

УДК 534.231

# РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВОДА ПЕКЕРИСА С ПОГЛОЩАЮЩИМ ДНОМ МЕТОДОМ СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

О. Р. ЛАСТОВЕНКО, В. А. ЛИСЮТИН, А. А. ЯРОШЕНКО

*Севастопольский национальный технический университет**Получено 09.07.2009*

Методом стационарной фазы рассчитаны импульсные характеристики отдельных мод в гидроакустическом волноводе Пекериса с поглощающим дном. Дисперсионное уравнение решено численно в широком диапазоне частот. Определены групповые скорости мод и производные от горизонтального волнового числа. Уточнены условия применимости метода стационарной фазы для вычисления грунтовой и водной волн, а также волны Эйри в поглощающем волноводе.

Методом стаціонарної фази розраховані імпульсні характеристики окремих мод у гідроакустичному хвилеводі Пекериса з поглинаючим дном. Дисперсійне рівняння розв'язано чисельно в широкому діапазоні частот. Визначені групові швидкості мод та похідні від горизонтального хвильового числа. Уточнені умови застосування методу стаціонарної фази для обчислення ґрунтової й водної хвилі, а також хвилі Ейрі у поглинаючому хвилеводі.

Pulse characteristics of the separate modes in hydroacoustic Pekeris waveguide with an absorbing bottom have been calculated by the stationary phase method. The dispersion equation has been solved numerically in a wide frequency range. Group velocities of the modes and derivations of the horizontal wave number have been determined. Conditions of the stationary phase method applicability for calculating the bottom, underwater and Airy waves in the waveguide with an absorption have been specified.

## ВВЕДЕНИЕ

Гидроакустический волновод можно рассматривать как канал связи, представляющий собой пространственно-временной и частотный фильтр с распределенными по трассе параметрами. Отклик линейного канала связи на входной сигнал определяется импульсной характеристикой канала (ИХ) или его комплексным коэффициентом передачи (ККП), связанными друг с другом парой преобразований Фурье.

Для моделирования импульсных характеристик морских (мелкого и глубокого моря) и сейсмических волноводов используются два подхода – лучевой и волновой. В случае лучевого решения ИХ представляется в виде дискретной функции, состоящей из ступенек, разделенных неодинаковыми интервалами времени и соответствующими моментам вступления лучей [1, 2]. “Синтетический” метод расчета импульсной сейсмограммы, в рамках которого среда разбивается горизонтальной сеткой на большое количество плоскопараллельных однородных слоев с одинаковыми временами пробега волны по вертикали, а затем рассчитывается прошедшая волна с учетом всех коэффициентов отражения, рассматривается в [3].

Различия в применении волнового подхода в конечном итоге сводятся к неодинаковым способам вычисления спектрального интеграла [4]. Рассчи-

тывать ККП волновода в виде суммы нормальных волн предлагают Р. Лаваль, И. Лабаск [5, 6]. Расчет ККП без разделения на моды с помощью быстрой полевой программы, перемножение с функцией спектра источника, а затем восстановление реализации сигнала со стационарным спектром посредством обратного преобразования Фурье использует Ди Наполи [7, 8]. Физическое моделирование распространения импульсов в средах с дисперсией описывается в [9]. Проблема каузальности (физической осуществимости) ИХ с точки зрения принципа причинности обсуждается в [10]. Возникновение некаузальных “предвестников” первого вступления сигнала, являющееся следствием технического ограничения спектра, неизбежно, если при расчетах используются численные алгоритмы преобразования Фурье [11].

Современная вычислительная техника предоставляет возможность применения классических асимптотических методов на новом качественном уровне с более детальным исследованием границ их применимости и сопоставлением с результатами решения задач приближенными аналитическими и численными методами. Цель данной работы – получить решение для импульсных характеристик отдельных нормальных волн и волновода “полукинематическим” методом стационарной фазы, не используя алгоритм быстрого обратного преобразования Фурье.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель волновода Пекериса состоит из двух областей: водного слоя 1 глубиной  $h$  и полупространства 2 с плотностями  $\rho_{1,2}$  и скоростями звука  $c_{1,2}$  соответственно. Глубины источника ( $z_0$ ) и приемника ( $z$ ) отсчитываются от поверхности, расстояние между ними равно  $r$  (рис. 1).

Импульсную характеристику волновода представим в виде обратного преобразования Фурье акустического поля, полученного в виде суммы нормальных волн [12, 13]:

$$h(i, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \sum_{l=1}^\infty H_l(r, z) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (1)$$

Здесь  $h(i, t)$  – комплексный аналитический сигнал ИХ;  $H_l(r, z)$  – ККП волновода для отдельной моды;  $S(\omega)$  – постоянная и вещественная функция спектра ИХ [14];  $l$  – номер моды.

Запишем ККП нормальной волны в виде [13]

$$H_l(r, z) = 2\pi i A_l \Psi(z, b_{1l}) H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (2)$$

где  $A_l$  – коэффициенты возбуждения мод;  $\Psi(z, b_{1l})$  – функции вертикального профиля моды;  $b_{1l}$  и  $\xi_l$  – вертикальное и горизонтальное волновые числа соответственно. В выражении (2)  $A_l$  и  $\Psi(z, b_{1l})$  – непериодические функции, слабо зависящие от частоты;  $H_0^{(l)}(\xi_l r)$  – функция Ханкеля.

Подставим выражение (2) в формулу (1), заменив функцию Ханкеля в (2) первым членом ее асимптотического разложения. После изменения порядка суммирования и интегрирования, вынося медленно меняющиеся с частотой сомножители за знак интеграла [12] и полагая  $S_l(\omega) = 2^{-3/2} \pi^{1/2}$ , получаем ИХ (1) волновода в виде

$$\begin{aligned} h(i, t) &= \sum_{l=1}^\infty h_l(i, t) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{r}} \exp(i\pi/4) \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{\xi_l(\omega(t))}} \times \\ &\times A_l(\omega(t)) \Psi(z, b_{1l}(\omega(t))) \exp(-\beta_l(\omega(t))r) \times \\ &\times \int_0^\infty \exp(-i(\omega t - \zeta_l r)) d\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\zeta_l$ ;  $\beta_l$  – действительная и мнимая части горизонтального волнового числа  $\xi_l$ . Следует отметить, что функции частоты  $A_l$ ,  $\xi_l$ ,  $b_l$ ,  $\beta_l$  в соотношении (3) неявно зависят от времени, поскольку

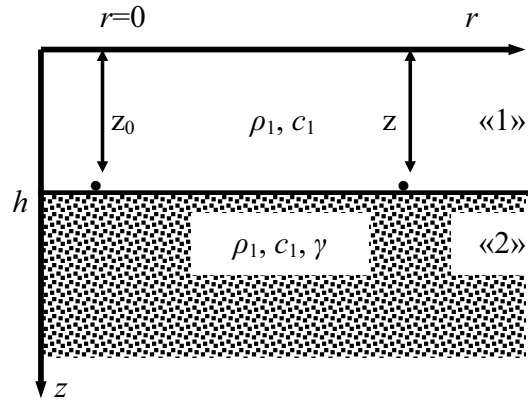


Рис. 1. Схема волновода Пекериса

момент вступления частоты  $\omega$  определяется дисперсией групповой скорости моды.

Введем обозначение

$$Q_l = \frac{A_l \Psi_l(z, b_{1l})}{\sqrt{\xi_l}}.$$

Тогда решение для вещественной импульсной характеристики отдельной моды сводится к вычислению выражения

$$\begin{aligned} h_l(t) &= \frac{\exp(-\beta_l r)}{\sqrt{r}} \times \\ &\times \text{Re} \left[ \exp(i\pi/4) Q_l \int_0^\infty \exp(-i(\omega t - \zeta_l r)) d\omega \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Переобозначив интеграл через  $J$ , будем искать решение (4) методом стационарной фазы [11, 12, 14].

### 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Временной ход частоты  $\omega(t)$  в реализации ИХ определяется дисперсией групповой скорости  $u_l(f)$ , которая для волновода с поглощением существенно отличается от классической, рассчитанной Пекерисом [15]. Поэтому, перед тем как приступить к нахождению интеграла  $J$ , следует рассчитать групповые скорости мод и производные горизонтального волнового числа.

Дисперсионное уравнение для волновода Пекериса имеет следующий вид [14, 16]:

$$\text{tg}(b_1 h) = i \frac{m b_1}{b_2}. \quad (5)$$

Здесь  $b_1$ ,  $b_2$  – вертикальные волновые числа в водном слое и полупространстве соответственно;  $m = \rho_2 / \rho_1$ .

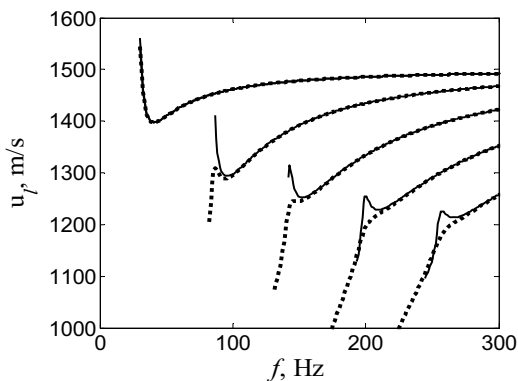


Рис. 2. Частотные зависимости групповой скорости для первых пяти мод: сплошная –  $\gamma_2 = 0.01$ ; штриховая –  $\gamma_2 = 0.03$

Для поиска комплексных волновых чисел выразим в соотношении (5)  $b_2$  через  $b_1$  и воспользуемся формулой  $b_{2l} = \sqrt{k_2^2 - \xi_l^2}$ :

$$F(hb_{1l}) = hb_{1l} - (l - 1/2)\pi - \arctg \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2^2 - b_{1l}^2}}{mb_{1l}} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) решалось итерационным методом Ньютона–Рафсона [16, 17]. Для этого была найдена производная в явном виде:

$$\frac{dF}{db_1} = h + \frac{1}{b_1(1 + \Theta^2)} \left\{ \Theta + \frac{1}{m^2\Theta} \right\},$$

$$\Theta = \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2^2 - b_1^2}}{m^2 b_1}.$$

Начальное приближение корня было  $(l - 0.5)\pi/h$ , а невязка –  $|F(hb_{1l})| < 10^{-8}$ . Волновое число в полупространстве задавалось в виде:  $k_2 = (1 - i\gamma_2)2\pi f/c_2$ , где  $\gamma_2$  – тангенс угла потерь. Горизонтальные волновые числа мод определялись из формулы связи  $\xi_l = \sqrt{k_1^2 - b_{1l}^2}$ , а критические частоты – из условия  $\text{Im}(b_{2l}(\omega > \omega_{кр})) < 0$  [16]. Производные от вещественной части горизонтального волнового числа и групповые скорости мод рассчитывались численно по формулам

$$\frac{d\zeta_l}{d\omega} \equiv \dot{\zeta}_l \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\zeta_l}{\Delta f}, \quad \frac{d^2\zeta_l}{d\omega^2} \equiv \ddot{\zeta}_l \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\dot{\zeta}_l}{\Delta f},$$

$$\frac{d^3\zeta_l}{d\omega^3} \equiv \dddot{\zeta}_l \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\ddot{\zeta}_l}{\Delta f}, \quad \frac{d^4\zeta_l}{d\omega^4} \equiv \dots \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\dddot{\zeta}_l}{\Delta f},$$

$$u_l = \frac{1}{\dot{\zeta}_l}.$$

Частотные зависимости групповой скорости для первых пяти мод (кривые идут слева направо) показаны на рис. 2. Физические параметры сред:  $h = 20$  м,  $c_1 = 1500$  м/с,  $c_2 = 2000$  м/с,  $\rho_1 = 1033$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 0.01$  и  $0.03$ . Из графика видно, что кривые  $u_l(f)$  для поглощающего волновода можно подразделить на три вида:

- 1) классические, с одним экстремумом (минимум) и двумя ветвями дисперсии групповой скорости;
- 2) с двумя экстремумами (минимум и максимум) и тремя участками дисперсии скорости;
- 3) без экстремумов, характер дисперсии упрощенный, аналогичный идеальному волноводу.

### 3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Главная часть интеграла  $J$  получается за счет областей в окрестности точек стационарной фазы  $\omega = \omega_s$ , определяемых из уравнения

$$\left. \frac{d\varphi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_s} \equiv \dot{\varphi} = 0,$$

где  $\varphi = \omega t - \zeta_l r$  – фаза экспоненты в (4). Полагая в окрестности точки стационарной фазы  $\omega = \omega_s + w$  ( $w$  – малое приращение частоты), разложим  $\varphi$  по степеням  $w$  (индекс номера моды  $l$  ниже записывать не будем):

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_s) - \frac{1}{2!} r \ddot{\zeta}(\omega_s) w^2 - \frac{1}{3!} r \dddot{\zeta}(\omega_s) w^3 \dots$$

Нижний предел интегрирования в  $J$  можно расширить до  $-\infty$ , поскольку в интеграле по  $w$  будут существенны лишь малые значения (путь интегрирования проходит через точку  $\omega_s$ , а не начинается в ней) [12]. Таким образом,

$$J = \exp[-i(\zeta(\omega_s)r - \omega_s t)] \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i \left( \frac{1}{2} r \ddot{\zeta}(\omega_s) w^2 + \frac{1}{6} r \dddot{\zeta}(\omega_s) w^3 + \dots \right) \right] dw. \quad (7)$$

Обозначим интеграл в формуле (7) как  $J^*$ . Известно [12, 14, 18], что

$$J^* \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r|\ddot{\zeta}(\omega_s)|}} \exp\left[i \operatorname{sign}(\ddot{\zeta}(\omega_s)) \frac{\pi}{4}\right] \times \left\{ 1 - i \left[ -\frac{5((\omega_s))^2}{24r(\ddot{\zeta}(\omega_s))^3} + \frac{\ddot{\zeta}(\omega_s)}{8r(\ddot{\zeta}(\omega_s))^2} \right] + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\}. \quad (8)$$

Случай  $\ddot{\zeta} > 0$  (где  $\operatorname{sign}(\ddot{\zeta}) = 1$ ) реализуется на ветви дисперсионной кривой, соответствующей грунтовой волне, а  $\ddot{\zeta} < 0$  (где  $\operatorname{sign}(\ddot{\zeta}) = -1$ ) – на ветви, соответствующей водной волне. Окрестности точек экстремумов  $u(f)$ , в которых  $\ddot{\zeta} = 0$ , требуют дополнительного исследования методом Эйри.

Частоту минимума групповой скорости обозначим  $\omega_{Ai}$ , а значениям всех переменных на этой частоте будем приписывать индекс “Ai”. В интеграле  $J$ , входящем в выражение (4), примем  $\omega = \omega_{Ai} + w$  и снова разложим фазу  $\varphi = \omega t - \xi r$  в ряд по степеням  $w$ , но уже в окрестности частоты  $\omega_{Ai}$ :

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_{Ai}) + a_1 w + a_3 w^3 + a_4 w^4 + \dots$$

Здесь  $a_1 = t - r\dot{\zeta}_{Ai} = t - r/u_{Ai}$ ;  $a_3 = -r\ddot{\zeta}_{Ai}/6 > 0$ ;  $a_4 = -r\ddot{\zeta}_{Ai}/24$ . Заметим, что производные от  $\zeta$  в этом случае вычисляются только на частоте  $\omega_{Ai}$ , и не зависят от времени.

Учитывая, что от интеграла  $J$  должна быть взята только вещественная часть, получаем

$$J = \int_0^\infty \cos(\varphi(\omega)) d\omega \approx \int_{-\infty}^\infty \cos[(\omega_{Ai}t - \zeta_{Ai}r) + a_1 w + a_3 w^3 + a_4 w^4] dw. \quad (9)$$

Обозначим последний интеграл в (9) как  $\operatorname{Int}$ . Тогда

$$J \approx \operatorname{Int} = \operatorname{Int}_1 + \operatorname{Int}_2, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}_1 &= 2 \cos(\omega_{Ai}t - \zeta_{Ai}r) \times \\ &\times \int_0^\infty \cos(a_1 w + a_3 w^3) \cos(a_4 w^4) dw, \\ \operatorname{Int}_2 &= -2 \sin(\omega_{Ai}t - \zeta_{Ai}r) \times \\ &\times \int_0^\infty \cos(a_1 w + a_3 w^3) \sin(a_4 w^4) dw. \end{aligned}$$

Здесь нечетные по отношению к  $w$  функции при интегрировании от  $-\infty$  до  $+\infty$  дали нуль, а интеграл от четных заменен на удвоенный в пределах от 0 до  $\infty$ . Учитывая малость аргумента в последнем косинусе в  $\operatorname{Int}_1$ , полагаем его равным единице. Тогда  $\operatorname{Int}_1$  решается приближенно [12, 14, 19]:

$$\operatorname{Int}_1 \approx 2 \cos(\omega_m t - \zeta_m r) T(a_1, a_3), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} T(a_1, a_3) &\equiv \int_0^\infty \cos(a_1 w + a_3 w^3) = \\ &= \pi |3a_3|^{-1/3} \operatorname{Ai}(a_1 |3a_3|^{-1/3}); \end{aligned}$$

$\operatorname{Ai}$  – функция Эйри. Полагая во втором интеграле в (10)  $\sin(a_4 w^4) \approx a_4 w^4$ , нетрудно убедиться, что его можно представить в виде [14]

$$\operatorname{Int}_2 \approx 2 \sin(\omega_m t - \zeta_m r) a_4 \frac{\partial^2 T}{\partial a_1 \partial a_3}. \quad (12)$$

Учитывая малость  $a_4$ , второе слагаемое в (10) будем рассматривать как поправочное. Вычисляя смешанные производные, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial a_1 \partial a_3} &= \frac{1}{3|a_3|^{5/3}} \left[ \frac{a_1^2}{3a_3^{2/3}} \operatorname{Ai}(a_1 |3a_3|^{-1/3}) + \right. \\ &\left. + 2\operatorname{Ai}'(a_1 |3a_3|^{-1/3}) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Ai}'$  – производная от функции Эйри.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Выражение, обозначенное в формуле (4) как  $Q_l$ , для волновода Пекериса имеет вид [12, 14, 16]:

$$\begin{aligned} Q_l &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\xi_l}} \times \\ &\times \frac{\exp(-\beta_l r) b_{1l} \sin(b_{1l} z) \sin(b_{1l} z_0)}{b_{1l} h - \sin(b_{1l} h) \cos(b_{1l} h) - \frac{1}{m^2} \sin^2(b_{1l} h) \operatorname{tg}(b_{1l} h)}. \quad (14) \end{aligned}$$

Запишем расчетные выражения для фрагментов IX, соответствующих участкам дисперсионных кривых между точками, где  $\omega = \omega_{кр}$  и  $\omega \rightarrow \omega_{max}$ . Обозначим выражение, заключенное в фигурные скобки в представлении (8) (без  $o(1/r^2)$ ), как  $S$ . Последовательно подставляя величину (8) в соотношения (7) и (4), после отделения

вещественной части получаем

$$h_l(t) = \frac{\exp(-\beta(\omega_s)r)}{r\sqrt{|\ddot{\zeta}(\omega_s)|}} |Q_l(\omega_s)| \times \\ \times |S| \cos \left[ \omega_s t - r\zeta(\omega_s) + \arg(S) + \arg(Q_l) + \right. \\ \left. + \text{sign}(\ddot{\zeta}(\omega_s)) \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (15)$$

Определим функцию, характеризующую границы применимости разложения (8). Выражение (15) справедливо, пока сумма второго и третьего членов (величина, заключенная в квадратных скобках внутри фигурных) в разложении (8) много меньше единицы [12, 14]. Обозначая  $E_1(\omega(t)) = |1 - S|$ , потребуем выполнения условия  $E_1 \ll 1$ .

Запишем расчетные выражения для волны Эйри. Подставляя (13) в (12), (12) и (11) в (10) и заменяя  $a_1, a_3, a_4$  соответствующими выражениями, получаем

$$h_l(t) = \frac{\exp(-\beta_{Ai}r)}{r^{5/6}} |Q_l(\omega_{Ai})| \frac{\pi 2^{4/3}}{|\ddot{\zeta}_{Ai}|^{1/3}} \times \\ \times \left\{ \cos \left( \omega_{Ai}t - r\zeta_{Ai} + \arg(Q_l) - \frac{\pi}{4} \right) \times \right. \\ \times \text{Ai} \left( \frac{t - r\dot{\zeta}_{Ai}}{(r|\ddot{\zeta}_{Ai}|/2)^{1/3}} \right) + \\ \left. + K \sin \left( \omega_{Ai}t - r\zeta_{Ai} + \Phi Q_l(\omega_{Ai}) - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad (16)$$

где

$$K = -\frac{1}{2^{1/3}} \frac{1}{r^{1/3}} \frac{\ddot{\zeta}_{Ai}}{|\ddot{\zeta}_{Ai}|^{4/3}} \times \\ \times \left[ \frac{(t - r\dot{\zeta}_{Ai})^2}{6^{2/3}(r|\ddot{\zeta}_{Ai}|)^{2/3}} \text{Ai} \left( \frac{t - r\dot{\zeta}_{Ai}}{(r|\ddot{\zeta}_{Ai}|/2)^{1/3}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6^{1/3}} \text{Ai}' \left( \frac{t - r\dot{\zeta}_{Ai}}{(r|\ddot{\zeta}_{Ai}|/2)^{1/3}} \right) \right].$$

Использование в формуле (9) членов вплоть до 4-го порядка позволяет расширить временной интервал, на протяжении которого она применяется, в сторону опережения кинематического момента вступления волны Эйри  $t_{Ai} = r/u_{Ai} = r\dot{\zeta}_{Ai}$  на некоторую величину  $\tau_-$ . Опережающую ( $\tau_-$ ) и отстающую ( $\tau_+$ ) границы интервала времени

$t_{Ai} - \tau_- < t < t_{Ai} + \tau_+$  следует оценивать отдельно. Опережающая граница должна соответствовать аргументу функции Эйри, при котором она принимает максимальное значение:

$$\tau_- = (r|\ddot{\zeta}_{Ai}|/2)^{1/3}. \quad (17)$$

Величину отстающей границы интервала можно оценить как  $\tau_+ = t - t_{Ai}$ , где  $t$  – максимальное значение аргумента функции Эйри в (16), при котором можно ограничиться только первым слагаемым в (10). Обозначим

$$E_2 = \frac{K}{\text{Ai} \left( \frac{t - r\dot{\zeta}_{Ai}}{(r|\ddot{\zeta}_{Ai}|/2)^{1/3}} \right)}. \quad (18)$$

Если  $E_2 \ll 1$ , то в выражении, заключенном в формуле (16) в фигурные скобки, можно ограничиться только первым слагаемым, что соответствует пренебрежением четвертым членом разложения в подынтегральном выражении (9).

На рис. 3, а, б показаны реализации грунтовой, водной и волны Эйри по отдельности, а также сумма волн – ИХ первой моды, рассчитанные для волновода без поглощения. Точками на оси времени последовательно обозначены: момент вступления грунтовой волны ( $r/u(f_{кр})$ ), водной волны ( $r/u(f=500 \text{ Гц})$ ), волны Эйри ( $t_{Ai}$ ). Расстояние между источником импульса и приемником  $r=4000 \text{ м}$ . Поскольку при расчете максимальная частота технически ограничена 500 Гц, момент вступления водной волны оказывается несколько позже кинематического ( $r/c_1=4 \text{ с}$ ). Все ИХ здесь и ниже нормированы на максимум амплитуды. Момент “переключения” с метода стационарной фазы на метод Эйри в точности соответствует  $t_{Ai} - \tau_-$  (максимум функции Эйри). При этом для грунтовой волны  $E_1 \approx 0.18$  (рис. 3, в, штриховая). Вследствие резкого возрастания  $E_1$ , при более позднем переключении отклонение закона изменения амплитуды грунтовой и водной волн от гармонических уже становятся заметными. Следует обратить внимание и на рост  $E_1$  для водной волны (рис. 3, в, сплошная) при приближении к ее кинематическому моменту вступления (возрастанию частоты). Отсюда следует, что существует максимальная частота, выше которой метод стационарной фазы будет неприменим.

Для волны Эйри изменение  $E_2$  (рис. 3, в, точки) – немонотонно. Второй минимум ( $E_2=0$ ) соответствует частоте, где  $\zeta=0$ . К этому времени волна Эйри практически затухает (для первой моды), даже в волноводе без поглощения.

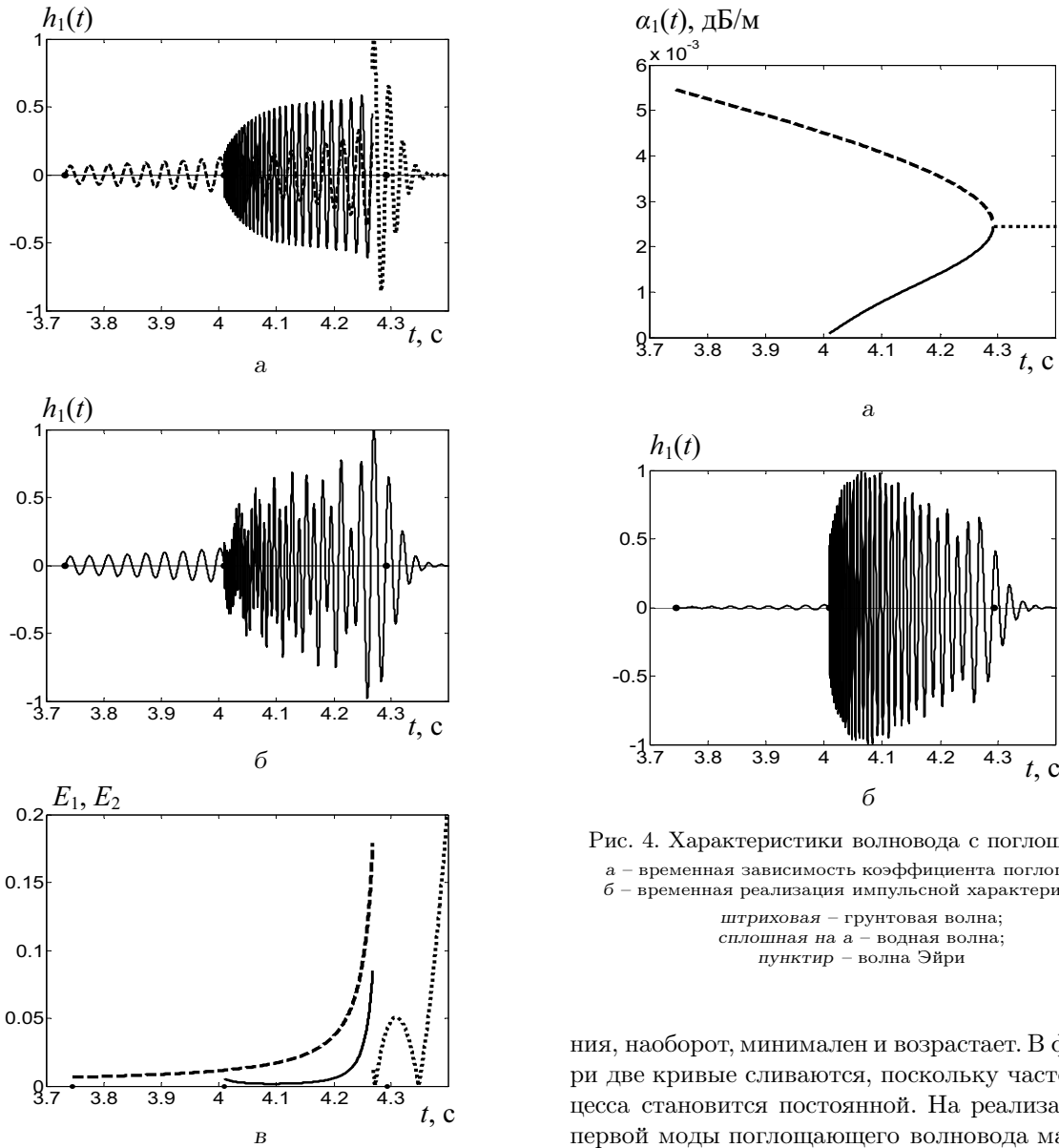


Рис. 3. Импульсная характеристика волновода без поглощения:

а – временная реализация (волны разделены);  
 б – временная реализация (сумма всех волн);  
 в – величины, характеризующие ошибки приближений;  
 штриховая – грунтовая волна;  
 сплошная на а, в – водная волна;  
 пунктир – волна Эйри

На рис. 4 показаны реализации ИХ волновода с учетом поглощения и временной ход коэффициента поглощения  $\alpha_1 = 8.69 \text{Im}(\xi_1)$  для грунтовой и водной волн. Для грунтовой волны он максимален в момент ее вступления (критическая частота) и уменьшается с течением времени. Для водной волны в момент вступления коэффициент поглоще-

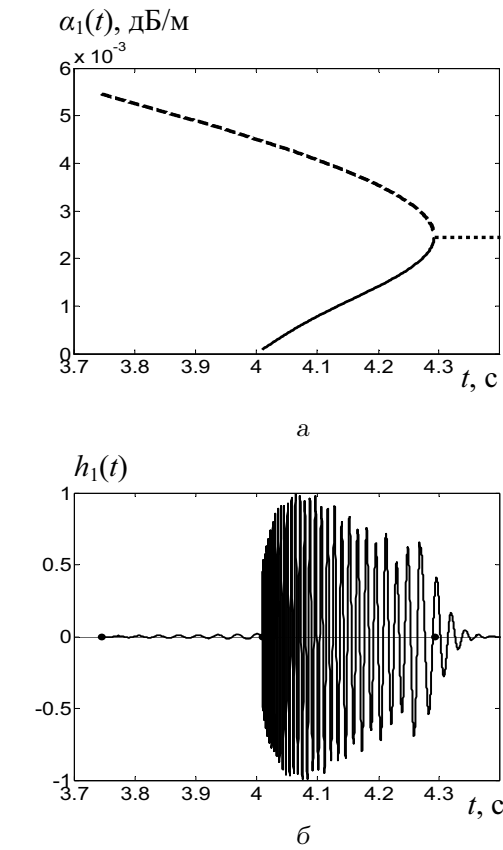


Рис. 4. Характеристики волновода с поглощением:

а – временная зависимость коэффициента поглощения;  
 б – временная реализация импульсной характеристики;  
 штриховая – грунтовая волна;  
 сплошная на а – водная волна;  
 пунктир – волна Эйри

ния, наоборот, минимален и возрастает. В фазе Эйри две кривые сливаются, поскольку частота процесса становится постоянной. На реализации ИХ первой моды поглощающего волновода максимум амплитуды смещается из фазы Эйри в область интерференции грунтовой и водной волн (ср. рис. 3, б и 4).

Рассмотрим теперь импульсные характеристики третьей моды с упрощенным характером дисперсии групповой скорости (рис. 5). Здесь и далее примем, что  $r=1000 \text{ м}$ ,  $\gamma=0.03$ , максимальная расчетная частота 5 кГц. Поскольку нет групповых скоростей  $u_3 > c_1$  (см. рис. 2), возникает только водная волна. Резкий спад амплитуды волнового процесса происходит вследствие возрастания коэффициента поглощения  $\alpha_3$  и совпадает с уменьшением  $du_3/df$  (“полка” на кривой для  $u_3$  на рис. 2). Синхронно возрастает и  $E_1$ , приближаясь к единице, а на реализации становятся заметны отклонения от гармонического закона (велики

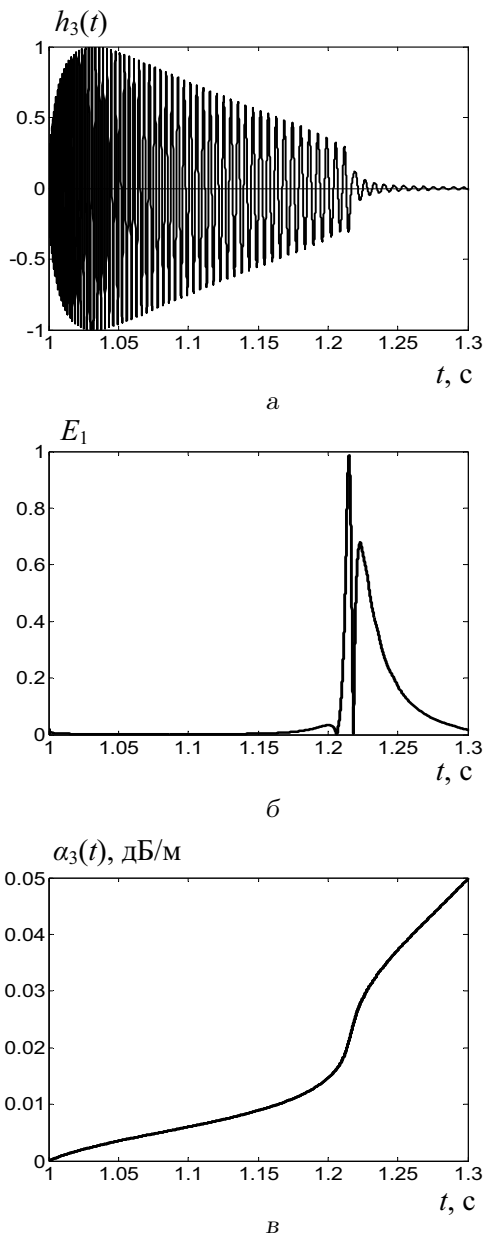


Рис. 5. Характеристики волновода с поглощением:  
 а – временная реализация импульсной характеристики;  
 б – функция  $E_1$ ; в – временная зависимость  
 коэффициента поглощения

нелинейные искажения). В этом диапазоне метод стационарной фазы уже следует считать “ограниченно применимым”. Второй всплеск  $E_1$  возникает также из-за уменьшения  $du_3/df$  при приближении к критической частоте.

Частотные зависимости групповой скорости второй моды имеют самый сложный вид – с двумя экстремумами (см. рис. 2). Правая часть кри-

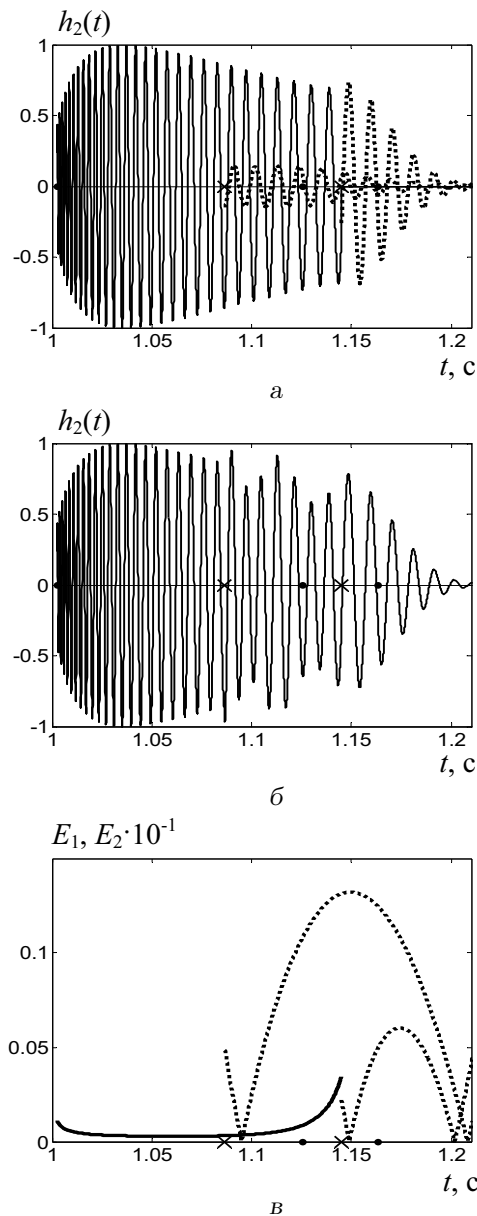


Рис. 6. Характеристики волновода с поглощением:  
 а – временная реализация импульсной характеристики, водная волна (сплошная) и волна Эйри (пунктир) разделены;  
 б – временная реализация импульсной характеристики (сумма волн);  
 в – функции  $E_1$  (сплошная) и  $E_2$  (пунктир)

вой соответствует водной волне, два экстремума порождают две волны Эйри, а участки между двумя экстремумами и левее максимума – значительно ослабленные волны типа грунтовой и водной соответственно. Расчет последних двух методом стационарной фазы технически невозможен, поскольку для них  $E_1 \gg 1$ , а поглощение  $\chi$  велико. На рис. 6 показаны реализации ИХ, водная вол-

на и волна Эйри раздельно, а также сумма волн. Кинематические моменты вступления волн Эйри отмечены на оси времени точками, а моменты начала расчета первой и второй волн Эйри – крестиками. Следует отметить, что “третьего” приближения при расчете волн Эйри здесь недостаточно ( $E_2 > 1$ ), поскольку экстремумы групповой скорости у второй моды более острые, чем у первой.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом стационарной фазы получено решение для импульсных характеристик нормальных волн в волноводе Пекериса с поглощающим дном. Вычислительные возможности современных компьютеров позволили более детально, по сравнению с [12, 14], проанализировать границы применимости метода в приложении к короткоимпульсным сигналам.

Показано, что:

- момент времени переключения расчета с метода стационарной фазы на “метод Эйри” близок к максимуму функции Эйри (17), и должен определяться из условия непрерывности и максимальной гладкости реализации;
- для вычисления импульсных характеристик “третьего” приближения в разложении (9) недостаточно (во всяком случае, для высших мод);
- вступление грунтовой волны происходит мгновенно, без переходного процесса, а для волновода с поглощением квазипереходный процесс реализуется за счет роста коэффициента поглощения при приближении к критической частоте;
- при приближении к моменту “переключения” нелинейные искажения волнового процесса в водной и, особенно, в грунтовой волне значительно возрастают.

Сравнение эффективности алгоритма обратного быстрого преобразования Фурье и метода стационарной фазы для моделирования ИХ гидроакустических волноводов позволяет сделать вывод о том, что последний более применим для значительных расстояний между источником и приемником.

1. *Pekeris C. L., Longman I. M.* Ray-theory solution of the problem of propagation of explosive sound in a layered liquid // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1958.– **30**, N 4.– P. 323–328.

2. *Smith P. W.* The averaged impulse response of a shallow-water channel // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1971.– **50**, N 1.– P. 332–336.

3. *Ратникова Л. И.* Методы расчета сейсмических волн в тонкослоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 124 с.

4. *Акустика океана. Современное состояние* / Под ред. Л. М. Бреховских, И. Б. Андреевой.– М.: Наука, 1982.– 247 с.

5. *Лаваль Р., Лабаск Р.* Влияние неоднородностей и неустойчивости среды на пространственную и временную обработку сигналов // *Подводная акустика и обработка сигналов* / Под ред. Л. Бьерне.– М.: Мир, 1985.– С. 32–43.

6. *Лаваль Р.* Расчет усредненных потерь при распространении звука и частотно-пространственных функций когерентности сигналов в мелководных районах // *Акустика дна океана* / Под ред. У. Купермана, Ф. Енсена.– М.: Мир, 1984.– С. 245–261.

7. *Ди Наполи Ф. Р., Поттер Д., Херстейн П.* Акустические волны, взаимодействующие с дном: модель и эксперимент // *Акустика дна океана* / Под ред. У. Купермана, Ф. Енсена.– М.: Мир, 1984.– С. 174–185.

8. *Акустика океана* / Под ред. Дж. Де Санто.– М.: Мир, 1982.– 318 с.

9. *Proud J. M., Tamarkin P., Kornhauser E. T.* Propagation of sound pulses in a dispersive medium // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1956.– **28**, N 1.– P. 80–85.

10. *Buckingham M. J.* Causality, Stokes’ wave equation, and acoustic pulse propagation in a viscous fluid // *Phys. Rev. E.*– 2005.– **72**.– P. 026610(1–9).

11. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана. Теория и эксперимент в подводной акустике.– М.: Мир, 1969.– 301 с.

12. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 343 с.

13. *Ярошенко А. А., Ластовенко О. Р., Лисютин В. А.* О диссипативных модах в гидроакустическом волноводе с дном в виде полупространства с поглощением // *Вісн. СумДУ. Сер. Фізика, математика, механіка.*– 2008.– N 1.– С. 181–189.

14. *Пекерис К.* Теория распространения звука взрыва в мелкой воде // *Распространение звука в океане.*– М.: ИИЛ, 1951.– С. 48–156.

15. *Ластовенко О. Р., Лисютин В. А., Ярошенко А. А.* О частотных зависимостях групповой скорости мод в гидроакустическом волноводе с дном в виде поглощающего полупространства // *Акустичний симпозіум “КОНСОНАНС-2007”. Збірник праць.*– К.: Ін-т гідромех. НАН України, 2008.– С. 134–140.

16. *Buckingham M. J., Giddens E. M.* On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2006.– **119**, N 1.– P. 123–147.

17. *Рыжиков Ю. И.* Вычислительные методы.– СПб.: БХВ, 2007.– 400 с.

18. *Грінченко В. Т., Вовк І. В., Мацішура В. Т.* Основы акустики.– К.: Наук. думка, 2007.– 640 с.

19. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 830 с.