УДК 517.983

В. О. Лебідь, Л. П. Нижник

Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)

Проведено детальний спектральний аналіз зліченних графів, які є об'єднанням скінченного графа та напівобмеженого нескінченного ланцюжка. Охарактеризовано спектр матриці суміжності таких графів, побудовано спектральну міру, наведено у явній формі власні вектори та спектральний розклад за власними векторами.

1. Постановка задачі. Спектральна теорія графів є одним із актуальних напрямів у сучасній математичній фізиці (див. [1–8] і цитовану там літературу). Це пов'язано як із внутрішніми стимулами розвитку теорії, так і з вирішенням конкретних прикладних задач, які виникають у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних та транспортних мереж.

Простим неорієнтованим графом G називають пару (V, E), у якій V — деяка непорожня множина (множина вершин), а E — множина, що складається з невпорядкованих пар різних вершин V (множина ребер). З графом G однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої a_{ij} дорівнюють 1, якщо вершини з номерами i та j з'єднуються ребром, або — 0, якщо таке ребро відсутнє.

У випадку зліченних графів матриця $A(G)$ породжує в гільбертовому просторі $l_2(V)$ самоспряжений оператор $\mathbb{A}$, спектр якого має дискретну $\sigma_p(\mathbb{A})$ та неперервну компоненту $\sigma_c(\mathbb{A})$. Під спектральним аналізом графа G розуміють спектральний аналіз самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$.

Метою даної роботи є проведення детального спектрального аналізу локально скінченних графів $G_{n,\infty}$, які утворені приєднанням до скінченних графів G_n напівобмеженого ланцюжка $A_{\mathbb{N}}$, вершини якого можна занумерувати всіма натуральними числами $\mathbb{N}$, а ребра з'єднують лише вершини з послідовними номерами.

Матриця суміжності $A(G_{n,\infty})$ графа $G_{n,\infty}$ породжує самоспряжений обмежений оператор $\mathbb{A}$, який діє в $l_2(\mathbb{N})$ як

$$\mathbb{A}x = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{(n-1)i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + x_{n+1}, x_n + x_{n+2}, \ldots, x_{j-1} + x_{j+1}, \ldots\right). \quad (1)$$

Тут скінченна симетрична матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ є матрицею суміжності графа G_n.

Матриця суміжності напівобмеженого ланцюжка $A_{\mathbb{N}}$ є якобієвою матрицею J_0, у якої на головній діагоналі стоять нулі, а на двох побічних — одиниці. Добре відомо, що матриця J_0 породжує в просторі $l_2(\mathbb{N})$ самоспряжений оператор, спектр якого чисто абсолютно неперервний, однократний і утворює інтервал $[-2, 2]$ (див. [4, 9, 10]).

Більше того, для оператора J_0 у просторі $l_2(\mathbb{N})$ справедлива спектральна теорема про розклад за узагальненими власними функціями (див. [9]). Для кожного $\lambda \in [-2, 2]$ вектор-функція $\varphi_\lambda = (\varphi_{\lambda,1}, \varphi_{\lambda,2}, \ldots)$, де $\varphi_{\lambda,j} = P_{j-1}(\lambda)$, $j \geqslant 1$, є узагальненою власною функцією оператора J_0, що відповідає власному значенню λ, тобто $J_0\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

Тут $P_j(\lambda)$ є поліномом степеня j від λ, що виражається у вигляді $P_j(\lambda) = U_j(\lambda/2)$ через поліноми Чебишова другого роду $U_j(z) = \sin((j+1)\arccos z)/\sin(\arccos z)$. Для поліномів $P_j(\lambda)$ вірне рекурентне співвідношення $P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda)$ з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = \lambda$.

Кожному вектору $x \in l_2(\mathbb{N})$ відповідає його перетворення Фур'є $\widetilde{x(\lambda)}$ за узагальненим власним вектором

$$\widetilde{x(\lambda)} \equiv \mathfrak{F}x = (x, \varphi_\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_{\lambda,j}. \tag{2}$$

Функція $\widetilde{x(\lambda)}$ належить простору $L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda) \equiv L_2(\rho)$ квадратично сумовних функцій на інтервалі $[-2,2]$ з вагою $\rho(\lambda) = \sqrt{4-\lambda^2}/2\pi \equiv \rho_0(\lambda)$.

Вірне обернене перетворення Фур'є, визначене на всьому $L_2(\rho)$

$$x \equiv \mathfrak{F}^{-1}x = \int_{-2}^{2} \widetilde{x(\lambda)} \varphi_\lambda \rho(\lambda)\, d\lambda. \tag{3}$$

Для довільних x, $y \in l_2(\mathbb{N})$ справедлива рівність Парсеваля

$$(x,y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{L_2(\rho)}. \tag{4}$$

2. Повний граф. Якщо G_n — повний граф із n вершин (кожні дві вершини якого з'єднує ребро), то йому відповідає матриця суміжності, в якої всі елементи, крім діагональних, є 1, а на діагоналі стоять 0. Повний спектральний аналіз оператора вигляду (1) для повного графа дає така теорема.

Теорема 1. *Оператор $\mathbb{A}$ вигляду* (1), *що відповідає повному графу з n вершин, до однієї з вершин якого приєднаний нескінченний промінь, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(\mathbb{N})$. Спектр оператора містить дискретну та абсолютно неперервну компоненти.*

Дискретний спектр оператора $\mathbb{A}$ при $n \geqslant 3$ складається з двох власних значень: $\sigma_p(A) = \{-1$ кратності $n-2; \lambda_+\}$, де число λ_+ є додатним нулем квадратного полінома

$$p(\lambda) = (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-2)(n-3)\lambda - (n-2)\lambda^2. \tag{5}$$

Вектори, що мають вигляд $e_m = (0, 0, \ldots, 1, -1, 0, \ldots)$, де числа 1 та -1 стоять на місцях з номерами m та $m+1$, $m = 1, 2, \ldots, n-2$, є власними векторами оператора $\mathbb{A}$, що відповідають власному значенню $\lambda = -1$ та утворюють $(n-2)$-вимірний підпростір.

Власний вектор, що відповідає власному значенню λ_+, має вигляд

$$e_+ = (\underbrace{(n-1)^{-1}, \ldots, (n-1)^{-1}}_{n-1}, \mu, \mu^2, \ldots),$$

де число $\mu = [\lambda_+ - (n-2)](n-1)^{-1}$.

Абсолютно неперервний спектр оператора $\mathbb{A}$ утворює інтервал $[-2,2]$. Для довільного $\lambda \in [-2,2]$ узагальнений власний вектор оператора $\mathbb{A}$ явно виражається через поліноми $P_j(\lambda)$:

$$\varphi_\lambda = (\underbrace{P_0(\lambda), \ldots, P_0(\lambda)}_{n-1}, P_1(\lambda) - (n-2)P_0(\lambda), P_2(\lambda) - (n-2)P_1(\lambda) - (n-2)P_0(\lambda),$$
$$\ldots, P_{j-n+1}(\lambda) - (n-2)P_{j-n}(\lambda) - (n-2)P_{j-n-1}(\lambda), \ldots). \tag{6}$$

Для векторів $x \in H_c = l_2(\mathbb{N}) \ominus H_p$, де H_p — підпростір, що містить усі власні вектори $\mathbb{A}$, перетворення Фур'є $\widetilde{x(\lambda)}$ за узагальненими власними векторами, яке визначається (2), *належить простору $L_2(\rho)$ зі спектральною щільністю*

$$\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi p(\lambda)}, \tag{7}$$

де поліном $p(\lambda)$ визначається рівністю (5).

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$ є ізометричним оператором із підпростору $H_c \subset l_2(\mathbb{N})$ у простір $L_2(\rho)$. Вірне обернене перетворення Фур'є (3), *визначене на всьому $L_2(\rho)$. Для довільних $x, y \in H_c$ справедлива рівність Парсеваля* (4).

Доведення випливає з явного вигляду оператора $\mathbb{A}$ і наведених виразів для власних векторів. Враховуючи, що система поліномів $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ утворює ортонормований базис у просторі $L_2(\rho_0)$, а вираз $(1+\mu^2-\mu\lambda)^{-1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mu^m P_m(\lambda)$ є твірною для поліномів P_j, отримуємо вираз (7) для спектральної щільності аналогічно тому, як це зроблено для зіркових графів у роботі [11].

Приклад 1. При $n=3$ граф $G_{3,\infty}$ має вигляд трикутника, до однієї вершини якого приєднаний промінь. Спектр такого графа містить два прості власні значення $\sigma_p = \{-1, \sqrt{5}\}$ і абсолютно неперервну компоненту $\sigma_{ac} = [-2, 2]$. Спектральна щільність визначається як $\rho(\lambda) = \sqrt{4-\lambda^2}/(2\pi(5 - \lambda^2))$.

3. Загальний випадок. Розглянемо випадок $G_{n,\infty}$ графа, якому відповідає оператор $\mathbb{A}$ виду (1).

Теорема 2. *Для самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ вигляду* (1) *у просторі $l_2(\mathbb{N})$ власний вектор e_λ буде фінітним (у якого тільки скінченне число компонент відмінне від нуля) тоді й лише тоді, коли:*

а) усі його компоненти $e_{\lambda,j} = 0$ при $j \geqslant n$;

б) ранг матриці $\widetilde{A(\lambda)}$, отриманої з $A - \lambda I$ шляхом відкидання останнього стовпчика, менший ніж $n-1$;

в) вектор $\widehat{e_\lambda} = (e_{\lambda,1}, \ldots, e_{\lambda,n-1})$ є нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\widetilde{A(\lambda)}\widehat{e_\lambda} = 0. \tag{8}$$

Теорема 3. *Для самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ вигляду* (1) *у просторі $l_2(\mathbb{N})$ власному значенню λ з умовою $|\lambda| > 2$ відповідає нефінітний власний вектор тоді й лише тоді, коли число λ є розв'язком системи рівнянь*

$$\lambda = \mu + \mu^{-1}, \qquad \mu^{-1} = \frac{\det(\lambda I - \widehat{A})}{\det(\lambda I - A)}, \tag{9}$$

де $|\mu| < 1$, а матриця $\widehat{A}$ отримується із матриці A відкиданням останнього стовпчика і останнього рядка. З точністю до сталого множника нефінітний власний вектор має вигляд

$$e_\lambda = (e_{\lambda,1}, \ldots, e_{\lambda,n-1}, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^k, \ldots).$$

Вектор $\widetilde{e_\lambda} = (e_{\lambda,1}, \ldots, e_{\lambda,n-1}, \mu)$ є розв'язком рівняння

$$(A - \lambda I)\widetilde{e_\lambda} + \mu^2 e_n = 0, \tag{10}$$

де $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ — n-вимірний вектор.

Нехай поліном $r(\lambda)$ з коефіцієнтом, що дорівнює 1, при старшому степені λ є найбільшим спільним дільником $\det(\lambda I - A) = a(\lambda)r(\lambda)$ та $\det(\lambda I - \widehat{A}) = a(\lambda)r(\lambda)$, тоді, підставляючи $\mu^{-1} = \widehat{a}a^{-1}$ у рівність $\lambda = \mu + \mu^{-1}$, отримуємо, що множина власних значень λ оператора $\mathbb{A}$ вигляду (1), які відповідають нефінітним власним векторам, є множиною дійсних нулів полінома

$$p(\lambda) = \widehat{a(\lambda)}^2 + a(\lambda)^2 - \lambda\widehat{a(\lambda)}a(\lambda), \tag{11}$$

які за модулем більші, ніж 2, і для яких $\mu = a\widehat{a}^{-1}$ за модулем менші, ніж 1. Поліном (11) будемо називати спектральним для графа $G_{n,\infty}$. У спектрального полінома усі дійсні нулі прості і за модулем не менші, ніж 2.

Теорема 4. *Для $\lambda \in [-2, 2]$ існує і єдина вектор-функція $\varphi_\lambda = (\varphi_{\lambda,0}, \varphi_{\lambda,1}, \ldots)$, яка є узагальненим власним вектором для оператора $\mathbb{A}$ з власним значенням λ, і така, що всі її компоненти є поліномами від λ та задовольняють умови:*

1) вектор φ_λ ортогональний усім фінітним власним векторам оператора $\mathbb{A}$;

2) $\varphi_{\lambda,n} = \widehat{a(\lambda)}$, $\varphi_{\lambda,n+1} = a(\lambda)$;

3) існують і єдині числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ ($\gamma_k \neq 0$) такі, що при $j \geqslant 2n + 2$

$$\varphi_{\lambda,j} = P_j(\lambda) + \sum_{l=1}^{k} \gamma_l P_{j-l}(\lambda). \tag{12}$$

Теорема 5. *Нехай H_c — підпростір простору $l_2(V)$, який складається з векторів, ортогональних до всіх власних векторів самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ вигляду* (1). *Тоді справедливі розклади векторів $x \in H_c$ за узагальненими власними векторами φ_λ, тобто вірні рівності* (2)–(4), *де спектральна щільність $\rho(\lambda)$ визначається через поліноми $p(\lambda)$ у вигляді* (7).

Доведення теорем 2–5 використовує явний вигляд (1) оператора $\mathbb{A}$ і той факт, що компоненти звичайних і узагальнених власних векторів задовольняють просте різницеве рівняння $\psi_{j-1} + \psi_{j+1} = \lambda\psi_j$ при $j \geqslant n$. Дане рівняння має два лінійно незалежні розв'язки $\psi_j = \mu^{\pm j}$ при $|\lambda| > 2$, де $\mu + \mu^{-1} = \lambda$, або $\psi_j = P_j(\lambda)$, $\psi_j = P_{j+1}(\lambda)$ при $|\lambda| \leqslant 2$. Крім того, можна показати, що матриця суміжності графа $G_{n,\infty}$ унітарно еквівалентна ортогональній сумі скінченної симетричної матриці і якобієвої матриці J, у якої лише скінченне число елементів відмінні від відповідних елементів матриці J_0. Це дає можливість використати спектральну теорію якобієвих матриць [9, 10] і приводить до рівностей (2)–(4) у підпросторі H_c з деякою спектральною щільністю $\rho(\lambda)$. Зв'язок (7) спектральної щільності $\rho(\lambda)$ зі спектральним поліномом $p(\lambda)$ випливає із явного вигляду (12) для узагальнених власних векторів.

4. Циклічний граф. Розглянемо граф $C_{n,\infty}$, що утворений приєднанням нескінченного променя до однієї вершини циклічного графа C_n із n послідовно занумерованих вершин. Оператор $\mathbb{A}$, який відповідає матриці суміжності $A(C_{n,\infty})$, діє так:

$$\mathbb{A}x = (x_2 + x_n, x_1 + x_3, \ldots, x_{n-2} + x_n, x_1 + x_{n-1}, \ldots, x_{j-1} + x_{j+1}, \ldots). \tag{13}$$

Теорема 6. *Оператор $\mathbb{A}$ вигляду* (13), *що відповідає циклічному графу $C_{n,\infty}$ з n вершин, до однієї з вершин якого приєднаний нескінченний промінь, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(\mathbb{N})$.*

Дискретний спектр оператора $\mathbb{A}$, якому відповідають фінітні власні значення, має вигляд:

$$\sigma_p(\mathbb{A}) = \left\{\lambda_k = 2\cos\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1\right\}.$$

Абсолютно неперервна компонента спектра оператора $\mathbb{A}$ утворює інтервал $[-2,2]$. Спектральна щільність $\rho(\lambda)$ визначається рівністю (7), у якій спектральний поліном має вигляд (11), де $\widehat{a(\lambda)} = P_{n-1}(\lambda)/r(\lambda)$, $a(\lambda) = (P_n(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) - 2)/r(\lambda)$, а $r(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{[n/2]-1} (\lambda - \lambda_k)$.

Приклад 2. У випадку, коли нескінченний промінь приєднаний до циклічного графа із 4 вершин, оператор $\mathbb{A}$ має фінітний власний вектор $e_0 = (0, 1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$ з власним значенням $\lambda = 0$, два нефінітні власні вектори $e_\pm = ((1/\sqrt{2})\mu_\pm, 1/2, 1/2, \mu_\pm, \mu_\pm^2, \ldots)$, що відповідають власним значенням $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$, де числа $\mu_\pm = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ пов'язані з $\lambda_\pm$ співвідношеннями $\mu_\pm = \sqrt{2}\lambda_\pm^{-1}$. Власні значення $\lambda_\pm$ є нулями спектрального полінома $p(\lambda) = 4 + 4\lambda^2 - \lambda^4$.

Кожному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор

$$\varphi_\lambda = (2P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda) - P_0(\lambda), P_3(\lambda) - 2P_1(\lambda),$$
$$P_4(\lambda) - 2P_2(\lambda) - P_0(\lambda), \ldots, P_{j-2}(\lambda) - 2P_{j-4}(\lambda) - P_{j-6}(\lambda), \ldots). \quad (14)$$

Для векторів $x \in H_c \subset l_2(\mathbb{N})$ справедливі розклади (2), (3) за узагальненим власним вектором φ_λ вигляду (14).

5. *T*-подібні графи. Розглянемо граф $T_{p,q,\infty}$, утворений приєднанням променя $A_\mathbb{N}$ до вершини, що ділить ланцюжок на дві частини із p та q ребрами. Оскільки характеристичний многочлен $\det(\lambda I - A_m)$ матриці A_m простого ланцюга із m вершин виражається через поліном $P_m(\lambda)$, а характеристичний многочлен незв'язного графа є добуток характеристичних многочленів матриць суміжності кожної з компонент незв'язного графа, то для $T_{p,q,\infty}$-графа

$$\det(\lambda I - \widehat{A}) = P_p(\lambda)P_q(\lambda), \qquad \det(\lambda I - A) = P_{p+q+1}(\lambda). \quad (15)$$

У випадку, коли $p = q$, тобто у T-графа рівні плечі, взаємно прості поліноми $\widehat{a(\lambda)}$ і $a(\lambda)$ мають вигляд

$$\widehat{a(\lambda)} = P_q(\lambda), \qquad a(\lambda) = P_{q+1}(\lambda) - P_{q-1}(\lambda). \quad (16)$$

Тому спектральний поліном графа $T_{q,q,\infty}$ із (11) з урахуванням (16) має вигляд

$$p(\lambda) = P_q(\lambda)^2 + 2P_{q-1}(\lambda)^2 - 2P_{q+1}(\lambda)P_{q-1}(\lambda).$$

Оскільки нулями полінома $P_m(\lambda)$ є числа $\lambda_k = 2\cos(\pi k/(2(m+1)))$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то взаємно прості поліноми $\widehat{a(\lambda)}$ і $a(\lambda)$ для випадку (15) знаходяться явно. Зокрема, у випадку, коли числа $p+1$ і $q+1$ взаємно прості, $\widehat{a(\lambda)} = P_p(\lambda)P_q(\lambda)$, а $a(\lambda) = P_{p+q+1}(\lambda)$ і спектральний поліном має вигляд

$$p(\lambda) = P_{p+q+1}(\lambda)[P_{p+q+1}(\lambda) - \lambda P_p(\lambda)P_q(\lambda)] + P_p(\lambda)^2 P_q(\lambda)^2.$$

6. Зіркові графи. Розглянемо зірковий граф $S_{\vec{k},\infty}$, $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ з одним нескінченним променем, що приєднаний до центра зіркового графа $S_{\vec{k}}$ з ланцюговими променями, які містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_n$ вершин і виходять із центра зіркового графа. У цьому випадку можна у явному вигляді провести повний спектральний аналіз такого графа, виходячи із загальних теорем, наведених у п. 3. Дійсно, характеристичний многочлен матриці суміжності графа $S_{\vec{k}}$ явно виражається через поліноми $P_j(\lambda)$ у вигляді $\det(\lambda I - A) = \lambda P_{k_1}(\lambda) \cdots P_{k_n}(\lambda) - \sum\limits_{j=1}^{n} [P_{k_1}(\lambda) \cdots P_{k_j - 1}(\lambda) \cdots P_{k_n}(\lambda)]$. Характеристичний многочлен зіркового графа $S_{\vec{k}}$ з вилученим центром має вигляд $\det(\lambda I - \widetilde{A}) = P_{k_1}(\lambda) P_{k_2}(\lambda) \cdots P_{k_n}(\lambda)$. Тоді спектральний поліном зіркового графа $S_{\vec{k},\infty}$ визначається рівністю (11). У випадку, коли всі скінченні промені містять однакову кількість вершин, тобто $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k$, $r(\lambda) = P_k(\lambda)^{n-1}$ і спектральний поліном має вигляд

$$p(\lambda) = P_k(\lambda)^2 + n^2 P_{k-1}(\lambda)^2 - \lambda n P_k(\lambda) P_{k-1}(\lambda).$$

Цей вираз у випадку $k = 1$ тотожний розглянутому в роботі [11] $p(\lambda) = n^2 - (n-1)\lambda^2$. При $k = 2$ спектральний поліном має вигляд $p(\lambda) = 1 + (n^2 + n - 2)\lambda^2 - (n-1)\lambda^4$.

Роботу виконано в рамках проекту 03–01–12 "Обернені задачі в сучасній математичній фізиці" спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Автори висловлюють щиру подяку Ю. С. Самойленку за конструктивні зауваження.

1. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Теория и применение. – Киев: Наук. думка, 1984. – 384 с.
2. *Москалева Ю. П., Самойленко Ю. С.* Введение в спектральную теорию графов. – Киев: Центр учеб. лит., 2007. – 114 с.
3. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs. – New York: Springer, 2012. – 250 c.
4. *Mohar B.* The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra Appl. – 1982. – **48**. – P. 245–256.
5. *Mohar B., Woess W.* A survey on spectra of infinite graphs // Bull. London Math. Soc. – 1989. – **21**. – P. 209–234.
6. *Mantoiu M., Richard S., Tiedra de Aldecoa R.* Spectral analysis for adjacency operators on graphs // arXiv:math-ph/0603020v1 7 Mar 2006.
7. *von Below J.* An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431**. – P. 1–19.
8. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – Москва: Физматлит, 2004. – 272 с.
9. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
10. *Simon B.* Szego's theorem and its descendants: Spectral theory for L_2 perturbations of orthogonal polynomials. – Princeton, NY: Princeton Univ. Press, 2011. – 650 p.
11. *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем // Наук. зап. НаУКМА. – 2013. – **139**. – С. 18–22.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 18.09.2013

В. А. Лебедь, Л. П. Нижник

Спектральный анализ локально конечных графов с одним бесконечным лучом

Проведен детальный спектральный анализ счетных графов, которые являются объединением конечного графа и полуограниченной бесконечной цепочки. Охарактеризован спектр матрицы смежности таких графов, построена спектральная мера, приведены в явной форме собственные векторы и спектральное разложение по собственным векторам.

V. O. Lebid, L. P. Nizhnik

Spectral analysis of locally finite graphs with one infinite ray

A complete spectral analysis of countable graphs defined as the union of a finite graph and a semibounded infinite chain is given. The spectrum of the adjacency matrix of graphs is defined, a spectral measure is constructed, the eigenvectors and the spectral expansion in eigenvectors are presented.