УДК 622.002.5-752:621.888.6

А.В. Новикова, магистр, мл. научн. сотр.
(ИГТМ НАН Украины)

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

**Аннотация**. В работе рассматриваются вынужденные колебания одномассной системы с упругими связями на примере системы виброизоляции с резиновыми амортизаторами. Приведено решение задачи в линейной и нелинейной постановках. При этом в линейной постановке механическая реакция резины описывается интегральными соотношениями типа Больцмана-Вольтерра.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, виброизоляторы сжатия, эффективность виброизоляции, коэффициент виброизоляции

A.V. Novikova, Master of Science (Tech.), Junior Researcher
(IGTM NAS of Ukraine)

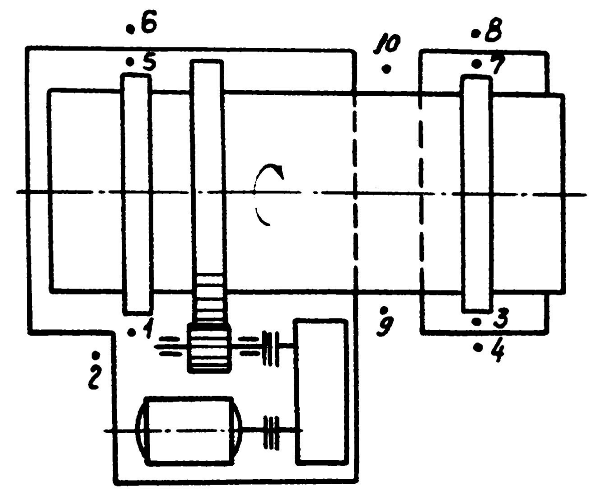
# FORCED OSCILLATIONS OF SYSTEMS WITH ELASTIC BONDS

**Abstract.** We consider forced oscillations of one-mass system with elastic links on the example of vibration isolation system with rubber shock absorbers. Solutions of a problem in linear and nonlinear formulation are given. A mechanical reaction of rubber is described by integral relations Boltzman-Volterra type in the linear formulation.

**Keywords:** forced oscillations, compression vibroinsulators, vibration insulation effectiveness, vibration insulation coefficient

**Введение.** В настоящей работе рассматриваются вынужденные колебания системы с резиновыми упругими звеньями. Пример такой колебательной системы показан на рисунке 1 в виде окомкователя аглофабрик, установленного на резиновые виброизоляторы сжатия.

При эксплуатации таких машин наблюдаются значительные вибрации как самих машин, так и перекрытий зданий. Для уменьшения этих вибраций использовалась система виброизоляции.




1, 2, 3, 4 – точки замеров виброскоростей колебаний рам и перекрытия

Рис. 1 – Схема окомкователя

**Линейная постановка задачи**. Уравнение колебаний одномассной системы (рис. 1) можно записать в виде [1]:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = P\sin\omega t\,. \tag{1}$$

где $\omega$ – частота вынужденных колебаний системы;

$\omega_0$ – собственная частота колебаний системы;

$P$ – амплитуда возмущающей силы.

Будем считать, что механическая реакция резины описывается интегральными соотношениями типа Больцмана-Вольтерра с ядрами релаксации и последействия. Тогда уравнение (1) в операторной форме можно записать так

$$\ddot{y} + C_t y = q_1 \sin \omega t, \qquad (2)$$

где $q_1$ – сила инерции, приходящаяся на единицу колеблющейся массы;
$C_t$ – оператор жёсткости упругой подвески

$$C_t = C_0 \left[ 1 - \chi Э_\alpha^* \left( -\beta \right) \right], \qquad (3)$$

$$Э_\alpha^* \left( -\beta \right) \varepsilon \left( t \right) = \int_0^t Э_\alpha \left( -\beta, t - \tau \right) \varepsilon \left( \tau \right) d\tau, \qquad (4)$$

$$Э_\alpha \left( -\beta, t - \tau \right) = \left( t - \tau \right)^\alpha \sum_{n-0}^{\infty} \frac{\left( -\beta \right)^n \left( t - \tau \right)^{n(n+1)}}{\Gamma \left[ (n+1)(1+\alpha) \right]}, \qquad (5)$$

где $C_0$ – мгновенное значение жёсткости упругой подвески;
$Э_\alpha(-\beta,\ t-\tau)$ – экспоненциальная функция дробного порядка Ю. Работнова;
$\alpha$, $\beta$, $\lambda$ – реологические параметры резины;
$\Gamma$ – гамма-функция.

Цель виброзащиты состоит либо в уменьшении амплитуды силы $R_0$ на опорную конструкцию (раму, перекрытие, фундамент), т.е.

$$R_0 = \frac{F_0 \sqrt{\omega_0^2 + 4n^2\omega^2}}{\sqrt{\left( \omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4n^2\omega^2}}, \qquad (6)$$

либо в уменьшении амплитуды $A_0$ стационарных колебаний корпуса машины, т.е.

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left( \omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4n^2\omega^2}}. \qquad (7)$$

Введём безразмерные коэффициенты эффективности виброзащиты:

$$\eta = \frac{R_0}{F_0}; \quad K_a = \frac{cA_0}{F_0}. \qquad (8)$$

Величину $\eta$ обычно называют коэффициентом виброизоляции, а величину $K_a$ – коэффициентом динамичности. Тогда

$$\eta = \sqrt{\frac{1 + 4\nu^2 \mathrm{Z}^2}{\left( 1 - \mathrm{Z}^2 \right)^2 + 4\nu^2 \mathrm{Z}^2}}; \qquad (9)$$

$$K_a = \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \mathrm{Z}^2 \right)^2 + 4\nu^2 \mathrm{Z}^2}}, \qquad (10)$$

где $$\mathrm{Z} = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \nu = \frac{n}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{cm}}; \quad n = \frac{b}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}};$$

$b$ – коэффициент демпфирования упругой системы;
$\nu$ – относительное демпфирование упругой системы: при $\nu = 1$ в системе реализуется критическое демпфирование.

Коэффициент виброизоляции можно представить также в виде

$$\eta = \frac{\sqrt{\left(1+Z^2\right)^2 \frac{4\psi^2}{16\pi^2+\psi^2}}}{\sqrt{\left(1-Z^2\right)^2 + Z^2 \frac{4\psi^2}{16\pi^2+\psi^2}}}. \tag{12}$$

Здесь коэффициент диссипации $\psi$ либо определяется экспериментально, либо при известных реологических параметрах резины $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ вычисляется по формуле $\psi = 2\pi B(\omega)$. В этом случае формула (12) принимает вид

$$\eta = \frac{\sqrt{\left(1+Z^2\right)^2 \frac{16\pi^2 B^2(\omega)}{16\pi^2+4\pi^2 B^2(\omega)}}}{\sqrt{\left(1-Z^2\right)^2 + Z^2 \frac{16\pi^2 B^2(\omega)}{16\pi^2+4\pi^2 B^2(\omega)}}}. \tag{13}$$

Эффективность виброизоляции при этом равна

$$Э = \left(1-\eta\right)\cdot 100\%. \tag{14}$$

Коэффициент динамичности

$$K_a = \sqrt{\left(1-Z^2\right)^2 + \psi^2 Z^2}\ , \tag{15}$$

или с учётом $\psi = 2\pi B(\omega)$

$$K_a = \sqrt{\left(1-Z^2\right)^2 + 4\pi B^2(\omega) Z^2}. \tag{16}$$

**Нелинейная постановка задачи.** Механическая реакция нелинейных амортизаторов в ряде случаев достаточно хорошо описывается нелинейной зависимостью

$$F(t) = m p_t^2 y(t) + m\varepsilon_t y^3(t), \tag{17}$$

где $F(t)$ – усилие;

$m$ – масса тела;

$p_t^2 = p_0(1\text{-}K^*)$;

$\varepsilon_t = \varepsilon_0(1\text{-}K^*)$;

$K^*$ – оператор релаксации;

$P_0$ и $\varepsilon_0$ – параметры, вычисленные в предположении об идеальной упругости материала;

$y(t)$ – перемещение.

Для геометрически нелинейных виброизоляторов используют аналог уравнения Дюффинга

$$\ddot{y} + p_t^2 + \varepsilon_t y^3 = F\sin\omega t. \tag{18}$$

Решение этого уравнения находится в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_t^n y_n. \tag{19}$$

Равномерная сходимость ряда (19) обеспечена, если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_0^n y_n \tag{20}$$

сходится равномерно. Действительно, если $|y_n| < M$, то

$$\varepsilon_t^n M = \varepsilon_0^n (1-R)^n M \le \varepsilon_0^n M, \tag{21}$$

где

$$R = \int_0^\infty K(z) dz \le 1. \tag{22}$$

Условие (22) вытекает из физической сущности процесса релаксации. Из (21) следует, что мажоранта ряда (20) является одновременно мажорантой ряда (19).

Подставляя (19) в (17) и приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon_t^n$, получаем бесконечную систему символико-дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{y} + p_t^2 y_0 = F\sin\omega t; \\ \ddot{y}_1 + p_t^2 y_1 = -y_0^3; \\ \ddot{y}_2 + p_t^2 y_2 = -3y_0^2 y_{1;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{23}$$

Процесс нахождения вспомогательных функций $y_n$ сводится, таким образом, к решению символико-дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{x} + p_t^2 x = Q_1 \sin n\omega t + Q_2 \cos n\omega t.$$

Опуская промежуточные выкладки, для решения уравнения (18) получаем следующее выражение [2]

$$\begin{aligned} y = &\left(a_1 + \varepsilon_t a_2 + \varepsilon_t^2 a_4 + \ldots\right)\sin\omega t + \left(b_1 + \varepsilon_t b_2 + \varepsilon_t^2 b_4 + \ldots\right)\cos\omega t + \\ &+\varepsilon_t\left(a_3 + \varepsilon_t a_5 + \ldots\right)\sin 3\omega t + \varepsilon_t\left(b_3 + \varepsilon_t b_5 + \ldots\right)\cos 3\omega t + \\ &+\varepsilon_t^2\left(a_6 + \ldots\right)\sin 5\omega t + \varepsilon_t^2\left(b_6 + \ldots\right)\cos 5\omega t + \ldots \end{aligned}$$

Для расшифровки произведения вида $\varepsilon_1^n \sin m\omega t$ и $\varepsilon_t^n \cos m\omega t$ в работе [3] получены следующие формулы:

$$\varepsilon_t^n \sin m\omega t = \varepsilon_0^n \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \left[\mathrm{Re}\left(A_m - iB_m\right)^j \sin m\omega t + \mathrm{Im}\left(A_m - iB_m\right)^j \cos m\omega t\right];$$

$$\varepsilon_t^n \cos m\omega t = \varepsilon_0^n \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \left[\mathrm{Re}\left(A_m + iB_m\right)^j \cos m\omega t + \mathrm{Im}\left(A_m + iB_m\right)^j \cos m\omega t\right],$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Если $\varepsilon_t = \varepsilon_0$, то для нахождения во втором приближении решения уравнения (18) целесообразно использовать метод Дюффинга. В качестве первого приближения примем

$$y_0 = T\sin\left(\omega t + \varphi\right). \tag{24}$$

Уравнение (17) перепишем в виде

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \left(\omega^2 + p_t^2 y\right) y - \varepsilon_0 y^3 + F\sin\omega t. \tag{25}$$

Подставляя в правую часть уравнения (25) выражение (24), получаем

$$\begin{aligned} y + \omega^2 y = &\left(T\mu\cos\varphi\right) + T\left(p_0^2 B_1 \sin\varphi + F\right)\sin\omega t + \\ &+T\left(\mu\sin\varphi - p_0^2 B_1\cos\varphi\right)\cos\omega t + 0{,}25\varepsilon_0 T^3 \sin\left(3\omega t + 3\varphi\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\mu = \omega^2 - p_0^2 - p_0^2 A_1 - 0{,}75T^2\varepsilon_0$.

Для исключения вековых членов необходимо положить

$$\begin{cases} T\mu\cos\varphi + Tp_0^2\sin\varphi + F = 0; \\ \mu\sin\varphi + p_0^2 B_1\cos\varphi = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Решая систему (27), находим

$$\varphi = -\mathrm{arctg}\, p_0^2 B_1 T / F,$$

где $T$ – амплитуда, определяемая уравнением

$$T^6 + 6\varepsilon_0^{-1}\left(\omega^2 - p_0^2 - p_0^2 A_1\right)T^4 + \left[\left(\omega^2 - p_0^2 - p_0^2 A_1\right)^2 + p_0^4 B_1^2 / F^2\right]\frac{\varepsilon_0^2}{16}T^2 - F^2 = 0. \tag{28}$$

Подставляя найденное из (28) значение амплитуды $T$ и угла $\varphi$ в (26) и решая при этом уравнение, получаем

$$y = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t - p\sin 3\omega t - z\cos 3\omega t,$$

где

$$p = \varepsilon_0 T^3\cos\varphi / 32\omega^2; \quad z = \varepsilon_0 T^3\sin 3\varphi / 32\omega^2.$$

Положив $y(0) = T\sin\varphi$, $\dot{y}(0) = \omega T\cos\varphi$, получим решение с уточнённой амплитудой колебания основного тона

$$y_1 = T_1\sin\left(\omega t + \varphi_1\right) - T_2\sin\left(3\omega t + \varphi_2\right),$$

где

$$T_1 = \sqrt{\left(T\cos\varphi + 3p\right)^2 + \left(T\sin\varphi + z\right)^2}; \quad T_2 = \sqrt{p^2 + z^2};$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\frac{T\sin\varphi + z}{T\cos\varphi + 3p}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{z}{p}.$$

Аналогично может быть получено второе приближение решения и для уравнения типа (18), но при этом оказывается, что амплитуда основного тона определяется уравнением пятой степени относительно $T_2$. Поэтому при решении уравнения типа (18) целесообразно использовать метод малого параметра, рассмотренный выше.

Рассмотрим случай, когда перемещение составляет (20-50) % высоты элемента сжатия. Такие деформации принято называть средними [4]. Цилиндрический амортизатор, первоначально поджатый на величину, превышающую амплитуду колебаний, служит упругой связью осциллятора с массой $m$. Уравнение колебаний при этом будет

$$\ddot{y} + G_t c(y) = f(t), \tag{29}$$

где $G_t = G_0(1-K^*)$;

$y$ – перемещение относительно положения установившегося равновесия;

$$c(y) = \frac{\pi^2}{16}F\left\{-\frac{32}{\pi^2}\ln\left(1 - \frac{b^2}{h_1^2}\right) + \frac{b^2}{h_1^2}\left[\frac{y}{h_1}\frac{2 - y/h_1}{\left(1 - y/h_1\right)^2}\right]\right\}; \quad f(t) = a\sin\omega t; \quad h - y_\infty = h_1; \tag{30}$$

$y_\infty$ – величина предварительного поджатия.

Стационарное решение уравнения (29) имеет вид

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\sin j\omega t + b_j\cos j\omega t. \tag{31}$$

Коэффициенты $a_j$ и $b_j$ определяются по методу Ритца-Галеркина либо непосредственно путем разложения $c(y)$ в ряд Фурье и приравнивания коэффициентов при $\sin j\omega t$ и $\cos j\omega t$, что сводит задачу к решению системы уравнений относительно $a_j$ и $b_j$.

В первом приближении

$$y = a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t; \quad c(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t \approx A_1 \sin\omega t + B_n \cos\omega t;$$

$$A_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} c\left(a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t\right)\sin\omega t dt; \quad B_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} c\left(a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t\right)\cos\omega t dt.$$

Для определения аналитической зависимости $A_1(a_1, b_1)$ и $B_1(a_1, b_1)$ целесообразно $c(y)$ представить в виде ряда по степеням y:

$$c(y) = \frac{\pi^2}{16} F\left\{-\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{y}{h_1}\right)^n + \frac{b^2 y}{h_1^3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{h_1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-2}^n \left(\frac{y}{h_1}\right)^n\right]\right\}, \tag{32}$$

где $C_{-2}^{n}$ – коэффициенты биноминального разложения;

$h_1 = h - y_{\infty}$.

В рассматриваемом диапазоне перемещений будет $y/h_1 < ½$. Если учесть, что погрешность формулы (30) вследствие принятых при её выводе допущений [4] не ниже 5 %, в суммах (32) следует ограничиваться учётом трёх-пяти слагаемых.

Решение этой задачи в линейной постановке показывает хорошее соответствие аналитических и практических результатов. Однако при значительной нелинейности её следует учитывать в расчётах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новикова, А.В. Виброизоляция тяжёлых окомкователей-смесителей с помощью резиновых элементов / А.В. Новикова // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. / ИГТМ НАН Украины. – 2012. – Вып. 106. – С. 121-128.
2. Прикладная механика резины / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, И.И. Круш. – К.: Наук. думка, 1975. – 260 с.
3. Круш, И.И. Решение уравнения нелинейных колебаний при наличии упругого последействия / И.И. Круш, М.И. Розовский // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – №6. – С. 127-129.
4. Лавендел, Э.Э. Расчёт резино-технических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.

## REFERENCES

1. Novikova, A.V. (2012), "Vibroinsulation of heavy pelletizer-mixers by rubber elements", *Geo-technical mechanics*, no. 106, pp. 121-128.
2. Poturaev, V.N., Dyrda, V.I. and Krush, I.I. (1975), *Prikladnaya mekhanika reziny* [Applied Rubber Mechanics], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine.
3. Krush, I.I. (1965), "Solution of the equation of nonlinear oscillations in the presence of the elastic aftereffect", *Izvestiya AN USSR*, no. 6, pp. 127-129.
4. Lavendel, E.E. *Raschot rezino-tekhnicheskikh izdeliy* [Calculation of rubber products], Mashinostroyeniye, Moscow.

---

**Об авторе**

***Новикова Алина Вячеславовна***, магистр, младший научный сотрудник отдела механики эластомерных конструкций, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, a_v_novikova@mail.ru

---

**About the author**

***Novikova Alina Vyacheslavovna***, Master of Science (Tech.), Junior Researcher in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, a_v_novikova@mail.ru