УДК 517.983

Ю. С. Лінчук

Про один клас діагональних операторів у просторах аналітичних функцій та його застосування

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

У просторах функцій, аналітичних у довільних областях, досліджено деякі властивості діагональних операторів, які породжені тейлорівськими коефіцієнтами узагальнених гіпергеометричних функцій. Одержані результати застосовані до вивчення властивостей узагальненого оператора Данкла.

Нехай G — довільна область комплексної площини, $\mathcal{H}(G)$ — простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множина всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{H}(G)$. Оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ називається діагональним, якщо

$$Tz^n = \gamma_n z^n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

де $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ — деяка послідовність комплексних чисел. У теорії операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, цікавою і важливою є така задача: вказати необхідні та достатні умови на послідовність комплексних чисел $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, при виконанні яких оператор T, дія якого на степенях z визначається рівностями (1), продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Ці умови є досить простими для просторів функцій, аналітичних у кругових областях (див., наприклад, [1]). У роботі [2] у просторах функцій, аналітичних у зіркових відносно початку координат областях комплексної площини, досліджені діагональні оператори, які визначаються за допомогою тейлорівськіх коефіцієнтів функції Міттаг–Леффлера. Цей клас діагональних операторів використовувався при вивченні властивостей операторів узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва [3]. В роботах [4–6] розв'язувалася загальна задача про знаходження умов на послідовність комплексних чисел $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, за яких діагональний оператор T, який визначається рівностями (1), продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Ці умови формулюються в термінах аналітичного продовження характеристичних функцій відповідних діагональних операторів і їхнє використання при дослідженні властивостей конкретних операторів пов'язане зі значними технічними труднощами.

Метою даної роботи є дослідження деяких властивостей класу діагональних операторів, які породжені тейлорівськими коефіцієнтами узагальнених гіпергеометричних функцій. За допомогою цих властивостей вивчено деякі питання теорії операторів, які пов'язані з узагальненим оператором Данкла. В першій частині роботи встановлено можливість продовження зазначених вище діагональних операторів до операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ для зіркових відносно початку координат областей G комплексної площини. Встановлено умови ізоморфності таких операторів, а також досліджено можливість їхнього зображення у вигляді інтегральних операторів. Надалі для комплексного числа a і цілого невід'ємного числа n через $(a)_n$ позначатимемо символ Похгаммера, тобто $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ при $n \geqslant 1$, $(a)_0 = 1$.

Теорема 1. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і $a \in \mathbb{C}$. Тоді діагональний оператор P_a, який на степенях z визначається формулами*

$$P_a z^n = \frac{(a)_n}{n!} z^n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Якщо $0 < \operatorname{Re} a \leqslant 1$, то вказане продовження здійснюється формулою

$$(P_a f)(z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \left(U_z \frac{d}{dz} + E \right) \left(\int\limits_0^1 (1-t)^{1-a} t^{a-1} f(zt)\, dt \right),$$

де U_z — це оператор множення на незалежну змінну, а E — одиничний оператор. В загальному випадку доведення теореми стосовно продовження оператора P_a здійснюється індукцією за k, де $a \in \mathbb{C}$: $k - 1 < \operatorname{Re} a \leqslant k$, і $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і $a \in \mathbb{C}$, причому $a \neq -n$, $n = 0, 1, \ldots$. Тоді діагональний оператор P_a, який визначається формулами (2), продовжується до ізоморфізму з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.*

Наслідок 1. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, l — довільне фіксоване натуральне число, $a = (a_j)_{j=1}^l$, $b = (b_j)_{j=1}^l \in \mathbb{C}^l$, причому $a_j \neq -k$, $b_j \neq -k$, $j = \overline{1, l}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді діагональний оператор $S_{a,b}$, який на степенях z визначається формулами*

$$S_{a,b} z^n = \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_l)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_l)_n} z^n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

продовжується до ізоморфізму з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Нехай m — фіксоване натуральне число, $m \geqslant 2$, $\omega = \exp(2\pi i/m)$, G — довільна зіркова відносно початку координат і m-симетрична область комплексної площини, тобто $\omega G = G$. Через G^m позначимо множину $\{z^m \colon z \in G\}$. Тоді довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ можна єдиним способом зобразити у вигляді $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} z^j f_j(z^m)$, $z \in G$, де $f_j \in \mathcal{H}(G^m)$, $j = \overline{0, m-1}$ [7].

Теорема 3. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а $c^{(r)}$, $a_j^{(r)}$, $b_j^{(r)}$, $r = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, m}$, — довільні комплексні числа, для яких виконуються умови: $c^{(r)} \neq 0$, $a_j^{(r)} \neq -n$, $b_j^{(r)} \neq -n$, $r = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, m}$, $n = 0, 1, \ldots$. Тоді діагональний оператор T, який на степенях z визначається рівностями*

$$T z^{mn+r} = c^{(r)} \frac{(a_1^{(r)})_n (a_2^{(r)})_n \cdots (a_m^{(r)})_n}{(b_1^{(r)})_n (b_2^{(r)})_n \cdots (b_m^{(r)})_n} z^{mn+r}, \tag{3}$$

де $r = \overline{0, m-1}$, $n = 0, 1, \ldots$, продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$.

При певних обмеженнях на параметри оператор T з теореми 3 можна зобразити у вигляді добутку інтегральних операторів.

Теорема 4. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а $c^{(r)}$, $a_j^{(r)}$, $b_j^{(r)}$, $r = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, m}$, — довільні комплексні* *числа, для яких виконуються умови:* $\mathrm{Re}(a_j^{(r)} - r/m) > 0$, $\mathrm{Re}(b_j^{(r)} - a_j^{(r)}) > 0$, $r = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, m}$. *Тоді діагональний оператор* T*, який на степенях* z *визначається рівностями* (3), *формулою* $A = A_1 A_2 \cdots A_m$*, продовжується до ізоморфізму з класу* $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Тут A_j, $j = \overline{1, m}$, — оператори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які визначаються такими рівностями:

$$(A_j f)(z) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \omega^{-rl} c_{r,j} d_{r,j} \int_0^1 \tau^{m a_j^{(r)} - r - 1} (1 - \tau^m)^{b_j^{(r)} - a_j^{(r)} - 1} f(\omega^l z \tau)\, d\tau,$$

де $d_{r,j} = B^{-1}(a_j^{(r)}, b_j^{(r)} - a_j^{(r)})$, $j = \overline{1, m}$, $c_{r,1} = c^{(r)}$, $c_{r,j} = 1$, $j = \overline{2, m}$; $r = \overline{0, m-1}$. Тут символом $B(a_j^{(r)}, b_j^{(r)} - a_j^{(r)})$ позначено значення бета-функції Ейлера у відповідних точках.

Застосуємо одержані результати стосовно діагональних операторів до вивчення в просторі $\mathcal{H}(G)$ властивостей оператора виду

$$(\Lambda f)(z) = f'(z) + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \frac{f(\omega^j z) - f(0)}{z}, \tag{4}$$

де α_j, $j = \overline{0, m-1}$, — довільні комплексні числа, а G — довільна m-симетрична область комплексної площини, яка містить початок координат. Цей оператор є узагальненням оператора Данкла, який одержується з (4) при $m = 2$ та $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$. Властивості оператора Данкла в просторах аналітичних функцій досліджувалися в працях [8, 11].

Вивчимо умови, при яких узагальнений оператор Данкла (4) є еквівалентним до оператора диференціювання в просторі $\mathcal{H}(G)$. Оператор Λ є оператором зваженого зсуву, причому $\Lambda z^n = \lambda_n z^{n-1}$, де $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_n = n + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \lambda_j \omega^{jn}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 5. *Нехай* G *— довільна зіркова відносно початку координат та* m*-симетрична область комплексної площини. Для того щоб оператор* Λ *був еквівалентним до оператора* d/dz *у просторі* $\mathcal{H}(G)$*, необхідно і достатньо, щоб* $\lambda_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

За допомогою теореми 5 можна одержати опис комутанта оператора Λ, а також встановити його гіперциклічність та хаотичність [10] у просторі $\mathcal{H}(G)$, подібно до того, як це зроблено в [11] для оператора Данкла.

При певних обмеженнях на параметри узагальненого оператора Данкла Λ оператор перетворення T оператора d/dz в оператор Λ можна зобразити у вигляді добутку інтегральних операторів. Нехай виконується умова

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \omega^{ks}\right) > 0, \qquad s = \overline{0, m-1}. \tag{5}$$

Тоді оператор T_j, який визначається формулою

$$(T_j f)(z) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \omega^{-rl} t_{j,r} \int_0^1 \tau^{j-1} (1 - \tau^m)^{q(r+j)-1} f(\omega^l z \tau)\, d\tau, \tag{6}$$

де $t_{1,r} = r!/(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r) B^{-1}((r+1)/m, q(r+1))$ і $t_{j,r} = B^{-1}((r+j)/m, q(r+j))$ при $j = \overline{2, m}$, а $q(r+j) = \Big(\sum\limits_{k=0}^{m-1} \alpha_k \omega^{k(r+j)}\Big)/m$, $r = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, m}$, належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Теорема 6. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а комплексні числа α_j, $j = \overline{0, m-1}$, задовольняють умову* (5). *Тоді оператор $T = T_1 T_2 \cdots T_m$, де T_j, $j = \overline{1, m}$, визначаються рівностями* (6), *є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, для якого виконується рівність $Td/dz = \Lambda T$.*

1. *Deters I. N., Seubert S. M.* Cyclic vectors of diagonal operators on the space of functions analytic on a disk // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **334**, No 2. – P. 1209–1219.
2. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда–Леонтьева // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 5. – С. 72–74.
3. *Лінчук Н. Є., Лінчук С. С.* Деякі властивості операторів узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 1. – С. 61–68.
4. *Linchuk S. S.* Diagonal operators in spaces of analytic functions and their applications // Current problems in function theory. – Rostov-on-Don: Rostov. Gos. Univ., 1987. – P. 118–121.
5. *Братищев А. В.* О линейных операторах, символ которых является функцией произведения своих аргументов // Докл. РАН. – 1999. – **365**, № 1. – С. 9–12.
6. *Müller J.* The Hadamard multiplication theorem and applications in summability theory // Complex variabl. Theory Appl. – 1992. – **18**. – P. 155–166.
7. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus. – Dordrecht: Kluwer, 1990. – 208 p.
8. *Ben Salem N., Kallel S.* Integro-differential-difference equations associated with the Dunkl operator and entire functions // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2004. – **45**, No 4. – P. 699–725.
9. *Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K.* Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. – 2005. – **106**, No 1–2. – P. 101–116.
10. *Братищев А. В.* Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространства аналитических функций // Вестн. ДГТУ. – 2009. – **9**, № 2. – С. 196–207.
11. *Забирова К. Р., Напалков В. В.* Операторы свертки Данкла и их свойства // Докл. РАН. – 2013. – **449**, № 6. – С. 632–634.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 12.09.2013

Ю. С. Линчук

Об одном классе диагональных операторов в пространствах аналитических функций и его применение

В пространствах функций, аналитических в произвольных областях, исследованы некоторые свойства диагональных операторов, порожденных тейлоровскими коэффициентами обобщенных гипергеометрических функций. Полученные результаты применены к изучению свойств обобщенного оператора Данкла.

Yu. S. Linchuk

On a class of diagonal operators in the spaces of analytic functions and its application

Diagonal operators induced by the Taylor coefficients of hypergeometric functions and some properties of such operators in the spaces of functions analytic in arbitrary domains are investigated. The results are applied to study properties of the generalized Dunkl operator.