Доповіді
національної
академії наук
України

3 • 2014

МЕХАНІКА

УДК 534

В. Л. Крупенин, К. Б. Мягкохлеб

Об одном классе авторезонансных машин виброударного действия

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины $\boxed{\text{А. Е. Божко}}$)

Рассмотрен механизм организации авторезонансных технологических машин виброударного действия, основанный на организации цепи обратной связи, включающей измерение импульсов удара рабочего органа, который является интегралом движения в соответствующей консервативной модели процесса. Приводятся примеры и даются расчетные формулы. Указано, что подобные принципы организации машин могут быть построены и при измерении других интегралов движения.

Рассмотрим в качестве примера модель одного класса авторезонансных машин виброударного действия [1]. Следуя методикам, предложенным в [2–4], представим исследуемый объект как линейную систему с произвольным числом степеней свободы (рис. 1), содержащую рабочий орган в виде твердого тела массой m.

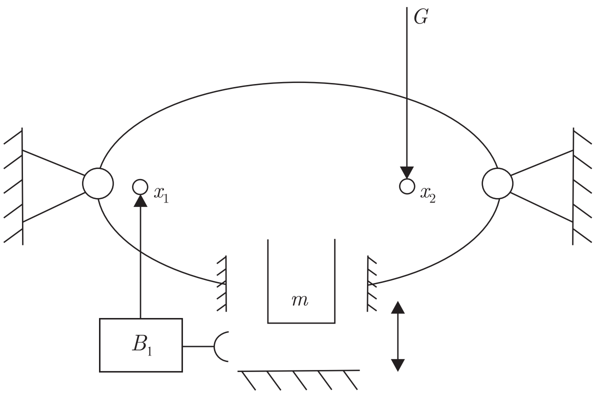

Рис. 1. Объект — линейная система с произвольным числом степеней свободы

Будем предполагать, что в результате построения математической модели или в результате натурных измерений известна система операторов динамической податливости [2, 3], полностью определяющих линейную часть системы. Рабочий процесс заключается в организации периодических соударений между рабочим органом и неподвижным ограничителем (обрабатываемой поверхностью).

Пусть координата рабочего органа массой m, совершающего одномерные колебания, есть x. Пусть, далее, в точке x_1 приложена постоянная сила G, обеспечивающая прижим рабочего органа к ограничителю, в точке x_2 приложено управляющее силовое воздействие B_1, вид которого нужно указать, исходя из конструктивных особенностей авторезонансной системы. Это воздействие, очевидно, формируется при помощи организации цепи обратной связи. Вблизи точки контакта рабочего органа с ограничителем помещен датчик, измеряющий какие-либо параметры его движения. Управляющее воздействие формируется в соответствии с сигналом датчика.

Приводя внешние силы к точке x, можно записать уравнение движения в операторной форме

$$x(t) = L_1(0)G + L_2(p)B_1 - L(p)\Phi(x, x_t), \tag{1}$$

где $\Phi(x, x_t)$ — сила ударного взаимодействия [2, 3]; индексация по независимой переменной обозначает дифференцирование; $L_n(p)$ — оператор из точки x_n в точку x (при этом, если $x_n \equiv x$, то индекс опускается); $p \equiv d/dt$ — оператор дифференцирования.

Удар предполагается абсолютно упругим; потери энергии при рабочем процессе могут быть учтены, например, введением соответствующих составляющих в представление для оператора $L(p)$ [2–5]. Предполагается также, что все преобразователи, входящие в систему, работают безынерционно.

В отсутствие трения и управляющего воздействия уравнение движения консервативной системы, отвечающей (1), будет иметь вид

$$(t) = L_1(0)G - L_{10}(p)\Phi(x, x_t), \tag{2}$$

где для операторов $L_{n0}(p)$ предполагается, что $\operatorname{Im} L_{n0}(i\omega) = 0$, $\operatorname{Re} L_{n0}(i\omega) = \operatorname{Re} L_n(i\omega)$.

Пусть $x_0 \equiv L_1(0)G$. Периодический режим с одним соударением за период движения консервативной системы (T_0) в предположении, что начало отсчета времени совмещено с ударом, имеет вид [2, 3]:

$$x(t) = x_0 - J\chi(\omega_0, t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \tag{3}$$

где периодическая функция Грина (ПФГ), отвечающая оператору $L_{10}(p)$, дается рядом Фурье [2, 3]

$$\chi(\omega_0, t) = T_0^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{10}(ik\omega_0) \exp(ik\omega_0 t). \tag{4}$$

Импульс удара в данном случае дается соотношением:

$$J = 2m|x_t(-0)| \geqslant 0 \tag{5}$$

и определяется из условия совместности [2, 3] $x(0) = \Delta$, где Δ — величина зазора или предварительного натяга. Из соотношения (5) получаем

$$J = \frac{x_0 - \Delta}{\chi(\omega_{0,}0)}. \tag{6}$$

Импульс удара J в консервативной виброударной системе оказывается интегралом движения, взаимно-однозначно связанным с полной энергией E. Наша авторезонансная система будет организована так, что обратная связь будет построена в результате фиксации значений какого-либо из интегралов движения. Будет показано, что это весьма удобный способ организаций авторезонансных машин виброударного действия.

Частотные диапазоны существования решения (3), (6) определяются в конкретных случаях из условия $x(t) \leqslant \Delta$. На практике проверяют выполнение условия $J \geqslant 0$, что в большинстве случаев равносильно.

Соотношение (5) определяет уравнение скелетной кривой $J = J(\omega_0)$.

Перепишем уравнение движения (1), используя оператор динамической жесткости $L^{-1}(p)$ [2, 3, 5]:

$$\begin{aligned}
&L^{-1}(p)x = G_x + B(p;x) - \Phi(x, x_t),\\
&G_x = L^{-1}(0)L_1(0)G,\\
&B(p;x) = L^{-1}(p)L_2(p)B_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Будем строить управляющее воздействие $B(p;x)$ таким, чтобы в исходной системе (1) можно было реализовать периодический автоколебательный режим движения, который сохранял бы форму режима движения консервативной системы (3).

Пусть $L^{-1}(p) = W_1(p) + W_2(p)$, причем $\operatorname{Im} W_1(i\omega) = \operatorname{Re} W_2(i\omega)$. Решение (5) построено в предположении $W_2(p) \equiv 0$. Внесем представление (3) в соотношение (7) при некотором значении частоты ω_0, удовлетворяющему условию $x(t) \leqslant \Delta$, и найдем в результате

$$W_2(p)[x_0 - J\chi(\omega_0, t)] = B[p; x_0 - J\chi(\omega_0, t)]. \tag{8}$$

Будем далее искать вид функции $B(p;x)$ в классе функций со структурой $\{K(J)W(p)\}$, где $K(J)$ — некоторая дифференцируемая на любом конечном отрезке функция; $W(p)$ — мероморфная функция комплексного переменного p. Принимая во внимание, что $W_2(p)x_0 = 0$, из соотношения (8) находим:

$$W_2(p)[-J\chi(\omega_0, t)] = K(J)W(p)[-J\chi(\omega_0, t)]. \tag{9}$$

Таким образом, должно быть

$$W(p) = W_2(p), \qquad K(J) = 1. \tag{10}$$

Итак, получены условия, определяющие вид управляющего воздействия B. Из уравнения $K(J) = 1$ можно определить стационарные значения импульса J^0, а из обращения уравнения скелетной кривой $J(\omega)$ — частоты автоколебаний. Выберем, для определенности, $K(J) = K_0 J^{-1}$, $K_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда $J^0 = K_0$ и частоты автоколебаний определяются из соотношения $K_0 = J(\omega)$.

Найденные решения надо исследовать на устойчивость. В инженерных расчетах часто используют так называемое энергетическое условие [2, 3, 5]. Строго говоря, энергетическое условие является лишь необходимым. Эффективность использования этого условия в прикладных задачах широко известна [2–5].

Составим функцию $E(J)$, отвечающую балансу работ неконсервативных сил за период движения T

$$E(J) = -J^2 \int_0^T [W_2(p)\chi(t) - K(J)W_2(p)\chi(t)]p\chi(t)\,dt. \tag{11}$$

После преобразований получаем

$$(J) = -J^2\lambda[1 - K(J)], \qquad \lambda = \mathrm{const} > 0. \tag{12}$$

Для асимптотически устойчивых периодических режимов при стационарном значении интеграла движения (в данном случае импульса удара) силы диссипации стабилизируют систему и поэтому в соответствии с энергетическим условием $dE/dJ < 0$ (при $J = J^0$). В соответствии с вычисленным

$$\frac{dE}{dJ} = J^2\lambda\frac{dK}{dJ}. \tag{13}$$

При $dKfdJ < 0$ автоколебания оказываются устойчивыми. В случае, когда $K(J) = K_0/J$, $dK/dJ = -K_0J^{-2}$. Стационарное значение $J^0 = K_0 > 0$ и режим асимптотически устойчив. Более точно анализ устойчивости может быть выполнен при помощи других современных методов.

С технической точки зрения, организация подобного режима позволяет при минимуме энергетических затрат добиться максимальной эффективности процесса. Вопрос о практической реализации такой установки представляет собой самостоятельную проблему. Можно указать несколько путей ее решения. Важные рекомендации можно найти в [4].

В качестве важного примера рассмотрим систему с одной степенью свободы (рис. 2).

Линейный осциллятор совершает колебания с соударениями о неподвижный ограничитель *2*, на котором установлен датчик импульсов удара, формирующий сигнал, пропорциональный J. Этот сигнал преобразуется в некоторую функцию $K(J)$, которая после перемножения с сигналом, поступающим с датчика скорости *1*, подается на возбудитель колебаний *4*.

Считая массу ударника единичной, уравнение движения запишем в виде

$$(p^2 + \Omega^2 + 2bp)x = -\Phi(x, x_t) + K(J)px, \tag{14}$$

где $b > 0$ — коэффициент вязкого демфирования. В силу того, что рассматривается система с зазором, сила $G = 0$. В консервативном случае ($b = K = 0$) решение (3), (5) имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} &x(t) = -J\chi(t),\\ &\chi(t) = \left[2\Omega\sin\frac{\Omega T_0}{2}\right]^{-1}\cos\Omega\left(t - \frac{T_0}{2}\right),\\ &J = -2\Omega\,\mathrm{tg}(\pi\Omega\omega_0^{-1}). \end{aligned} \tag{15}$$

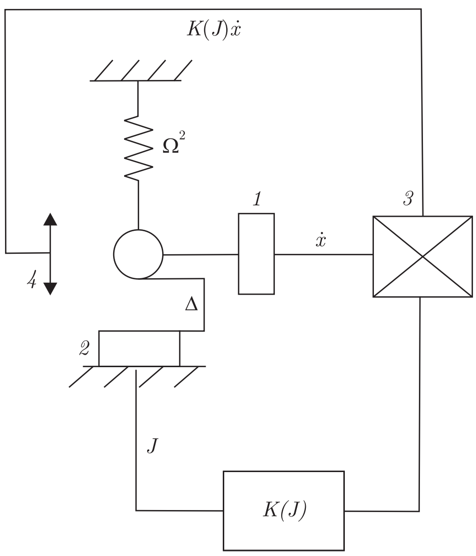

Рис. 2. Система с одной степенью свободы

Указанное во второй формуле (15) конечное представление для периодической функции Грина имеет место только для $t \in [0, T]$, а для всех $t \in \mathbf{R}$ это представление должно быть продолжено по периодичности. Диапазон собственных частот системы $\Omega \leqslant \omega < 2\Omega$. В данном случае

$$W_1(p) = p^2 + \Omega^2, \qquad W_2(p) = 2bp.$$

При $K(J) = K_0 J^{-1}$ стационарное значение импульса удара $J^0 = K_0/2b$.

Решение сохраняет вид, описываемый первой формулой (15). В соответствии с третьей формулой (15), частота автоколебаний $\omega^0 = \pi\Omega\{\pi - \operatorname{arctg}[K_0/(4b\Omega\Delta)]\}^{-1}$. Найденный режим асимптотически устойчив [5].

Следует заметить, что организация рассматриваемых машин требует, очевидно, жесткого запуска [2, 3] виброударного процесса, так как для организации фиксации ударных импульсов процесс должен начаться.

При помощи частотно-временных методов [2, 3, 5] аналогично могут быть исследованы и системы более высокой размерности. Кроме того, могут быть использованы и другие интегралы движения.

Учет потерь энергии при ударе может быть выполнен при помощи “поправки” в коэффициенте вязкого трения [5] $b = b_1 + r\pi^{-1}\Omega$, где b_1 — “истинный” коэффициент вязкого трения; $r = 1 - R$, R — коэффициент восстановления $(0 < R \leqslant 1)$.

Рассмотренная система обладает замечательным свойством сохранять форму режима движения консервативной системы. Такие системы называются псевдоконсервативными [6].

Следует заметить, что принципы авторезонансного построения виброударных систем могут быть использованы при проектировании специальной виброиспытательной аппаратуры [7, 8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 13-08-01235а, 13-08-90419 Укр_ф_а) и ГФФИУ (проект № Ф53.7/038).

1. *Крупенин В. Л.* Ударные и виброударные машины и устройства // Интернет-журн. “Вестник научно-технического развития” (vntr. ru). – 2009. – № 4(20). – С. 3–32.

2. *Бабицкий В. И., Крупенин В. Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. – Москва: Наука, 1985. – 320 с.
3. *Babitsky V. I., Krupenin V. L.* Vibration of strongly nonlinear discontinuous systems. – Berlin: Springer, 2001. – 404 p.
4. *Асташев В. К., Бабицкий В. И., Вульфсон И. И. и др.* Динамика машин и управление машинами. – Москва: Машиностроение, 1988. – 240 с.
5. *Веприк А. М., Крупенин В. Л. и др.* Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. – Ленинград: Машиностроение, 1987. – 76 с.
6. *Krupenin V. L.* To the calculation of pseudo-conservative self-oscillation vibroimpact systems // Письма в интернет-журн. "ВНТР" (vntr.ru). – 2010. – No 12(40). – P. 32–33.
7. *Божко Е. А., Крупенин В. Л., Мягкохлеб К. Б.* Математическая модель и структурная схема трехкоординатной системы возбуждения вибраций электромагнитного типа // Интернет-журн. "Вестник научно-технического развития" (vntr.ru). – 2013. – № 6(70). – С. 3–9.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Институт машиноведения им. А. А. Благонравова" РАН, Москва, Россия
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 11.09.2013

В. Л. Крупенін, К. Б. Мягкохліб

Про один клас авторезонансних машин віброударної дії

Розглянуто механізм організації авторезонансних технологічних машин віброударної дії, оснований на організації ланцюга зворотного зв'язку, що включає вимірювання імпульсів удару робочого органу, який є інтегралом руху у відповідній консервативній моделі процесу. Наведено приклади і даються розрахункові формули. Зазначено, що подібні принципи організації машин можуть бути побудовані і при вимірюванні інших інтегралів руху.

V. L. Krupenin, K. B. Myagkohlib

On a class of autoresonant machines of vibro-impact action

The mechanism of organization of autoresonant vibro-impact technological machines is described. It involves a feedback loop, which includes the measurement of pulses hitting the working body, which is the integral of a conservative movement within the corresponding model. Examples and the calculation formulas are given. It is indicated that similar principles of organization of machines can be developed at the measurement of other integrals of motion.