



АДАПТАЦІЯ МОДИФІКОВАНОЇ МОДЕЛІ БРАССА ДЛЯ ПОБУДОВИ ПОВНИХ ТАБЛИЦЬ СМЕРТНОСТІ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ

*А.І. СТЕФАНОВСЬКИЙ,
Інститут демографії та соціальних
досліджень НАН України*

В Україні в підручниках по демографії описано застарілі методи побудови таблиць смертності і не дається побудови повних таблиць смертності за новими методами.

У європейських країнах розраховують однорічні таблиці смертності, середня тривалість життя за якими залежить від смертності тільки одного року. Побудова таких таблиць для регіонів з недостатньо великими сукупностями населення є проблемою у зв'язку з відсутністю числа померлих у деяких вікових групах. В Україні найчастіше розраховують дворічні таблиці смертності, які не дають змоги вивчати стан смертності за 1 рік у чистому вигляді. Одним з кращих методів побудови сучасних однорічних таблиць смертності є метод модифікованої Брассової системи логітів [3] у поєднанні з використанням логітів коротких таблиць смертності для регіонів (тобто для малих сукупностей). Про застосування цього методу до розрахунку однорічних таблиць смертності для регіонів України і йдеться у цій статті.

Автори статті [3] і в заголовку, і далі називатимуться групою авторів.

Нехай l_x — число тих, що доживають до віку x , знайдене за таблицею смертності з коренем таблиці 1, тоді наступна формула є формулою визначення логіта

$$\text{Logit } (l_x) = 0,5 \ln[(1 - l_x) / l_x]. \quad (1)$$

Логіт — основне поняття для побудови повних сучасних таблиць смертності. Для розрахунків названим методом необхідно мати в крайньому разі не менш ніж 3 системи логітів: логіти за той рік, для якого потрібно побудувати таблицю смертності, цю таблицю позначимо індексом $j=1$; за другу систему логітів береться система для того ж населення за близький рік, цю таблицю позначимо індексом $j=2$; третя таблиця називається стандартною, тому позначимо її індексом s . За стандартну таблицю приймається в тому разі, якщо різниці повікових логітів стандартної та першої лежать на прямій лінії, або мало від неї відрізняються. За першу координату точки згаданої лінії береться вік, а друга — дорівнює різниці

повікових логітів. Таку ж властивість стандартна таблиця повинна мати по відношенню і до другої таблиці.

Для побудови згаданих трьох систем логітів потрібно знайти l_x^i – числа тих, що доживають до віку x , логіти для яких ми позначили індексами 1, 2, s . Цими індексами будемо позначати і відповідні їм l_x^i – числа тих, що доживають до віку x .

Знаходження кожної із 3-х систем логітів для $x < 85$ починаємо із визначення повікових коефіцієнтів смертності m_x за формулою:

$$m_x = \frac{M_x^t}{0,5S_x^{t1} + 0,5S_x^{t2}}, \quad (2)$$

де: M_x^t – кількість померлих у році t ,

S_x^{t1} – чисельність постійного населення на початок року t ,

S_x^{t2} – чисельність постійного населення на кінець року t ,

x – вік.

Важливим елементом побудови сучасних демографічних таблиць смертності є k_x^t – середня тривалість життя тих, що померли в даному інтервалі, або “сепаративний фактор”. Цей показник обчислюється за формулою, запропонованою нами:

$$k_x^t = \frac{S_x^{t1} + 2S_x^{t2}}{3(S_x^{t1} + S_x^{t2})}, \quad (3)$$

де: k_x^t – “сепаративний фактор”, який відноситься до вікової групи x та року t для $x > 0$. Для $x = 0$:

$$k_0 = \sum_0^{11} \frac{(1 + 2i)Mi1}{24 \sum_0^{11} Mi1}, \quad (4)$$

де: $Mi1$ – кількість померлих до 1 року, які прожили $i1$ місяців.

Після знаходження k_x^t знаходимо q_x – ймовірність смерті для населення у віці від 1 до 80 років за формулою:

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 - k_x)m_x} \quad (5)$$

Для населення 80-ти років і старше використовується формула:

$$q_x = 1 - e^{-m_x}, \quad (6)$$

де: e – число Непера. Далі знаходимо l_x – число тих, що доживають до точного віку x років. Для l_0 встановлюється значення 100 000 (корінь таблиці). Для решти вікових груп **число тих, що доживають до віку x** , обчислюється за формулою:

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x) \quad (7)$$

Таким чином, ми знайдемо l_x^1, l_x^2, l_x^s , а далі визначаємо логіти кожної з трьох систем 1, 2, s за формулою визначення логіта ($i=1$).

Для $x \geq 85$ l_x знаходять методом регресії у вигляді:

$$l_x = 100000 \exp(-b_0 - b_1 x - b_1 x^2 - \dots - b_6 x^6 - b_7 x^7) \quad (7a). \quad [4].$$

Для простішого знаходження коефіцієнтів регресії прологарифмуємо останню рівність.

$$\ln l_x = \ln 100000 - (b_0 + b_1 x + \dots + b_6 x^6 + b_7 x^7);$$

звідки одержимо

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_6 x^6 + b_7 x^7 = \ln 100000 - \ln l_x$$

Для знаходження коефіцієнтів регресії скористаємось програмою “регресія” із пакета в екселі “аналіз даних”, де замість функції $y(x)$ використовується функція $\ln 100000 - \ln l_x$, а замість аргумента – матриця, у першому стовпчику якої стоять елементи 1, 5, 10, ..., 80, 85 у першому степені, у другому стовпці – ті ж елементи у другому степені і так далі, а в колонці 7 – ті ж елементи у 7-ому степені. Після роботи програми матимемо всі коефіцієнти $b_0, b_1, \dots, b_6, b_7$. Тепер за формулою 7a можна порахувати l_x для $x \geq 85$. Тут розглядається випадок для одної країни, тому $i=1$.

Основна формула модифікованої Брассової системи логітів для побудови повних таблиць смертності має вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \text{Logit} (l_x^{ij}) = & \alpha_{ij} + \beta_{ij} \text{Logit} (l_x^s) + \gamma_x [(1 - \text{Logit} (l_5^{ij}) / \text{Logit} (l_5^s))] + \\ & + \theta_x [(1 - \text{Logit} (l_{60}^{ij}) / \text{Logit} (l_{60}^s))]. \end{aligned} \quad (8)$$

l_x^{ij} – число тих, що доживають до віку x року j (тут $i=1$). α_{ij}, β_{ij} – коефіцієнти, які знаходяться за наступними формулами:

$$\alpha_{ij} = \{ \text{Logit} (l_5^{ij}) \text{Logit} (l_{60}^s) - \text{Logit} (l_5^s) \text{Logit} (l_{60}^{ij}) \} / [\text{Logit} (l_{60}^s) - \text{Logit} (l_5^s)]. \quad (9)$$

$$\beta_{ij} = [\text{Logit} (l_{60}^{ij}) - \text{Logit} (l_5^{ij})] / [\text{Logit} (l_{60}^s) - \text{Logit} (l_5^s)].$$

У роботі [3] невідомі коефіцієнти γ_x, θ_x знаходять методом найменших квадратів із системи рівнянь, кожне з яких записується у формі (8) для вибраних країн і для вибраних років.

Для спрощення обчислень автором даної статті запропоновано невідомі коефіцієнти γ_x, θ_x знаходити із системи наступних двох рівнянь для кожного x :

$$\begin{aligned} \text{Logit} (I^1_x) = & \alpha_{i1} + \beta_{i1} \text{Logit} (I^s_x) + \gamma_x [(1 - \text{Logit} (I^1_5)) / \text{Logit} (I^s_5)] + \\ & + \theta_x [(1 - \text{Logit} (I^1_{60})) / \text{Logit} (I^s_{60})]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Logit} (I^2_x) = & \alpha_{i2} + \beta_{i2} \text{Logit} (I^s_x) + \gamma_x [(1 - \text{Logit} (I^2_5)) / \text{Logit} (I^s_5)] + \\ & + \theta_x [(1 - \text{Logit} (I^2_{60})) / \text{Logit} (I^s_{60})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Після визначення коефіцієнтів γ_x , θ_x за формулою (8) обчислюємо $\text{Logit} (I^3_x)$, який відноситься до шуканої таблиці смертності 1. Позначення I^3_x введено для того, щоб відрізнити від I^1_x , яке теж відноситься до таблиці 1, але знаходиться звичайним способом. Величина I^3_x є точнішою порівняно з I^1_x . Досягнення більшої точності, на нашу думку, є перевагою даного методу не тільки порівняно з методом Брасса, а й деякими іншими методами.

Таким чином, для кожного x ми знайшли $\text{Logit} (I^3_x)$. Далі опишемо побудову таблиць смертності на основі значень логітів $\text{Logit} (I^3_x)$. I^3_x – число тих, що доживають до віку x , знаходимо за формулою, оберненою до формули визначення логіта $I^3_x = 1 / (1 + \text{EXP}(2 \text{Logit} (I^3_x)))$. Далі переходимо від кореня таблиці 1 до кореня таблиці 100000, для чого кожне число I^3_x помножимо на 100000, $l_x = 100000 I^3_x$. **Число померлих** на інтервалі віку від x до $x+1$ обчислюють за формулою:

$$d_x = l_x q_x \quad d_x = l_x q_x \quad (12)$$

$d_x = l_x q_x$. **Число тих, що живуть** на даному інтервалі, або число прожитих людино-років обчислюють за формулою:

$$L_x = l_{x+1} + k_x d_x \quad (13)$$

Число людино-років, що мають бути прожитими при досягненні віку x років, знаходимо за формулою:

$$T_x = \sum_x^{\omega} L_x \quad (14)$$

Середню очікувану тривалість життя при досягненні віку x років знаходимо за формулою:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \quad (15)$$

Приклад. Побудуємо повну таблицю смертності для обох статей для всіх поселень України для померлих у 2004 р. за методом модифікованої Брассової системи логітів. Як уже сказано, для цього потрібно не менш ніж 3 системи логітів. За першу систему логітів беремо систему логітів для тих, що померли у 2003 р.

(табл. 1), за другу систему логітів беремо систему для тих, що померли у 2004 р. (табл. 2), а за систему логітів стандартної таблиці беремо систему логітів, яка є середнім арифметичним першої та другої систем.

Таблиця 1

Побудова системи логітів для померлих обох статей в Україні у 2003 р.

	m_x^{2003}	q_x	l_x^{2003}	l_x	Logit l_x^{2003}
0	0,009795	0,009747	100000	1	
1	0,001479	0,001478	99020,53	0,990205	-2,30804
2	0,000781	0,00078	98874,04	0,98874	-2,23761
3	0,000606	0,000606	98796,87	0,987969	-2,20407
4	0,000549	0,000549	98737	0,98737	-2,17948
5	0,000365	0,000364	98682,78	0,986828	-2,15819
89	0,250525	0,221608	5762,928	0,057629	1,397184
90	0,257332	0,226889	4319,168	0,043192	1,548978
91	0,289506	0,251367	3207,706	0,032077	1,703506
92	0,32847	0,279976	2279,056	0,022791	1,879177
93	0,376637	0,313835	1530,453	0,015305	2,082092
94	0,424509	0,345909	954,0276	0,00954	2,321323
95	0,441574	0,356977	549,034	0,00549	2,59963
96	0,452954	0,364252	306,5948	0,003066	2,892164
97	0,439891	0,355893	167,7215	0,001677	3,194471
98	0,482759	0,382921	93,94239	0,000939	3,484652
99	0,478099	0,380039	48,59089	0,000486	3,814502
100	0,484423	0,383947	25,35965	0,000254	4,139756

Таблиця 2

Побудова системи логітів для померлих обох статей в Україні у 2004 р.

	m_x^{2004}	q_x^{2004}	l_x^{2004}	l_x	Logit l_x^{2004}
0	0,009705	0,009658	100000	1	$-\infty$
1	0,001265	0,001265	99029,51	0,990295	-2,31268
2	0,000679	0,000679	98904,2	0,989042	-2,25133
3	0,000465	0,000465	98837,01	0,98837	-2,22124
4	0,000523	0,000523	98791,04	0,98791	-2,20162
5	0,000422	0,000422	98739,34	0,987393	-2,18043
89	0,240155	0,213494	6277,266	0,062773	1,351703
90	0,261636	0,230209	4769,746	0,047697	1,497002
91	0,267782	0,234925	3521,807	0,035218	1,655171

Продовж. табл. 2

	m_x^{2004}	q_x^{2004}	l_x^{2004}	l_x	$\text{Logit } l_x^{2004}$
92	0,297407	0,257258	2578,73	0,025787	1,815874
93	0,330578	0,281492	1811,798	0,018118	1,996283
94	0,389664	0,322716	1212,858	0,012129	2,199994
95	0,473098	0,376931	740,2506	0,007403	2,449253
96	0,460915	0,369294	390,0397	0,0039	2,771384
97	0,491667	0,388394	210,2644	0,002103	3,081227
98	0,438072	0,354721	106,8844	0,001069	3,420054
99	0,460718	0,369169	60,06134	0,000601	3,708479
100	0,45295	0,36425	32,39002	0,000324	4,017376

Таблиця 3

**Побудова системи логітів для померлих обох статей в Україні
у 2003–2004 рр.**

	$m_x^{2003-2004}$	q_x	$l_x^{2003-2004}$	l_x	$\text{Logit } l_x^{2003-2004}$
0	0,009749	0,009701	100000	1	
1	0,001368	0,001367	99025,12	0,990251	-2,31041
2	0,00073	0,00073	98889,7	0,988897	-2,24469
3	0,000536	0,000536	98817,53	0,988175	-2,21283
4	0,000536	0,000536	98764,53	0,987645	-2,19064
5	0,000392	0,000392	98711,55	0,987115	-2,16938
89	0,245623	0,217783	6010,954	0,06011	1,374797
90	0,259407	0,228491	4534,528	0,045345	1,523522
91	0,278526	0,243101	3358,24	0,033582	1,679797
92	0,312051	0,268056	2422,884	0,024229	1,847842
93	0,353221	0,297578	1666,821	0,016668	2,038722
94	0,405852	0,333591	1078,064	0,010781	2,259582
95	0,456543	0,36653	640,5295	0,006405	2,522102
96	0,456797	0,366691	348,1	0,003481	2,828474
97	0,465565	0,37222	189,0891	0,001891	3,134407
98	0,460313	0,368914	101,0559	0,001011	3,44812
99	0,469582	0,374736	54,53859	0,000545	3,756736
100	0,468218	0,373883	28,92827	0,000289	4,073908

У табл. 4 дається уже побудована таблиця смертності методом модифікованої Брассової системи логітів.

Таблиця 4

Таблиця смертності та очікуваної середньої тривалості життя для обох статей всіх поселень України у 2004 р.

	Logit(l(x))	l_x	q_x	L_x	T_x	e_x
0	$-\infty$	100000	0,990295	99514,75	6747132	67,47
1	-2,31268	<u>99030</u>	0,998735	98966,85	6647617	67,13
2	-2,25133	<u>98904</u>	0,999321	98870,61	6548650	66,21
3	-2,22124	<u>98837</u>	0,999535	98814,03	6449780	65,26
4	-2,20162	<u>98791</u>	0,999477	98765,19	6350966	64,29
5	-2,18043	<u>98739</u>	0,999578	98718,53	6252200	63,32
90	1,468189	<u>5038</u>	0,75763	4427,848	14816,86	2,94
91	1,613358	<u>3817</u>	0,736687	3314,699	10389,01	2,72
92	1,771352	<u>2812</u>	0,714438	2410,613	7074,309	2,52
93	1,943595	<u>2009</u>	0,690898	1698,587	4663,696	2,32
94	2,131636	<u>1388</u>	0,666098	1156,338	2965,109	2,14
95	2,337139	<u>925</u>	0,640088	758,2102	1808,771	1,96
96	2,561891	<u>592</u>	0,612936	477,2867	1050,561	1,78
97	2,807789	<u>363</u>	0,584731	287,4307	573,2738	1,58
98	3,076845	<u>212</u>	0,555583	164,9784	285,8431	1,35
99	3,371186	<u>118</u>	0,525621	89,89372	120,8647	1,03
100	3,693054	<u>62</u>	0,500468	30,971	30,971	0,50
101		<u>31</u>				

Введемо такі позначення, що використовуються у табл. 5:

$P_x^{сер}$ – середньорічна чисельність населення в Україні у 2004 р. для всіх поселень обох статей у віці x ;

$тп$ – теоретичне число померлих в Україні у 2004 р. для всіх поселень обох статей у віці x ;

$фп$ – фактичне число померлих в Україні у 2004 р. для всіх поселень обох статей у віці x .

Таблиця 5

Порівняння теоретичного і фактичного чисел тих, що померли в Україні у 2004 р., для всіх поселень обох статей

	$P_x^{сер}$	$тп$	$фп$	$фп - тп$	$(фп - тп)\%$
0	414634	4043,654	4024	-19,6536	-0,5
1	395157	500,3166	500	-0,3166	-0,1
2	378297	257,0873	257	-0,08734	0,0
3	376257	175,0407	175	-0,04071	0,0
4	384099,5	201,0526	201	-0,05261	0,0

	$P_x^{сер.}$	тп	фп	фп – тп	(фп – тп)%
5	398453,5	168,0354	168	-0,03543	0,0
89	42460	10698,77	10197	-501,77	-4,9
90	36738	10197	9612	-585,004	-6,1
91	30304,5	9260,803	8115	-1145,8	-14,1
92	22212	7468,977	6606	-862,977	-13,1
93	14093,5	5211,256	4659	-552,256	-11,9
94	9423,5	3828,941	3672	-156,941	-4,3
95	5250,5	2342,509	2484	141,4913	5,7
96	3703,5	1812,843	1707	-105,843	-6,2
97	2520	1352,239	1239	-113,239	-9,1
98	1639	963,3016	718	-245,302	-34,2
99	1031	663,1138	475	-188,114	-39,6
100	1737,5	1204,343	787	-417,343	-53,0

Для визначення точності методу побудованої таблиці смертності потрібно порівняти фактичну смертність з теоретичною, тобто смертністю, одержаною множенням повікових коефіцієнтів смертності m_x на середньорічну чисельність населення $P_x^{сер.}$. При цьому повікові коефіцієнти смертності m_x потрібно знайти переходом від повікових логітів l_x , одержаних модифікованим методом Брасса. Для цього спочатку скористаємося формулою, оберненою до формули визначення логіта:

$$l_x = 1 / (1 + \exp(2 \text{Logit} (l_x))) . \quad (16)$$

На основі отриманого l_x за формулою $q_x = 1 - l_{x+1} / l_x$ знаходимо повікову ймовірність смерті q_x . Для знаходження q_{100} потрібно знати l_{101} , яке знаходять з рівняння регресії знайденого раніше. Потім за формулою, оберненою до формули Паєвського, тобто до формули $q_x = 1 - \exp(-m_x)$ знаходимо $m_x = -\ln(1 - q_x)$. Для знаходження теоретичного числа померлих потрібно середньорічну чисельність населення $P_x^{сер.}$ помножити на повіковий коефіцієнт смертності m_x . Порівняння фактичної та теоретичної смертності наводиться в табл. 4. З цієї таблиці бачимо, що різниця загальної кількості смертей фактичних і теоретичних дорівнює 24114 чоловік, що становить майже 3 %, а отже, смертність теоретична майже на 97% збігається з фактичною смертністю.

Порівняння показників середньої тривалості життя для обох статей в Україні за 2004 р. за короткою та повною таблицями смертності показує, що для молодших вікових груп вони майже не відрізняються, а в старших вікових групах різниця між ними більша, але оскільки внесок старших груп в середню тривалість життя малий, тому теоретична модель смертності досить точно відображає фактичну смертність. Числа тих, що доживають до віку x , знайдені модифікованим методом Брасса та методом Чанга майже збігаються.

Таблиця 6

**Порівняння середньої тривалості життя для обох статей в Україні у 2004 р.
за короткою та повною таблицями смертності**

	ех за ктс	ех за птс	різниця	%
0	67,75	67,47	0,28	0,4
1	67,40	67,13	0,27	0,4
5	63,59	63,32	0,27	0,4
10	58,70	58,43	0,27	0,5
15	53,79	53,52	0,27	0,5
20	48,98	48,71	0,28	0,6
25	44,33	44,05	0,28	0,6
30	39,88	39,60	0,28	0,7
35	35,59	35,30	0,29	0,8
40	31,47	31,17	0,30	0,9
45	27,54	27,23	0,31	1,1
50	23,83	23,51	0,32	1,3
55	20,36	20,02	0,34	1,7
60	17,05	16,71	0,34	2,0
65	14,04	13,64	0,40	2,8
70	11,21	10,81	0,40	3,5
75	8,72	8,22	0,51	5,8
80	6,61	6,02	0,59	8,9
85	4,81	4,27	0,54	11,3
90	3,82	2,94	0,88	23,1
95	3,14	1,96	1,18	37,6
100	2,52	0,50	2,02	80,2

Метод модифікованої Брасової системи логітів групою авторів [3] і удосконалений авторам даної статті доцільно використовувати для побудови повних таблиць смертності України.

Ми пропонуємо застосовувати цей метод і для регіонів України. У методі Браса знаходяться 2 параметри α , β для всієї таблиці смертності для всіх її вікових груп, що робить неможливим за однією формулою з одними значеннями α , β визначити вірно логіти для всіх вікових груп. Перепоною для такого використання для регіонів стає проблема малих сукупностей померлих та населення. Розглянемо для прикладу числа померлих усіх жінок сільської місцевості по усіх областях у 2004 р. Статистика свідчить про відсутність померлих в деяких вікових групах, що унеможлиблює точне обчислення осіб, які доживають до даного віку у групі з відсутньою смертністю. А випадки відсутності смертності трапляються майже в кожній області в середньому майже у

6 вікових групах. Метод модифікованої Брассової системи логітів проблему малих сукупностей не вирішує.

Частково можна вирішити проблему малих сукупностей методом згладжування даних.

Ми пропонуємо метод побудови повних таблиць смертності регіонів України, який використовує логіти з коротких таблиць смертності, і тільки логіти. Це дає змогу уникнути проблеми малих чисел для того випадку, для якого можна побудувати короткі таблиці смертності. Є показники таблиць смертності, які відносять до інтервальних, і показники таблиць смертності, які відносять до моментних. Показник логітів належить до моментних, тому логіти з повних таблиць повинні бути рівними одномоментним з ними логітам коротких таблиць. Таким чином, однорічні логіти, величина віку яких ділиться на 5, стають відомими, залишається знайти логіти, які лежать всередині інтервалу. Нехай α – значення логіта, величина віку якого ділиться на 5, β – значення сусіднього наступного логіта, величина віку якого ділиться на 5, тоді всередині інтервалу (α , β) однорічні логіти дорівнюють :

$$(4\alpha + \beta)/5 ; (3\alpha + 2\beta)/5; (2\alpha + 3\beta)/5; \quad (17)$$

Значення логіта подані у порядку наростання віку.

Нехай α – відоме значення логіта для вікової групи (1–4) п'ятирічної таблиці смертності, β – відоме значення логіта для вікової групи (5–9) короткої таблиці смертності, тоді всередині інтервалу(α , β) однорічні логіти послідовно дорівнюють:

$$I_2=(3\alpha + \beta)/4; I_3=(\alpha + \beta) /2; I_4=(\alpha + 3\beta) / 4. \quad (18)$$

Справедливість формул впливає з унікальної, відомої властивості, що графік логіта наближується до графіка прямої лінії для більшості точок.

Таким чином знаходять логіти $Logit(I_x)$ повних таблиць смертності для всіх вікових груп через логіти коротких таблиць смертності, також вирішується проблема побудови таблиць для малих сукупностей регіонів України. Щоб визначити I_x скористаємося формулою, оберненою до формули визначення логіта.

Для розрахунків методом модифікованої Брассової системи логітів потрібно мати 3 системи логітів. Для того року, для якого нам потрібно побудувати повну таблицю смертності, будуємо коротку таблицю смертності. Ще одну коротку таблицю смертності будуємо за попередній рік. Обчислюємо логіти цих двох коротких таблиць. Далі обчислюємо за формулами(17), (18) логіти повних таблиць смертності, як це було описано раніше. За систему логітів стандартної таблиці беремо середнє арифметичне двох щойно розрахованих систем логітів (мається на увазі середнє арифметичне по кожній віковій групі).

Групою авторів за стандартну таблицю бралася єдина глобальна стандартна таблиця. І вони рекомендують для розрахунків саме цю таблицю для всіх країн, в тому числі для України тому, що дані про населення України враховані у єдиній глобальній стандартній таблиці. У нас немає цієї таблиці. Автор

запропонував брати замість стандартної таблиці логітів середнє арифметичне системи логітів за найближчі два роки. І в результаті одержана таблиця смертності з досить точною тривалістю життя.

Отже, ми маємо розраховані три системи логітів. Цього цілком достатньо для розрахунків більш точним методом модифікованої Брассової системи логітів, детально описаного на початку цієї роботи.

Приклад. Побудуємо повну таблицю смертності для жінок усіх поселень Херсонської області для померлих у 2004 р. і ще одну повну таблицю смертності для жінок тієї ж області, які померли у 2003р. За методом модифікованої Брассової системи логітів, користуючись формулами переходу від логітів коротких таблиць смертності до логітів повних таблиць, запропонованими нами, знаходимо логіти повних таблиць. Не будемо описувати коротких таблиць смертності. Побудуємо короткі таблиці смертності (таб. 7) і обчислимо їх логіти.

Таблиця 7

Числа тих, що доживають до точного віку x l_x і їх логіти $Logit(l_x)$ для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003, 2004 рр.

	2003	2004	2003	2004
	l_x	l_x	$Logit(l_x)$	$Logit(l_x)$
0	100000	100000		
1–4	99128	99188	-2,36669	-2,40264
5–9	98734	98921	-2,17828	-2,25914
10–14	98573	98762	-2,11761	-2,18961
15–19	98458	98616	-2,07827	-2,13313
20–24	98152	98335	-1,98621	-2,03928
25–29	97733	97966	-1,88189	-1,93731
30–34	97169	97272	-1,76791	-1,78697
35–39	96297	96536	-1,62915	-1,66375
40–44	95129	95225	-1,48597	-1,49642
45–49	93542	93660	-1,33655	-1,3464
50–54	91003	91052	-1,157	-1,16
55–59	87434	87376	-0,96994	-0,96731
60–64	82543	82201	-0,77679	-0,76501
65–69	76214	76043	-0,58222	-0,57752
70–74	67472	67994	-0,36481	-0,37675
75–79	55015	55711	-0,10064	-0,11472
80–84	38935	40216	0,225023	0,198237
85–89	21579	23100	0,645186	0,601337

Користуючись формулами переходу (4), (5) від логітів коротких таблиць смертності до логітів повних таблиць, запропонованими нами, знаходимо логіти повних таблиць смертності для $x \geq 85$.

Для $x \geq 85$ I_x знаходиться у вигляді:

$$I_x = 100000 \exp(-b_0 - b_1 x - b_1 x^2 - \dots - b_6 x^6 - b_7 x^7), \quad [2], (19)$$

де коефіцієнти $b_0, b_1, \dots, b_6, b_7$ знаходять методом найменших квадратів. Знайшовши $b_0, b_1, \dots, b_6, b_7$ за відомими I_x $x \geq 85$ коротких таблиць смертності, обчислюємо I_x за формулою (6) для $x > 85$.

На основі I_x для $x < 85$ повних таблиць смертності обчислюємо логіти $\text{Logit}(I_x)$ для $x > 85$.

Таблиця 8

**Три системи логітів повних таблиць смертності для жінок усіх поселень
Херсонської області за 2003, 2004 рр. і стандартна система логітів**

	2004	2003	Стандарт		2004	2003	Стандарт		2004	2003	Стандарт
1	-2,40264	-2,36669	-2,38466	35	-1,66375	-1,62915	-1,64645	69	-0,4169	-0,40829	-0,4126
2	-2,36676	-2,31959	-2,34318	36	-1,63028	-1,60051	-1,6154	70	-0,37675	-0,36481	-0,37078
3	-2,33089	-2,27249	-2,30169	37	-1,59682	-1,57188	-1,58435	71	-0,32434	-0,31197	-0,31816
4	-2,29502	-2,22538	-2,2602	38	-1,56335	-1,54324	-1,5533	72	-0,27194	-0,25914	-0,26554
5	-2,25914	-2,17828	-2,21871	39	-1,52989	-1,5146	-1,52225	73	-0,21953	-0,20631	-0,21292
6	-2,24524	-2,16615	-2,20569	40	-1,49642	-1,48597	-1,4912	74	-0,16713	-0,15347	-0,1603
7	-2,23133	-2,15401	-2,19267	41	-1,46642	-1,45608	-1,46125	75	-0,11472	-0,10064	-0,10768
8	-2,21742	-2,14188	-2,17965	42	-1,43641	-1,4262	-1,43131	76	-0,05213	-0,03551	-0,04382
9	-2,20351	-2,12975	-2,16663	43	-1,40641	-1,39631	-1,40136	77	0,010462	0,029626	0,020044
10	-2,18961	-2,11761	-2,15361	44	-1,3764	-1,36643	-1,37142	78	0,073054	0,094758	0,083906
11	-2,17831	-2,10974	-2,14403	45	-1,3464	-1,33655	-1,34147	79	0,135645	0,15989	0,147768
12	-2,16702	-2,10188	-2,13445	46	-1,30912	-1,30064	-1,30488	80	0,198237	0,225023	0,21163
13	-2,15572	-2,09401	-2,12486	47	-1,27184	-1,26473	-1,26828	81	0,278857	0,309055	0,293956
14	-2,14442	-2,08614	-2,11528	48	-1,23456	-1,22882	-1,23169	82	0,359477	0,393088	0,376282
15	-2,13313	-2,07827	-2,1057	49	-1,19728	-1,19291	-1,19509	83	0,440097	0,47712	0,458609
16	-2,11436	-2,05986	-2,08711	50	-1,16	-1,157	-1,1585	84	0,520717	0,561153	0,540935
17	-2,09559	-2,04145	-2,06852	51	-1,12146	-1,11959	-1,12053	85	0,601337	0,645186	0,623261
18	-2,07682	-2,02303	-2,04993	52	-1,08292	-1,08218	-1,08255	86	0,697921	0,776855	0,737388
19	-2,05805	-2,00462	-2,03133	53	-1,04439	-1,04477	-1,04458	87	0,800692	0,886845	0,843769
20	-2,03928	-1,98621	-2,01274	54	-1,00585	-1,00736	-1,0066	88	0,910722	1,004872	0,957797
21	-2,01888	-1,96534	-1,99211	55	-0,96731	-0,96994	-0,96863	89	1,028877	1,131918	1,080398
22	-1,99849	-1,94448	-1,97149	56	-0,92685	-0,93131	-0,92908	90	1,156139	1,269089	1,212614
23	-1,9781	-1,92362	-1,95086	57	-0,88639	-0,89268	-0,88954	91	1,293607	1,417617	1,355612
24	-1,9577	-1,90275	-1,93023	58	-0,84593	-0,85405	-0,84999	92	1,442509	1,578866	1,510688
25	-1,93731	-1,88189	-1,9096	59	-0,80547	-0,81542	-0,81045	93	1,604198	1,754333	1,679265
26	-1,90724	-1,85909	-1,88317	60	-0,76501	-0,77679	-0,7709	94	1,780158	1,945637	1,862897
27	-1,87717	-1,8363	-1,85674	61	-0,72751	-0,73788	-0,7327	95	1,971994	2,154522	2,063258
28	-1,84711	-1,8135	-1,8303	62	-0,69002	-0,69896	-0,69449	96	2,181431	2,382844	2,282138
29	-1,81704	-1,79071	-1,80387	63	-0,65252	-0,66005	-0,65628	97	2,410304	2,632563	2,521433
30	-1,78697	-1,76791	-1,77744	64	-0,61502	-0,62114	-0,61808	98	2,660548	2,905741	2,783144
31	-1,76233	-1,74016	-1,75124	65	-0,57752	-0,58222	-0,57987	99	2,934198	3,204532	3,069365
32	-1,73768	-1,71241	-1,72504	66	-0,53736	-0,53874	-0,53805	100	3,233381	3,531192	3,382287
33	-1,71304	-1,68465	-1,69884	67	-0,49721	-0,49526	-0,49623	101	3,560323	3,888078	3,7242
34	-1,68839	-1,6569	-1,67265	68	-0,45706	-0,45177	-0,45441				

Тепер, маючи 3 системи логітів за методом модифікованої Брассової системи логітів [3], що детально описаний на початку цієї роботи, будемо повні таблиці смертності для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003, 2004 рр.

Таблиця 9

**Повна таблиця смертності
для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003 р.**

x	l_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	100000	0,00871	871	99565	7253886	72,54
1	99129	0,00087	86	99086	7154322	72,17
2	99043	0,00094	93	98997	7055236	71,23
3	98950	0,00104	103	98899	6956239	70,30
4	98847	0,00114	113	98791	6857341	69,37
5	98734	0,00031	31	98719	6758550	68,45
89	9385	0,22621	2123	8324	29566	3,15
90	7262	0,23630	1716	6404	21242	2,93
91	5546	0,26542	1472	4810	14838	2,68
92	4074	0,28670	1168	3490	10028	2,46
93	2906	0,35857	1042	2385	6538	2,25
94	1864	0,29024	541	1594	4153	2,23
95	1323	0,36206	479	1084	2560	1,93
96	844	0,39929	337	676	1476	1,75
97	507	0,40828	207	404	801	1,58
98	300	0,46000	138	231	397	1,32
99	162	0,47531	77	124	166	1,02
100	85	1,00000	85	43	43	0,5

Таблиця 10

**Повна таблиця смертності
для жінок усіх поселень Херсонської області за 2004 р.**

x	2004	l_x	l_x 2004	L_x	T_x	e_x
0			100000	99593,70	7294232,85	72,94
1	-2,40226	0,991874	99187,4	99157,83	7194639,15	72,54
2	-2,36684	0,991283	99128,26	99095,69	7095481,33	71,58
3	-2,33048	0,990631	99063,13	99029,03	6996385,63	70,63
4	-2,29501	0,989949	98994,93	98957,97	6897356,60	69,67
5	-2,25914	0,98921	98921	98905,95	6798398,64	68,73
6	-2,24523	0,988909	98890,9	98875,44	6699492,69	67,75
7	-2,23133	0,9886	98859,97	98844,08	6600617,25	66,77

Продовж. табл. 10

x	2004	l_x	l_x 2004	L_x	T_x	e_x
8	-2,21741	0,988282	98828,18	98811,86	6501773,17	65,79
9	-2,20351	0,987955	98795,54	98778,78	6402961,31	64,81
10	-2,18962	0,98762	98762,02	98747,97	6304182,54	63,83
11	-2,17825	0,987339	98733,91	98719,61	6205434,57	62,85
12	-2,16693	0,987053	98705,3	98690,62	6106714,96	61,87
13	-2,15557	0,986759	98675,93	98661,08	6008024,35	60,89
14	-2,14432	0,986462	98646,23	98631,08	5909363,27	59,90
15	-2,1331	0,986159	98615,93	98589,18	5810732,19	58,92
16	-2,11387	0,985624	98562,43	98536,25	5712143,01	57,95
17	-2,09571	0,985101	98510,07	98481,30	5613606,76	56,99

Для визначення точності методу, використаного для побудованої таблиці смертності, потрібно порівняти фактичну смертність з теоретичною, тобто смертністю, одержаною множенням повікових коефіцієнтів смертності m_x на середньорічну чисельність населення $P_x^{сеп}$. При цьому повікові коефіцієнти смертності m_x потрібно знайти переходом від повікових логітів Logit (l_x), одержаних модифікованим методом Брасса. Для цього спочатку скористаємося формулою (15). На основі одержаного l_x за формулою $q_x = 1 - l_{x+1} / l_x$ знаходимо ймовірність смерті q_x . Для знаходження q_{100} потрібно знати l_{101} , яке знаходять з рівняння регресії, отриманого раніше. Потім за формулою, оберненою до формули Паєвського, тобто до формули $q_x = 1 - \exp(-m_x)$, знаходимо $m_x = -\ln(1 - q_x)$. Тепер для знаходження теоретичного числа померлих потрібно середньорічне населення $P_x^{сеп}$ помножити на повіковий коефіцієнт смертності m_x . Фактичне число смертей дорівнює 8710, а теоретичне – 8578. Різниця загальної кількості смертей фактичних і теоретичних – 132 особи, що становить 2%, а отже, смертність теоретична майже на 98% збігається з фактичною смертністю.

Таблиця 11

Порівняння середньої тривалості життя для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003 р. за короткою та повною таблицями смертності, розрахованих удосконаленим методом Брасса

	e_x за птс	e_x за ктс	різниця
0	72,54	72,52	0,02
1	72,17	72,19	-0,02
5	68,45	68,50	-0,05
10	63,56	63,62	-0,06
15	58,63	58,69	-0,06
20	53,81	53,82	-0,01
25	49,03	49,03	-0,01

	e_x за птс	e_x за ктс	різниця
30	44,30	44,27	0,02
35	39,67	39,68	-0,01
40	35,13	35,12	0,01
45	30,68	30,64	0,04
50	26,46	26,45	0,01
55	22,44	22,45	-0,02
60	18,61	18,62	-0,01
65	14,94	15,00	-0,06
70	11,54	11,68	-0,14
75	8,58	8,78	-0,20
80	6,11	6,52	-0,41
85	4,12	4,81	-0,69
90	2,93	3,95	-1,02
95	1,93	3,48	-1,55
100	0,50	3,13	-2,63

Порівняння середньої тривалості життя для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003 р. за короткою та повною таблицями смертності показує, що для вікових груп $x \leq 80$ вони майже не відрізняються, а в старших вікових групах різниця між ними більша, але оскільки внесок старших груп в середню тривалість життя малий, тому теоретична модель смертності теж досить точно відображає фактичну смертність. Для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003 р. теоретична модель смертності також досить точно відображає фактичну смертність.

Метод модифікованої групою авторів Брасової системи логітів [3] з використанням формул переходу від логітів коротких таблиць смертності до логітів повних таблиць смертності, запропонованих нами, придатний для побудови однорічних повних таблиць смертності для регіонів України.

Для порівняння розрахунків за короткою та повною таблицями смертності, побудовано методом Брасової системи логітів таблиці смертності для тих же жінок усіх поселень Херсонської області за 2003 р.

Таблиця 12

Порівняння середньої тривалості життя для жінок усіх поселень Херсонської області за 2003 р. за короткою та повною таблицями смертності, розрахованих методом Браса

	e_x за птс	e_x за ктс	різниця
0	72,29	72,52	-0,23
1	71,88	72,19	-0,31
5	68,17	68,36	-0,19
10	63,28	63,62	-0,34

	e_x за птс	e_x за ктс	різниця
15	58,35	58,69	-0,34
20	53,49	53,82	-0,33
25	48,69	49,03	-0,34
30	43,96	44,27	-0,31
35	39,32	39,68	-0,36
40	34,79	35,12	-0,33
45	30,32	30,64	-0,32
50	26,11	26,45	-0,34
55	22,11	22,45	-0,34
60	18,36	18,62	-0,26
65	14,72	15	-0,28
70	11,35	11,68	-0,33
75	8,42	8,78	-0,36
80	6,05	6,52	-0,47
85	4,45	4,81	-0,36
90	2,82	3,95	-1,13
95	1,83	3,48	-1,65
100	0,5	3,13	-2,63

Перевагою модифікованої Брассової системи логітів є те, що її параметри γ_x, θ_x у кожній віковій групі свої, і є можливість вибрати ці параметри так, щоб логіти були вірними в кожній віковій групі.

Порівнявши таблицю 11 з 12, робимо висновок, що метод модифікованої групою авторів Брассової системи логітів точніший, ніж метод Брасса.

Далі порівняємо розрахунки за методом модифікованої групою авторів Брассової системи логітів і удосконаленого автором та за методом Є. Андрєєва, що отриманий на прохання Інституту від Росстату.

Таблиця 13

Порівняння фактичного числа померлих за даними Держкомстату України (п3) та теоретичних чисел померлих, розрахованих за методом Є. Андрєєва (п1) та методом модифікованої та удосконаленої автором (п2) Брассової системи логітів

Вік	(п3)	(п2)	(п1)	Вік	(п3)	(п2)	(п1)	Вік	(п3)	(п2)	(п1)
0	41	41	34	34	17	13	17	68	175	156	175
1	7	3	7	35	17	19	17	69	156	130	156
2	4	3	2	36	17	20	17	70	120	142	120
3	0	3	2	37	29	21	29	71	154	164	154
4	2	4	2	38	24	23	24	72	179	196	179
5	1	2	2	39	22	26	22	73	243	236	243

Вік	(п3)	(п2)	(п1)	Вік	(п3)	(п2)	(п1)	Вік	(п3)	(п2)	(п1)
6	3	2	2	40	25	26	25	74	283	253	283
7	1	2	2	41	26	29	26	75	259	305	259
8	3	2	3	42	35	31	35	76	320	340	320
9	1	2	3	43	31	34	31	77	327	336	327
10	4	2	3	44	38	35	38	78	350	332	350
11	1	2	2	45	39	45	39	79	366	303	366
12	3	2	2	46	43	49	43	80	358	351	358
13	1	2	2	47	64	53	64	81	260	289	260
14	2	3	2	48	54	56	54	82	266	244	266
15	1	5	2	49	64	60	64	83	195	200	195
16	2	5	2	50	71	66	71	84	190	158	190
17	7	5	7	51	69	68	69	85	185	192	185
18	8	5	8	52	64	71	64	86	141	158	141
19	8	6	8	53	69	76	69	87	142	113	143
20	1	6	4	54	93	85	93	88	143	125	144
21	6	6	3	55	100	89	100	89	153	140	154
22	8	6	8	56	72	80	72	90	161	147	162
23	10	6	10	57	90	80	90	91	128	126	129
24	7	7	7	58	71	68	71	92	97	107	98
25	8	10	8	59	57	65	57	93	96	66	97
26	15	11	15	60	75	69	75	94	56	61	57
27	12	12	12	61	64	80	64	95	31	35	31
28	10	12	10	62	113	116	113	96	24	31	24
29	13	13	13	63	143	143	143	97	17	22	17
30	12	11	12	64	165	162	165	98	15	13	12
31	10	12	10	65	174	194	174	99	7	12	21
32	10	12	10	66	197	206	197	100	14	11	11

Порівнявши числа померлих із таблиці 13, приходимо до висновку, що порівнювані методи дають теоретичні числа померлих близькі до фактичних. Ймовірності смерті, одержані за методом Е. Андреева у старших вікових групах, то зростають, то убувають. Такі коливання не можна пояснити законами змін смертності, а є наслідком методичного підходу. Метод Брассової системи логітів модифікований групою авторів і удосконалений автором статті, дає кращі результати розрахунку ймовірності смерті, ніж попередній.

Висновки:

1. Для спрощення обчислень автором даної статті запропоновано невідомі коефіцієнти γ_x , θ_x знаходити із системи двох рівнянь 10, 11 для кожного x .

2. Для вирішення проблеми малих сукупностей ми пропонуємо метод побудови повних таблиць смертності регіонів України, який використовує логіти з коротких таблиць смертності, і тільки логіти. Це дає змогу уникнути проблеми малих сукупностей для того випадку, для якого можна побудувати короткі таблиці смертності.

3. Запропоновано формули переходу 17, 18 від логітів коротких таблиць смертності до логітів повних таблиць.

Джерела

1. *Arriaga* Eduardo E. Population analysis with microcomputers. – New York: Bureau of the census of USA, USAID, 1994. – Vol. 1. – P. 77 – 83, 132 – 133.
2. *Boleslawski Lech*. Life tables of Poland 2000. Statistical Publishing Establishment, Warsaw.
3. *C.J.L. Murray, B.D. Ferguson, A. D. Lopez, M. Guillot, J. A. Salomon and Ahmad*. Modified logit life table system: principles, empirical validation, and application //Population Studies. – Vol. 57, №2. – 2003. – P.165 – 182.

Аннотация. В статье предлагается использовать всемирно известный метод модифицированной Брассовой системы логитов для построения одногодичных таблиц смертности Украины и её регионов, предложены формулы перехода от логитов кратких таблиц смертности к логитам полных – для решения проблемы малых совокупностей, для которых построены краткие таблицы смертности.

Summary. In the article it is suggested to use the known worldwide method of the modified life table system for the construction of one-year life tables of Ukraine and its regions, transition formulas are offered from the logits of short life tables to the logits of complete – for the decision of problem of small totalities, which the short Life Tables are built for.

Стаття надійшла до редакції журналу 21.11.2006 р