для значень, більших певного критичного. Дійсно, з рівняння (18) видно, що при $\gamma > 0$ вираз у квадратних дужках може прямувати до нуля, що приводить до нескінченних значень похідної \bar{S}' , тобто до нескінченно великого зростання дальності при нескінченно малому зростанні величини U_0 . Критичні значення безрозмірної початкової глибини можна визначити шляхом занулення виразу в квадратних дужках рівняння (18) і врахування співвідношення (16):

$$\bar{h}_1^{(cr)} = 8 \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha) \sin \gamma}{\pi} \ln \frac{U_0}{U}}. \quad (19)$$

Досягнення критичного значення початкової глибини свідчить, що тіло виходить з води в режимі суперкавітації (без замивання). Тому дальність для руху догори з початковими глибинами, меншими критичного значення, практично задається простим геометричним співвідношенням

$$S = \frac{h_0}{\sin \gamma}.$$

В інших випадках дальність визначається з квадратного рівняння (16). Зокрема, для горизонтального руху ($\gamma = 0$, $h_0 = h$, $h_1 = h_2$) можна користуватись формулами (7)–(9).

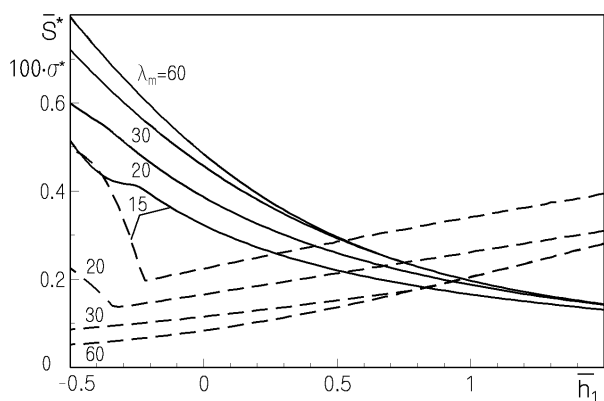


Рис. 3. Залежності максимальної дальності \bar{S}^* та оптимального кінцевого числа кавітації σ^* для різних значень λ_m при $\bar{N} = 10^{-7}$, $\gamma = -90^\circ$

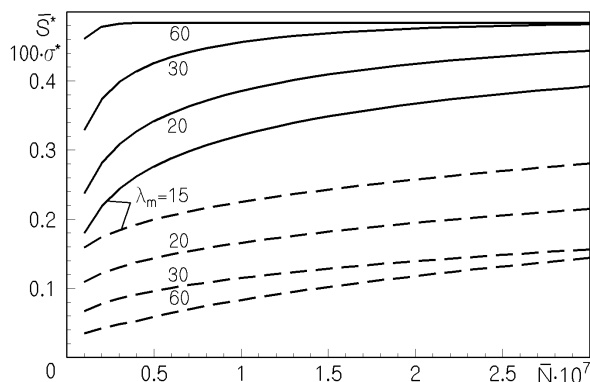


Рис. 4. Залежності максимальної дальності \bar{S}^* та оптимального кінцевого числа кавітації σ^* для різних значень λ_m при $h_1 = 0$, $\gamma = -90^\circ$

2.2. Задачі з фіксованими масою, калібром, початковими глибиною та швидкістю

Якщо поряд з масою, калібром та початковою глибиною зафіксовано ще й початкову швидкість, то рівняння (7) набуває вигляду

$$\bar{S}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma) = -\frac{16\alpha(1-\alpha)\bar{U}^2}{\pi} \ln \bar{U}, \quad (20)$$

$$\bar{S} = \frac{SD_b}{U_0} \sqrt{\frac{\rho g}{m}}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1 D_b}{U_0} \sqrt{\frac{\rho g}{m}}. \quad (21)$$

Оскільки довжина тіла α залежить від числа кавітації (див. (8)), то знаходження максимуму дальності значно ускладнюється порівняно з випадком $\alpha > 0.5$, що розглядався в [7]. Зокрема, оптимальне значення безрозмірної швидкості більше не задається рівнянням (11), а розв'язок задачі залежить ще від одного безрозмірного параметра

$$\bar{N} = \frac{mg}{\rho U_0^2 D_b^2},$$

оскільки кінцеве число кавітації можна представити у вигляді

$$\sigma = \frac{2\sqrt{\bar{N}}(\bar{h}_1 - \bar{S} \sin \gamma)}{\bar{U}^2}. \quad (22)$$

Приклади чисельного визначення максимальної дальності з використанням рівнянь (8), (20), (22) наведені на рис. 3–5. Суцільними лініями показані значення максимального шляху \bar{S}^* , штриховими – оптимального кінцевого числа кавітації σ^* , з використанням якого за формулами (1)–(4) можна визначити форму оптимального тіла так, щоб воно

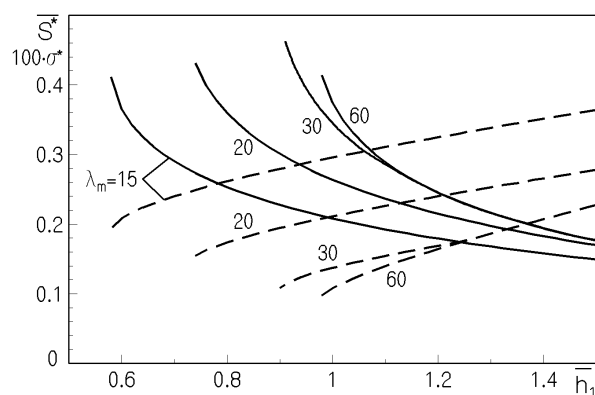


Рис. 5. Залежності максимальної дальності \bar{S}^* та оптимального кінцевого числа кавітації σ^* для різних значень λ_m при $\bar{N} = 10^{-7}$, $\gamma = 90^\circ$

було вписаним у відповідну каверну, а його діаметр збігався з діаметром каверни при $\bar{x} = \alpha$.

З рис. 3 – 5 видно, що зростання видовження тіла збільшує максимальну дальність, але ці відмінності суттєві лише при дуже малих значеннях безрозмірного параметра \bar{N} (див. рис. 4). Для випадків $\bar{N} > 5 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_m > 15$ можна не зважати на відмінності у видовженні тіла і користуватись результатами, викладеними в [7].

Цікаво відзначити немонотонну залежність оптимального кінцевого числа кавітації від параметра h_1 . Зокрема, відповідні функції можуть мати мінімум (див. рис. 3) при $h_1 < 0$ (випадок штучної кавітації). Даний факт заслуговує додаткових досліджень і ймовірно пояснюється нелінійним характером рівнянь (8), (20).

Чисельний аналіз показав, що для додатніх значень кута γ (рух тіла догори) розв'язки рівняння (20) існують не для всіх \bar{h}_1 , а лише для значень,

більших певного критичного. Ситуація є подібною до викладеної в підрозділі 2.1, але для критичних значень глибини не можна отримати простої формули, подібної до (19) або співвідношень, наведених в [7]. Досягнення критичного значення початкової глибини свідчить, що тіло виходить з води в режимі суперкавітації (без замивання).

Оцінки критичних значень початкової глибини можна побачити на рис. 5. Зростання видовження тіла збільшує значення $\bar{h}_1^{(cr)}$ і наближається до отриманого в [7]

$$\bar{h}_1^{(cr)} = \sqrt{\frac{8 \sin \gamma}{\varepsilon \pi}}.$$

Як вже було зауважено, відмінності у розв'язках даної ізопериметричної задачі (відповідно і у величинах $\bar{h}_1^{(cr)}$) стають помітними лише при дуже малих значеннях безрозмірного параметра \bar{N} .

ВИСНОВКИ

Розглянуті задачі максимізації відстані, пройденої осесиметричним суперкавітуючим тілом за інерцією під довільним кутом до горизонту у випадку дуже великих швидкостей та товстих насадків. Сформульовані та розв'язані різні ізопериметричні задачі з фіксованими значеннями маси, кінетичної енергії, видовження та калібру тіла. Запропоновані два безрозмірні параметри \bar{H} та \bar{N} , що впливають на розв'язки задач з фіксованими кінцевою та початковою глибиною відповідно. Показано, що при малих значеннях цих параметрів оптимальні форми тіл можуть використовувати лише носову частину каверни. Використання тіл з великими значеннями видовження може значно збільшити максимальну дальність.

Отримані аналітичні і чисельні розв'язки для максимальної дальності та оптимальної форми тіла. Показано, що у випадку висхідного суперкавітаційного руху можливе різке збільшення дальності та вихід тіла на поверхню при нескінченно

малому перевищенні деякого критичного значення початкової глибини. Розраховані відповідні значення критичних глибин. Тіла найбільшого видовження виходять на поверхню без втрати суперкавітаційного режиму обтікання з більших глибин.

Подальших досліджень заслуговують уточнення форми оптимальних тіл при дуже малих значеннях відношення довжин тіла і каверни в момент замивання, через обмежену точність використаних в даній роботі формул Гарабедяна. Цікаво також дослідити випадок тонких кавітаторів.

1. Путилин С. И. Некоторые особенности динамики суперкавитирующих моделей // Прикладна гідромеханіка.– 2000.– Т. 2 (74), N 3.– С. 65-74.
2. Gieseke T.J. Toward an optimal weapon system utilizing supercavitating projectiles// Int. Conference on Cavitation "Cav2001".– Pasadena, USA: – 2001.
3. Serebryakov V.V. The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water// Int. Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics". Cheboksary, Russia. – 2002. –С. 71-92.
4. Нестерук І. Г., Семенов В.М. Задачі оптимізації для суперкавітаційного руху осесиметричних тіл за інерцією // Прикладна гідромеханіка.– 2006.– Т. 8 (80), N 1.– С. 51-59.
5. Нестерук І. Г., Савченко Ю.М., Семенов В.М. Оптимізація дальності для суперкавітаційного руху за інерцією // Доповіді НАН України.– 2006.– N 8.– С. 57-66.
6. Нестерук І. Г., Семенов В.М. Задачі оптимізації дальності суперкавітаційного руху за інерцією з фіксованою кінцевою глибиною // Прикладна гідромеханіка.– 2006.– Т. 8 (80), N 4.– С. 33-42.
7. Нестерук І. Г. Задачі оптимізації дальності суперкавітаційного руху за інерцією з фіксованою початковою глибиною // Прикладна гідромеханіка.– 2008.– Т. 6 (78), N 3.– С. 64-75.
8. Nesteruk I. Hull optimization for high-speed vehicles: supercavitating and unseparated shapes // International Conference SuperFAST2008.– July 2-4, 2008.– Saint-Petersburg, Russia.– P. 1-15.
9. Нестерук І. Г. Зменшення опору видовжених осесиметричних високошвидкісних тіл // Прикладна гідромеханіка.– 2009.– Т. 7 (79), N 2.– С. 55-67.
10. Garabedian P.R. Calculation of axially symmetric cavities and jets // Pac. J. Math.– 1956.– Vol. 6, No. 4.– P. 611-684.