Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

С. С. Зуб

Каноническая пуассонова структура на T*SE(3) и гамильтонова механика твердого тела. Динамика магнитного диполя во внешнем поле

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. С. Ляшко)

Рассматривается каноническая пуассонова структура на кокасательном расслоении $T^*SE(3)$ как основа для гамильтоновой механики твердого тела. Вычислены скобки Пуассона для базовых динамических переменных в различных представлениях. Предлагается "смешанное" представление, в котором поступательные степени свободы описываются в инерциальной системе отсчета, а вращательные — в системе отсчета, связанной с телом. Выведены уравнения движения для магнитного диполя во внешнем поле.

Теоретико-групповые методы гамильтоновой динамики доказали свою эффективность во многих задачах механики [1–4]. Динамическая система с симметрией описывается как симплектическое или пуассоново многообразие с действующей на нем группой Ли и инвариантной относительно этого действия функцией Гамильтона системы.

В частном, но важном случае группа Ли сама является конфигурационным пространством механической системы [1, 2, 5]. Именно такой случай реализуется в динамике твердого тела. Наиболее естественным конфигурационным пространством для твердого тела является расслоение $O^+(E^3)$ ортонормированных ориентированных триад над 3-мерным евклидовым пространством E^3. Также естественно считать, что точка закрепления репера находится в центре инерции тела, а векторы триады являются главными осями тензора инерции тела. По сути, такое описание восходит к Эйлеру.

Группа $SE(3)$ действует на $O^+(E^3)$ как группа движений евклидового пространства, сохраняющих ориентацию. При этом действии векторы исходного ортонормированного репера (триады) становятся векторами нового ортонормированного репера. Это действие транзитивно. Таким образом, если зафиксировать некоторую систему отсчета, т. е. точку прикрепления репера и его векторы, то любая другая система отсчета может быть получена из исходной одним и только одним преобразованием группы $SE(3)$. Это означает, что расслоение $O^+(E^3)$ покрывается единственной картой, и эта карта имеет структуру группы

$SE(3)$, которая и может рассматриваться в качестве конфигурационного пространства для твердого тела.

Как правило, для описания физических векторных величин используется либо инерциальная система отсчета (иногда говорят о данном векторе относительно пространства), либо система отсчета, связанная с телом (и тогда говорят о данном векторе относительно тела). Следует подчеркнуть, что далее мы будем иметь дело только с арифметическим векторами, т. е. с набором компонент физической векторной величины относительно оговоренной системы отсчета, например, $\boldsymbol{p}$-компоненты импульса тела в инерциальной системе отсчета, $\boldsymbol{\pi}$-компоненты собственного момента импульса в инерциальной системе отсчета, $\boldsymbol{P}$-компоненты импульса тела в системе отсчета, связанной с телом, $\mathbf{\Pi}$-компоненты собственного момента импульса в системе отсчета, связанной с телом. Что же касается положения центра инерции тела, то компоненты этого арифметического вектора имеют смысл только в инерциальной системе отсчета [2, с. 59] и имеют смысл скорее параметров группы $SE(3)$, нежели компонент физического вектора.

Для понимания физического смысла описания динамики наиболее подходящей является инерциальная система отсчета. По крайней мере, поступательное движение тела наиболее естественно описывать именно в инерциальной системе.

С другой стороны, как известно, кинетическая энергия вращательного движения (а, значит, соответствующий вклад в гамильтониан) наиболее просто записывается в системе отсчета, связанной с телом.

В данной работе предлагается "смешанное" представление в динамике твердого тела, описывающее поступательные степени свободы в инерциальной системе, а вращательные степени свободы — в системе отсчета, связанной с телом.

В качестве интересного приложения предложенного подхода выведены уравнения движения для магнитного диполя во внешнем поле, где, в отличие от работ [3, 6, 7], магнитный диполь рассматривается как произвольное (т. е., возможно, асимметричное) магнитное тело с произвольно направленным относительно тела магнитным моментом.

Группа $SE(3)$ и ее алгебра Ли. Приведем базовые соотношения для группы $G = SE(3)$ и ее алгебры Ли $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{se(3)}$ [1, 2]. Группа $SE(3)$ является полупрямым произведением своего нормального делителя $\mathbb{R}^3$ и подгруппы $SO(3)$, следовательно, произвольный элемент группы может быть записан в виде пары $(\boldsymbol{X}, \mathbf{R})$, где вектор $\boldsymbol{X}$ представляет трансляцию в евклидовом пространстве, а матрица $\mathbf{R}$ обладает свойствами

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \qquad \det(\mathbf{R}) = 1. \tag{1}$$

Закон умножения определяется выражением

$$(\boldsymbol{X}_1, \mathbf{R}_1)(\boldsymbol{X}_2, \mathbf{R}_2) = (\boldsymbol{X}_1 + \mathbf{R}_1[\boldsymbol{X}_2], \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2). \tag{2}$$

Таким образом, единицей группы является $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, трансляции представляются элементами вида $(\boldsymbol{X}, \mathbf{1})$, вращения — элементами вида $(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, а обратный элемент имеет вид

$$(\boldsymbol{X}, \mathbf{R})^{-1} = (-\mathbf{R}^{-1}[\boldsymbol{X}], \mathbf{R}^{-1}). \tag{3}$$

Внутренний автоморфизм группы, соответствующий элементу $g = (\boldsymbol{X}, \mathbf{R})$, определяется действием на произвольный элемент группы $h = (\boldsymbol{Y}, \mathbf{Q})$

$$I_g(h) = ghg^{-1} = (\mathbf{R}[\boldsymbol{Y}] + (\mathbf{1} - \mathbf{RQR}^{-1})[\boldsymbol{X}], \mathbf{RQR}^{-1}). \tag{4}$$

Дифференцируя по h, находим присоединенное действие g на элемент алгебры Ли $\xi = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Omega})$

$$\mathrm{Ad}_{(\boldsymbol{X},\mathbf{R})}[(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Omega})] = (\mathbf{R}[\boldsymbol{V}] - \mathbf{R}[\boldsymbol{\Omega}] \times \boldsymbol{X}]), \mathbf{R}[\boldsymbol{\Omega}]). \tag{5}$$

Повторно дифференцируя по g, находим скобку Ли $[\xi, \eta]$ двух элементов $\xi = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{\Omega}_1)$ и $\eta = (\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{\Omega}_2)$

$$\mathrm{ad}_{(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{\Omega}_1)}[(\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{\Omega}_2)] = [(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{\Omega}_1), (\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{\Omega}_2)] = (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2). \tag{6}$$

Пусть $\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0})$ — базисные элементы, соответствующие трансляциям в алгебре Ли $\boldsymbol{se(3)}$, а $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\epsilon}_i)$ — базисные элементы, соответствующие вращениям в $\boldsymbol{se(3)}$, тогда алгебра Ли $\boldsymbol{se(3)}$ и ее структурные константы определяются соотношениями

$$[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = 0, \qquad [\boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{\epsilon}_j] = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\epsilon}_k, \qquad [\boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{e}_j] = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k. \tag{7}$$

Соответствующий кобазис в $\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{se(3)}^*$ — пространстве, сопряженном к алгебре Ли $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{se(3)}$, обозначим $\boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{\epsilon}^i$, $i = 1, 2, 3$.

Операторы, сопряженные к (5), образуют коприсоединенное представление группы G в пространстве $\boldsymbol{g}^*$

$$\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}[\boldsymbol{\mu}] = \mathrm{Ad}^*_{(\boldsymbol{X},\mathbf{R})^{-1}}[(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Pi})] = (\mathbf{R}[\boldsymbol{P}], \boldsymbol{X} \times \mathbf{R}[\boldsymbol{P}] + \mathbf{R}[\boldsymbol{\Pi}]), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Pi}) \in \boldsymbol{g}^*$; физический смысл $\boldsymbol{P}$ — импульс тела в системе отсчета, связанной с телом, а $\boldsymbol{\Pi}$ — собственный момент импульса тела в той же системе.

Представление левой и правой тривиализации для $\boldsymbol{T^*SE(3)}$. Кокасательное расслоение любого многообразия локально тривиально [8], однако о кокасательном расслоении к группе Ли можно сказать больше, а именно: оно является глобально тривиальным, т. е. допускает представление в виде прямого произведения.

Представление *левой тривиализации* определено в [5]

$$\lambda_t = \tau_G \times \boldsymbol{\epsilon} \colon T(G) \mapsto G \times \boldsymbol{g}, \qquad \lambda_{ct} = \pi_G \times \boldsymbol{J}_R \colon T^*(G) \mapsto G \times \boldsymbol{g}^*, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ — 1-форма Маурера–Картана, принимающая значения в $\boldsymbol{g}$ [8], а $\boldsymbol{J}_R$ — отображение момента, соответствущее действию группы G на себе правыми сдвигами [1]

$$\boldsymbol{J}_R \colon T^*(G) \mapsto \boldsymbol{g}^*, \qquad \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) = T^*_e L_a \alpha_a. \tag{10}$$

Аналогично определяется представление правой тривиализации. Переход между этими представлениями дан в [1, 5, 9].

В [1, 9] показано, что при теоретико-групповом описании механики твердого тела левой тривиализации соответствует система отсчета, связанная с телом, а правой тривиализации соответствует инерциальная система.

Таким образом, элемент $T^*SE(3)$ в представлении *левой тривиализации* описывается четверкой $((\boldsymbol{X}, \mathbf{R}), (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Pi}))$, где $\boldsymbol{X}$ — положение центра масс тела; $\mathbf{R}$ — поворот тела относительно опорной (инерциальной) системы отсчета; $\boldsymbol{P}$ — импульс тела в системе отсчета, связанной с телом, а $\boldsymbol{\Pi}$ — собственный момент импульса тела в той же системе.

Для построения гамильтоновой динамики на $T^*SE(3)$ достаточно задать полный набор скобок Пуассона (с. П.) для указанных выше переменных и функцию Гамильтона системы.

Общее выражение для с. П. динамических переменных (д. п.) F и H на кокасательном расслоении к произвольной группе Ли дано в [5]

$$\{F, H\}_{|(a,\mu)} = (\delta_g F \delta_\mu H - \delta_g H \delta_\mu F - \langle \mu, [\delta_\mu F, \delta_\mu H] \rangle)_{|(a,\mu)} \tag{11}$$

(в нашем случае $a = (\boldsymbol{X}, \mathbf{R})$ $\mu = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Pi})$).

Дифференциал δ_μ — это обычный дифференциал по переменным $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{\Pi}$, а δ_g требует для своего определения знания формы Маурера–Картана для группы $G = T^*SE(3)$. Имеем [8 с. 136, форм. (19)]

$$(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{\epsilon}^i{}_j)_{|(\boldsymbol{X},\mathbf{R})} = ((R^{-1})^i{}_l dX^l, (R^{-1})^i{}_l dR^l{}_j) \tag{12}$$

(в нашем случае геометрия евклидова, верхние и нижние индексы равноправны, выполняется $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$).

Рассмотрим касательный вектор на группе $(\dot{X}^i, \dot{R}^i{}_j)$ и выразим его через компоненты $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Omega})$ в выбранном выше представлении левой тривиализации, используя (12). Имеем

$$\dot{X}_i = R_{il} V^l, \qquad \dot{R}^i{}_j = R^i{}_l \Omega^l{}_j, \tag{13}$$

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ilj} \Omega_l, \qquad \Omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ilj} \Omega_{ij}. \tag{14}$$

Тогда для произвольной д. п. F

$$\dot{F} = R^{-1}_{li} \frac{\partial F}{\partial X^i} v^l + R^{-1}_{li} \frac{\partial F}{\partial R_{ij}} \omega_{lj}, \tag{15}$$

откуда следует выражение для дифференциала δ_g

$$\delta_g F = \left(\left(R^{-1}_{ik} \frac{\partial F}{\partial X^k} \right) \boldsymbol{e}^i, \left(\varepsilon_{jik} R^{-1}_{jl} \frac{\partial F}{\partial R_{lk}} \right) \boldsymbol{\epsilon}^i \right). \tag{16}$$

Рассмотрим дифференциалы δ_g и δ_μ для базовых д. п.

$$\begin{cases} \delta_g X_j = (R_{jk} \boldsymbol{e}^k, 0), \qquad \delta_\mu X_j = 0, \\ \delta_g R_{ij} = (0, \varepsilon_{ijk} R_{ik} \boldsymbol{\epsilon}^i), \qquad \delta_\mu R_{ij} = 0, \\ \delta_g P_j = 0, \qquad \delta_\mu P_j = (\boldsymbol{e}_j, 0), \\ \delta_g \Pi_j = 0, \qquad \delta_\mu \Pi_j = (0, \boldsymbol{\epsilon}_j). \end{cases} \tag{17}$$

Из этих выражений и универсальной формулы (11) в системе, связанной с телом, получаем следующие базовые с. П. (только отличные от 0):

$$\begin{cases} \{X_i, P_j\} = R_{ij}, \qquad \{\Pi_i, P_j\} = -\varepsilon_{ijk} P_k, \\ \{\Pi_i, \Pi_j\} = -\varepsilon_{ijk} \Pi_k, \qquad \{\Pi_k, R_{ij}\} = -\varepsilon_{kjl} R_{il}. \end{cases} \tag{18}$$

Как показано в [1, 5, 9], переход от левой тривиализации к правой сводится к $(a, \mu) \to$ $\to (a, Ad^*{}_{a^{-1}}[\mu])$, что с учетом выражения (8) для оператора коприсоединенного представления приводит к следующей замене переменных, являющейся каноническим преобразованием:

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{R}[\boldsymbol{P}], \qquad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{R}[\boldsymbol{\Pi}], \qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\pi}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс тела в инерциальной системе отсчета; $\boldsymbol{\pi}$ — собственный момент импульса тела; $\boldsymbol{j}$ — полный момент импульса в той же системе, переменные $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$ и $\mathbf{R}$ не преобразуются.

Используя свойства с. П. [1, 6, 10], получаем следующие *ненулевые* с. П. для базовых д. п. в представлении *правой тривиализации*, т. е. в инерциальной системе отсчета

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l, \qquad \{\pi_i, R_{jk}\} = \varepsilon_{ijl}R_{lk}. \tag{20}$$

Скобки Пуассона для базовых динамических переменных в "смешанном" представлении. В отличие от преобразования (19), при переходе к "смешанной" системе преобразуем только импульс тела

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{R}[\boldsymbol{P}]. \tag{21}$$

Используя свойства с. П. и (18), нетрудно получить в этом случае следующие *ненулевые* с. П. для базовых д. п.

$$\{x_i, p_k\} = \delta_{ik}, \qquad \{\Pi_i, \Pi_j\} = -\varepsilon_{ijk}\Pi_k, \qquad \{\Pi_k, R_{ij}\} = -\varepsilon_{kjl}R_{il}. \tag{22}$$

Как видим, в этом случае поступательные и вращательные степени свободы имеют нулевые взаимные с. П.

Еще одним важным преимуществом "смешанного" представления является простое выражение вращательной кинетической энергии тела

$$T_{\text{spin}}((\boldsymbol{x}, \mathbf{R}), (\boldsymbol{p}, \mathbf{\Pi})) = \frac{1}{2}\mathbf{\Pi}\mathbb{I}^{-1}\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2}\Pi_i\mathbb{I}^{-1}_{ik}\Pi_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3}\right), \tag{23}$$

так как матрица $\mathbb{I}$ тензора инерции тела в системе отсчета, связанной с телом, имеет постоянные элементы.

Уравнения движения для магнитного диполя во внешнем поле в "смешанном" представлении. Под магнитным диполем будем понимать намагниченное малое твердое тело. Силы, действующие на диполь, следуют из уравнений магнитостатики, а его движение подчиняется законам динамики твердого тела.

В отличие от работ [3, 4, 7], тело не обладает дополнительной симметрией.

Для функции Гамильтона имеем следующее выражение:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + T_{\text{spin}} + V, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — постоянный арифметический вектор компоненты магнитного момента тела в системе отсчета, связанной с телом,

$$V((\mathbf{x}, \mathbf{R}), (\mathbf{p}, \mathbf{\Pi})) = -\langle \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}), \mathbf{R}[\boldsymbol{\mu}]\rangle = -B_i R_{ik}\mu_k. \tag{25}$$

Вычисляя с. П. гамильтониана с базовыми д. п., получаем скорость их изменения во времени по формуле $\dot{F} = \{F, H\}$, и тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{x}, H\} = \dfrac{\boldsymbol{p}}{M}, \\ \{p_i, H\} = \langle \partial_i \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}), \widehat{R}[\boldsymbol{\mu}]\rangle = B_{j,i}R_{jk}\mu_k, \\ \dot{R}_{ij} = \{R_{ij}, H\} = -\varepsilon_{jrt}\Omega_r R_{it}, \qquad \Omega_r = \mathbb{I}^{-1}_{rs}\Pi_s \longrightarrow R^{-1}_{ki}\dot{R}_{ij} = \varepsilon_{krj}\Omega_r, \\ \dot{\mathbf{\Pi}} = \{\mathbf{\Pi}, H\} = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Pi} + \boldsymbol{\mu} \times \widehat{R}^{-1}[\boldsymbol{B}]. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, нами получены уравнения движения для магнитного диполя во внешнем поле.

1. *Marsden J., Ratiu T.* Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems // Texts in Appl. Math. 17. – New York: Springer, 1994. – 553 p.
2. *Борисов А. В., Мамаев И. С* Динамика твердого тела. – Ижевск: РХД, 2001. – 384 с.
3. *Зуб С. С.* Орбитрон: Устойчивость орбитального движения магнитного диполя // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2013. – **111**, № 1. – С. 101–116.
4. *Зуб С. С.* Дослідження стійкості орбітального руху в системі двох магнітно взаємодіючих тіл // Вісн. Київ. нац. ун-та. – 2011. – № 2. – С. 176–184.
5. *Зуб С. С.* Группа Ли как конфигурационное пространство для простой механической системы // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2013. – **112**, № 2. – С. 84–93.
6. *Зуб С. С.* Гамильтонов формализм для магнитного взаимодействия свободных тел // Там же. – 2010. – **102**, № 3. – С. 49–62.
7. *Dullin H. R., Easton R. W.* Stability of levitrons // Physica D. – 1999. – **126**, No 1. – P. 1–17.
8. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. – Москва: Мир, 1975. – 348 с.
9. *Abraham R., Marsden J. E.* Foundations of mechanics. – Reading, MA: Benjamin, 1978. – 806 p.
10. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. – Ижевск: РХД, 1999. – 464 с.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 09.09.2013

С. С. Зуб

Канонічна пуассонова структура на T*SE(3) та гамільтонова механіка твердого тіла. Динаміка магнітного диполя в зовнішньому полі

Розглядається канонічна пуассонова структура на кодотичному розшаруванні $T^*SE(3)$ *як основа для гамільтонової механіки твердого тіла. Знайдено дужки Пуассона для базових динамічних змінних у різних зображеннях. Пропонується "змішане" зображення, в якому поступальні ступені свободи описуються в інерціальній системі відліку, а обертальні — в системі відліку, що пов'язана з тілом. Виведено рівняння руху для магнітного диполя в зовнішньому полі.*

S. S. Zub

Canonical Poisson structure on T*SE(3) and the Hamiltonian mechanics of solids. Dynamics of a magnetic dipole in the external field

We consider a canonical Poisson structure on the cotangent bundle $T^*SE(3)$ *as a basis for the Hamiltonian mechanics of solids. The Poisson brackets for base dynamic variables are calculated in the different representations. We propose a "mixed" representation so that the forward and rotatory degrees of freedom are described in an inertial reference frame and in the body frame, respectively. The equation of motion is obtained for a magnetic dipole in the external field.*