УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко, А.С. Гололобова**

Моделирование сложных теплофизических систем с применением нечеткой логики

Исследуется один класс задач типа Стефана, имеющий место в теплофизике. Построено приближенное решение этой задачи. Управление процессом кристаллизации осуществляется с использованием нечеткой логики.

Двумерная модель кристаллизации с конвекцией. Процессы кристаллизации, которые встречаются в природе, сопровождаются конвективным перемешиванием в жидкой фазе. Ниже рассматривается постановка задачи, в которой конвекция вызвана наличием заданного вихря интенсивности μ. Исследование состоит в приближенном анализе свободной границы от интенсивности μ. Рассмотрим стационарный случай в полуполосе $D = \{-1 < x < 1,\ H < y < 0\}$. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой D_γ^-, при этом концы γ лежат на вертикалях $x = \pm 1$. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y. Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока, которая удовлетворяет условиям:

$$\Delta\psi = \mu, \qquad (x, y) \in D_\gamma^+, \qquad \mu = \text{const} > 0, \qquad \psi = 0, \qquad (x, y) \in \partial D_\gamma^+.$$

Тут μ считается достаточно малым численным параметром. Требуется определить, кроме функции тока $\psi(x, y)$, тройку $(u^\pm(x, y), \gamma)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&\lambda\Delta u^+ - \psi_y u_x^+ + \psi_x u_y^+ = 0, \qquad (x, y) \in D_\gamma^+, \qquad \lambda = \text{const},\\
&u^+(x, 0) = \vartheta, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad \vartheta = \text{const} > 1,\\
&u_x^\pm \pm \omega_0^\pm u^\pm = 0, \qquad x = \pm 1, \qquad (x, y) \in \Gamma_\gamma^+ \bigcup \Gamma_\gamma^-,\\
&\Delta\overline{u} = 0, \qquad (x, y) \in D_\gamma^-, \qquad \overline{u}(x, H) = 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,\\
&\overline{u}(x, y) = u^+(x, y) = 1, \qquad |\nabla u^-|^2 - k^2|\nabla u^+| = 0, \qquad (x, y) \in \gamma,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \bigcap \{x = \pm 1\}$; $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \bigcap \{x = \pm 1\}$; $\omega_0^\pm$ — числа Нусельта.

Предложен метод изучения нелинейной задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ:

$$\psi(x, y; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi_k(x, y), \qquad u^\pm(x, y; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^\pm(x, y),$$

$$y(x; \mu) = \sum_{k=o}^{\infty} \mu^k y_k(x), \qquad \gamma : y = y(x; \mu), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Изучим теперь нулевые и первые приближения задачи (1).

Приближенное решение задачи (1). Нулевое приближение $(u_o^{\pm}(x,y),\gamma_o)$ задачи (1) ищем из условия минимума функционала

$$Y(u^+,u^-,\gamma_0)=\iint\limits_{D^-_{\gamma_0}}[u_x^{-2}+u_y^{-2}]\,dxdy+k^2\iint\limits_{D^+_{\gamma_0}}[u_x^{+2}+u_y^{+2}]\,dxdy+$$

$$+k^2\omega_0^+\int\limits_{\Gamma^+_\gamma}[u^{+2}-1]\,dy+\omega_0^-\int\limits_{\Gamma^-_\gamma}[u^{-2}-1]\,dy$$

на соответствующем множестве допустимых функций в классе $u_y^+>0$ в $D^{\pm}_\gamma$. Этот функционал может быть представлен следующим образом:

$$I(y_1,y_2)=\iint\limits_{\Delta_1}\frac{1+y_{1x}^2}{y_{1u}}dxdu+k^2\iint\limits_{\Delta_2}\frac{1+y_{2x}^2}{y_{2u}}dxdu+$$

$$+\omega_0^+k^2\int\limits_1^{\vartheta}(u^2-1)[y_{2u}(1,n)+y_{2u}(-1,u)]\,du+\omega_0^-\int\limits_0^1(u^2-1)[y_{1u}(1,u)+y_{1u}(-1,u)]\,du,$$

где $\Delta_1=(-1<x<1,\ 0<u<1)$, $\Delta_2=(-1<x<1,\ 1<u<\vartheta)$, $y_1(x,u)$ и $y_2(x,u)$ — решения уравнений $u_1(x,y)-u_1=0$, $u_2(x,y)-u_2=0$. Функционал $I(y_1,y_2)$ минимизируется методом Ритца [1].

Далее пусть $u(x,y)=u_1^+(x,y)$ при $(x,y)\in\overline{D}^+_{\gamma_0}$, и $u(x,y)=u_1^-(x,y)$, если $(x,y)\in\overline{D}^-_{\gamma_0}$, где $u(x,y)$ — решение следующей задачи: $\Delta u=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, $u(x,0)=0$, $u(x,H)=0$, $u_x(0,y)=0$, $H\leqslant y\leqslant 0$, $u_x+\omega_0^{\pm}u=0$, $x=1$, $(x,y)\in\partial D^{\pm}_\gamma\setminus\gamma$. Справедливо такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть μ — достаточно малая величина. Тогда справедливо представление*

$$y(x;\mu)=y_0(x)-\mu\frac{u_1^{\pm}(x,y)}{u_{0y}^{\pm}(x,y)}+0(\mu),\qquad (x,y)\in\gamma_0,$$

где $y_0(x)$ — решение уравнения $u_0(x,y)-1=0$ в классе функций $u_{oy}>0$ в D.

Пространственная модель кристаллизации. Пусть Ω — заданная область в R^3, представляющая собой цилиндр $\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1^2+x_2^2<R^2, x_3<0\}$, и пусть Q — боковая поверхность Ω. Обозначим через Γ достаточно гладкую поверхность (поверхность кристаллизации, отделяющую жидкую часть металла D^+_γ от твердой D^-_γ). Поверхность Γ разбивает боковую поверхность Q на два куска Γ^+и Γ^-, т. е. $Q=\Gamma^+\bigcup\Gamma^-$. Задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе состоит в нахождении поля скоростей в жидкой фазе $\overrightarrow{V}(x)=(V_1(x),V_2(x),V_3(x))$, давления $p(x)$, распределения температур $u^{\pm}(x)$ и свободной поверхности по следующим условиям:

$$\lambda(\overrightarrow{V\nabla})u^+(x)=k\nabla^2u^+(x),\qquad x\in\Omega^+_\gamma,$$

$$\nabla^2\overline{u}(x)=0,\qquad x\in\Omega^-_\gamma,$$

$$(\overrightarrow{V}\nabla)\overrightarrow{V}(x)+\nabla p(x)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\overrightarrow{V}(x)+\overrightarrow{f}(u^+),\qquad \operatorname{div}\overrightarrow{V}(x)=0,\tag{2}$$

$$x \in \Omega^+, \qquad \vec{V}|_{\partial\Omega^+} = 0, \qquad \frac{\partial}{n} u^+|_{x\in H} = h(x),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} u^{\pm} + \omega_0^{\pm} u^{\pm}\right] = 0, \qquad u^+ = u^- = 1, \qquad \frac{\partial u^-}{\partial u} - k\frac{\partial u^+}{\partial u} = 0, \qquad x \in \Gamma,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\Omega^{\pm}$ — области соответственно жидкой и твердой фаз; H — верхнее основание цилиндра Ω.

В задаче (2) параметры k, λ, Re допускаются постоянными величинами, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, функция $\vec{f}(u^+)$ принадлежит классу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u)$ ограничена в R^1. При малых числах Рейнольдса Re задача (2) имеет решение, при этом $u^{\pm} \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$, $\vec{V}(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}^{+})$, а Γ принадлежит классу $C^{3+\alpha}$ [2].

Приближенное решение задачи (2). Пусть $u_0^{\pm}(x)$ — решение стационарной задачи (2) без конвекции в области $\Omega_0^{\pm}$ с теми же условиями из (2) при $\mathrm{Re} = 0$, а Γ_0 — свободная поверхность. Для точек поверхности Γ_0 введем криволинейные координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Свободную поверхность Γ будем искать в виде $\Gamma = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega), x(\omega) \in \Gamma_0\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega)$ класса $C^{3+\alpha}(\Gamma_0)$. Допустим, что неизвестные величины нашей задачи можно искать в виде $u^{\pm}(x; \mathrm{Re}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x)$, $V_i(x; \mathrm{Re}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^k V_{ik}(x)$, $p(x; \mathrm{Re}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\mathrm{Re})^k p_k(x)$, $p(\omega; \mathrm{Re}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k p_k(\omega)$, $i = 1, 2, 3$. Справедливо утверждение.

Теорема 2. *Пусть $u_1^{\pm}(x)$ и $u_2^{\pm}(x)$ — решения следующих задач:*

$$(\vec{V}_2\nabla)\vec{V}_1 + \nabla p_1 = \nabla^2 \vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+)u_1^+, \qquad \operatorname{div} \vec{V}_2 = 0, \qquad x \in \Omega_0^+, \qquad \vec{V}_2|_{\partial\Omega_0^+} = 0,$$

$$\lambda(\vec{V}_1\nabla)u_1^+ + \lambda(\vec{V}_2\nabla)u_0^+ = \nabla^2 u_2^+, \qquad x \in \Omega_0^+; \qquad \nabla^2 u_2^- = 0,$$

$$x \in \Omega_0^-; \qquad \left(\frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial n} + \omega_0^{\pm} u_2^{\pm}\right)\Big|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = 0, \qquad \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial n} = 0, \qquad x \in H;$$

$$\nabla^2 u_1(x) = F_1(x), \qquad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial u_1}{\partial n}|_H = 0, \qquad \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + \omega_0^{\pm} u_1\right)\Big|_{x\in\Gamma} = 0,$$

где $F_1(x) = \lambda(\vec{V}_1\nabla)u_0^+$ при $x \in \overline{\Omega}_0^+$ и $F_1(x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}_0^-$. Тогда при малых числах Re *справедлива формула*

$$\Gamma : x = x(\omega) - \vec{n}(\omega)\,\mathrm{Re}\,\frac{u_1^{\pm}(x(\omega))}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} - \vec{n}(\omega)(\mathrm{Re})^2 \frac{u_2^{\pm}(x(\omega)) - f_1(x(\omega))}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|}, \qquad x(\omega) \in \Gamma_0.$$

Управление процессом кристаллизации с применением нечеткой логики. Рассмотрим процесс кристаллизации металла, который имеет место в спецметаллургии [3]. Пусть u^* — температура, при которой происходит отделение слитка от стенок кристаллизатора. Эта температура будет достигаться при воздействии потоков мощности w^1, w^2, w^3, причем поток w^3 равномерно распределен в центре слитка. Далее рассматриваются все факторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые влияют на процесс кристаллизации, а также условия $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, при которых происходит появление нового слитка. Затем строится нечеткое управление с помощью метода Мамдани, который позволяет осуществить процесс управления в задаче кристаллизации. Числовые параметры, участвующие в построении управления задачи, выбираются из [3].

1. *Миненко А. С.* Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1546–1556.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
3. *Патон Б. Е.* Избранные труды. – Киев: Изд-во Ин-та электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 26.02.2013

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко, А. С. Гололобова**

Моделювання складних теплофізичних систем із застосуванням нечіткої логіки

Досліджується один клас задач типу Стефана, який має місце в теплофізиці. Побудовано наближений розв'язок цієї задачі. Управління цим процесом кристалізації здійснюється з використанням нечіткої логіки.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko, A. S. Gololobova**

Simulation of complex thermal physical systems with the use of a fuzzy logic

The Stephan problem is investigated. The approximate solution is constructed. The control over the process of crystallization with using a fuzzy logic is realized.