УДК 004.942

А. С. Туренко
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Дослідження властивостей одного узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів

Представлено основні властивості узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів — антикватрніонів. Уведено означення та досліджено спряження антикватерніонів, їхня норма та дільник нуля, а також правила виконання операцій з ними.

Ключові слова: *антикватерніон, гіперкомплексна числова система, дільник нуля, антикомутат, спряжений антикватерніон.*

Вступ

Гіперкомплексні числові системи знаходять чимало застосувань у методах обробки та представлення інформації. Особливо велике значення має система кватерніонів, застосуваня якої дозволяє вирішити багато практичних задач: навігації та управління рухомими об'єктами, в механіці, електродинаміці, криптографії, цифрової обробки сигналів тощо.

Численне застосування кватерніонів зумовлене їхніми властивостями, які дозволяють виконувати різні операції з векторами в тривимірній декартовій системі координат. Тому доцільно також розглянути властивості й інших гіперкомплексних числових систем, наприклад такого узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів як система антикватерніонів. Такі дослідження дадуть змогу вирішити нові практичні задачі, або полегшити розв'язок уже розглядуваних раніше.

Постановка задачі

У представленій роботі досліджено питання синтезу гіперкомплексної числової системи антикватерніонів, як результату застосування до системи комплексних чисел «процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда» системою подвійних чисел. Вивчено основні властивості антикватерніонів, алгоритми виконання набору алгебраїчних операцій, що необхідні для застосування системи антикватерніонів у математичному моделюванні.

Означення та основні властивості антикватерніонів

Як відомо з [1, 2], системою кватерніонів H називається гіперкомплексна чотиривимірна система чисел із базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, таблиця множення елементів якого має вигляд:

H	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Кватерніони є результатом антикомутативного подвоєння системи комплексних чисел C тією ж системою чисел. Або, використовуючи систему позначень, введену в [3], запишемо:

$$H = Д(C, C). \tag{1}$$

Якщо антикомутативно подвоїти систему комплексних чисел C системою подвійних чисел $W(e,2)$ з таблицею множення

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

то одержимо систему антикватерніонів *AH*, або через оператор подвоєння:

$$AH = Д(C(\mathrm{e},2), W(f,2)). \tag{2}$$

Дійсно, якщо взяти композицію базисів $\{e_1, e_2\}$ та $\{f_1, f_2\}$, то одержимо базис:

$$\{e_1 f_1, e_2 f_1, e_1 f_2, e_2 f_2\}.$$

Таблиця множення одержаної гіперкомплексної числової системи будується за допомогою перемноження елементів цього базису. При цьому вважаємо, що однойменні базисні елементи перемножуються за правилами систем C та W. При множенні їх між собою зберігається комутативність тільки тоді, коли хоча б один множник є e_1 або f_1. Базисні елементи e_2 та f_2 антикомутатують:

$$e_2 f_2 = -f_2 e_2.$$

Наведемо декілька прикладів множення базисних елементів з урахуванням цих правил:

$$e_1 f_1 \cdot e_1 f_1 = e_1 e_1 \cdot f_1 f_1 = e_1 f_1 ,$$
$$e_2 f_1 \cdot e_2 f_1 = e_2 e_2 \cdot f_1 f_1 = -e_1 f_1 ,$$
$$e_2 f_2 \cdot e_2 f_2 = -e_2 e_2 \cdot f_2 f_2 = e_1 f_1 .$$

Якщо двосимвольні імена базисних елементів перейменувати в односимвольні

$$e_1 f_1 \to e_1 ,\; e_2 f_1 \to e_2 ,\; e_1 f_2 \to e_3 ,\; e_2 f_2 \to e_4 ,$$

то одержимо таблицю множення базисних елементів системи антикватерніонів:

AH	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	e_1	$-e_2$
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

(3)

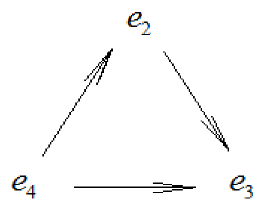

Рис. 1. Схематичне зображення таблиці множення базисних елементів системи антикватерніонів

Запам’ятати дану таблицю допоможе рис. 1, на якому базисні елементи e_2, e_3, e_4 системи антикватерніонів зображено вершинами трикутника. Добуток будь-яких двох елементів з цієї трійки рівний третьому, якщо рух від першого до другого множника співпадає з напрямком стрілки; якщо ж рух протилежний напряму стрілки — третьому зі знаком мінус.

Таким чином, антикватерніони — це числа вигляду

$$w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 , \tag{4}$$

де $a_i \in R$.

Додавання та множення антикватерніонів

У системі антикватерніонів уведено операції додавання та множення таким чином:

— *сумою* двох антикватерніонів $w_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ і $w_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + + b_3 e_3 + b_4 e_4$ є антикватерніон w_3 :

$$w_3 = w_1 + w_2 = (a_1 + b_1) e_1 + (a_2 + b_2) e_2 + (a_3 + b_3) e_3 + (a_4 + b_4) e_4 ;$$

— *добутком* двох антикватерніонів w_1 і w_2 є антикватерніон w_3:

$$w_3 = w_1 w_2 = (a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)e_2 + \\ + (a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)e_3 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)e_4. \quad (5)$$

Відповідно до правил додавання та множення антикватерніонів можна виділити їхні основні властивості:

1) операція додавання комутативна $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$;

2) операція додавання асоціативна: $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$;

3) операція множення не комутативна:

$$w_1 w_2 \neq w_2 w_1 . \quad (6)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= \left(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4\right)\left(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4\right) = \\ &= \left(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4\right)e_1 + \left(a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3\right)e_2 + \\ &+ \left(a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2\right)e_3 + \left(a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1\right)e_4, \end{aligned}$$

але зворотній порядок такий:

$$\begin{aligned} w_2 w_1 &= \left(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4\right)\left(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4\right) = \\ &= \left(b_1a_1 - b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4\right)e_1 + \left(b_1a_2 + b_2a_1 - b_3a_4 + b_4a_3\right)e_2 + \\ &+ \left(b_1a_3 - b_2a_4 + b_3a_1 + b_4a_2\right)e_3 + \left(b_1a_4 + b_2a_3 - b_3a_2 + b_4a_1\right)e_4 = \\ &= \left(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4\right)e_1 + \left(a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3\right)e_2 + \\ &+ \left(a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2\right)e_3 + \left(a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1\right)e_4 \neq w_1 w_2, \end{aligned}$$

тобто виконується (6);

4) операція множення асоціативна: $w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2) w_3$. Це можна довести безпосередньо, використовуючи (5);

5) таким же чином можна довести дистрибутивність антикватерніонів:

$$w_1(w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3 ;$$

6) для антикватерніонів визначена дія множення на скаляр $k \in R$:

$$kw_1 = ka_1e_1 + ka_2e_2 + ka_3e_3 + ka_4e_4 ;$$

7) для $\forall k_1, k_2 \in R$ справедливо $(k_1 w_1)(k_2 w_2) = k_1 k_2 (w_1 w_2)$.

Визначення норми антикватерніонів

У роботі [2] норма гіперкомплексного числа в загальному випадку визначається за формулою

$$N(w)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}a_i\,, \tag{7}$$

де γ_{ij}^{k} — структурні константи гіперкомплексної числової системи антикватерніонів AH, які визначаються з (3). На цій основі будується матриця норми [2]:

$$N(w)=\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Обчисливши детермінант матриці (8), одержимо норму гіперкомплексного числа w:

$$N(w)=\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}-a_3^{\,2}-a_4^{\,2}\right)^2. \tag{9}$$

За аналогією з теорією кватерніонів будемо називати псевдонормою антикватерніонів підкореневий вираз норми (9), яку будемо позначати також $N(w)$:

$$N(w)=a_1^{\,2}+a_2^{\,2}-a_3^{\,2}-a_4^{\,2}. \tag{10}$$

Як видно з (10), псевдонорма може бути від'ємною. Можна показати, що введена таким методом псевдонорма мультиплікативна:

$$N(w_1w_2)=N(w_1)N(w_2). \tag{11}$$

Означення та властивості спряжених антикватерніонів

Введемо означення спряженого антикватерніона

$$\overline{w}=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4 \tag{12}$$

на основі рівності

$$w\overline{w}=N(w), \tag{13}$$

як це запропоновано в [2]. Якщо в (13) підставити (5) та (10) і прирівняти коефіцієнти при однакових базисних елементах, отримаємо лінійну алгебраїчну систему відносно змінних b_1, b_2, b_3, b_4:

$$\begin{cases} a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2, \\ a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3 = 0, \\ a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2 = 0, \\ a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

розв'язки якої мають вигляд:

$$b_1 = a_1, b_2 = -a_2, b_3 = -a_3, b_4 = -a_4. \tag{15}$$

Тому, якщо вихідний антикватерніон $w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$, то спряжений до нього антикватерніон має вигляд:

$$\overline{w} = a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4. \tag{16}$$

Визначимо деякі властивості спряжених антикватерніонів:

1) сума і добуток спряжених антикватерніонів є дійсним числом;

2) спряжене до суми є сумою спряжених $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$;

3) спряжене до добутку є добутком спряжених $\overline{w_1 w_2} = \overline{w_1}\,\overline{w_2}$, що можна перевірити безпосередньо.

Дільники нуля та їхні властивості

Відмінний від нуля антикватерніон $w_1 \neq 0$ називається *дільником нуля*, якщо існує такий антикватерніон $w_2 \neq 0$, що їхній добуток дорівнює нулю: $w_1w_2 = 0$, а це означає таке ж співвідношення між їхніми псевдонормами:

$$N(w_1w_2) = 0. \tag{17}$$

На основі (11) псевдонорма дільника нуля повинна дорівнювати нулю:

$$N(w_1) = 0. \tag{18}$$

Але, з (17) випливає $w_2 = \overline{w_1}$, тобто, якщо $w \in AH$ — дільник нуля, то і $\overline{w}$ — теж дільник нуля.

З (18) випливає ознака дільника нуля в даній гіперкомплексній числовій системі *AH*:

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2. \tag{19}$$

Операція ділення антикватерніонів

Частка від лівого ділення антикватерніона w_1 на антикватерніон w_2 є розв'язок рівняння

$$w_2 x = w_1 . \tag{20}$$

Щоб розв'язати рівняння (20), необхідно помножити зліва його обидві частини спочатку на $\overline{w_2}$, а потім на $\frac{1}{|w_2|^2}$, де $|w_2|^2 \neq 0$. Отримаємо:

$$x_l = \frac{1}{|w_2|^2} \overline{w_2} w_1 . \tag{21}$$

Безпосередньою підстановкою (21) в рівняння (20) з'ясовуємо, що даний вираз є розв'язком цього рівняння.

Праве ділення вводимо на основі рівняння

$$x w_2 = w_1 , \tag{22}$$

звідки

$$x_r = \frac{1}{|w_2|^2} w_1 \overline{w_2} . \tag{23}$$

Оскільки добуток антикватерніонів залежить від порядку співмножників, то $x_l \neq x_r$. Таким чином, розв'язок рівняння (20) називається *лівою часткою*, а рівняння (22) — *правою часткою* [3].

Слід зазначити, що операція ділення, на відміну від полів дійсних і комплексних чисел, не можлива не тільки на нуль, а й на дільники нуля в цій системі *AH*.

Геометричний зміст антикватерніонів

Векторні частини антикватерніонів $Vec(w) = a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ утворюють тривимірний лінійний простір, який ми будемо називати *уявним простором* антикватерніонів. Будемо його зображувати у тривимірному евклідовому просторі.

Розглянемо $\forall w \in AH$. Нехай $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ і p — псевдонорма $p = N(w)$.

Зафіксуємо скалярну частину. Тоді:

$$a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 = p - a_1^2 \Rightarrow a_3^2 + a_4^2 - a_2^2 = a_1^2 - p .$$

Розглянемо геометричний зміст даного виразу в тривимірному уявному просторі антикватерніонів (рис. 2):

1) якщо $a_1^2 - p = 0$, тоді множина антикватерніонів утворює конус $a_3^2 + a_4^2 - a_2^2 = 0$;

2) якщо $a_1^2 - p > 0$, тоді множина антикватерніонів утворює однопорожнинний гіперболоїд $\frac{a_3^2}{a_1^2 - p} + \frac{a_4^2}{a_1^2 - p} - \frac{a_2^2}{a_1^2 - p} = 1$;

3) якщо $a_1^2 - p < 0$, тоді множина антикватерніонів вигляду $w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$, де $a_1^2 < p$ утворює двопорожнинний гіперболоїд $\frac{a_3^2}{a_1^2 - p} + \frac{a_4^2}{a_1^2 - p} - \frac{a_2^2}{a_1^2 - p} = -1$.

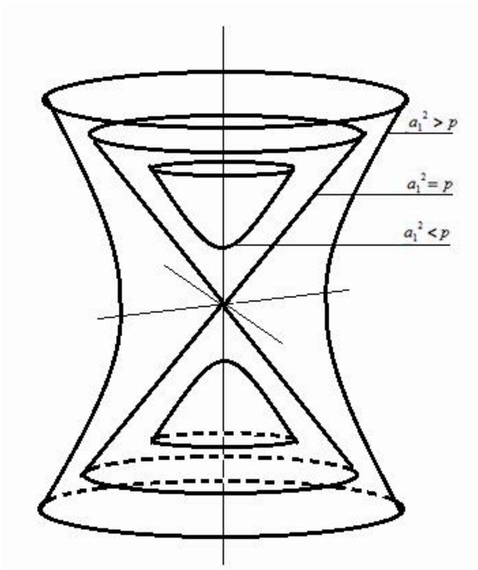

Рис. 2. Геометричний зміст антикватерніонів

Висновки

З вищенаведеного випливає, що в гіперкомплексній числовій системі антикватерніонів визначено набір арифметичних і алгебраїчних операцій, який дозволяє використовувати цю числову систему для побудови математичних моделей у різних галузях науки та техніки.

Ці операції дозволяють будувати різні функції від антикватерніонів, таких як експонента, логарифмічна, тригонометричні та гіперболічні функції, що буде предметом подальших наукових досліджень.

1. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

2. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

3. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вичислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

4. *Two-Dimensional* Hypercomplex Numbers and Related Trigonometries and Geometries / Catoni F., Cannata R., Catoni V., Zampetti P. / Advances in Applied Clifford Algebras. — 2004. — Vol. 14, N 1. — P. 47–68.

5. *Смирнов А.В.* Коммутативная алгебра скалярных кватернионов / А.В. Смирнов // Владикавказский математический журнал. — 2004. — Т. 6, № 2. — С. 50–57.

6. *Комплекснозначные* и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / [Фурман Я.А., Кревецкий А.В., Роженцов А.А. и др.]. — М.: Физматлит, 2003. — 456 с.

7. *Элиович А.А.* О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением [Електронний ресурс] / Элиович А.А. — Режим доступу: hypercomplex.xpsweb.com/page.php?lang=ru &id=176. 2004.

Надійшла до редакції 10.02.2014