УДК 517.51

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Ю. Трохимчук**

Счетная кратность и категория

Доказано, что непрерывное отображение конечномерных многообразий обладает точками локального гомеоморфизма, если для некоторого множества его значений не первой категории его кратность не более, чем счетна.

Известно [1], что открытое счетно-кратное отображение локально компактного хаусдорфова пространства в метрическое обладает плотным множеством точек локального гомеоморфизма. В случае многообразий одинаковой размерности предположение об открытости отображения оказывается излишним; более того, при этом можно предполагать счетную кратность лишь для точек некоторого резидуального подмножества в образе [2].

Так вот для существования точек локального гомеоморфизма вообще оказалось достаточным требовать этой счетной кратности для точек некоторого подмножества не первой категории.

Целью настоящей работы и является доказательство этого утверждения.

Напомним основные сведения о понятии локальной степени непрерывного нульмерного отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, где D — область n-мерного эвклидова пространства [3].

Итак, по условию, для произвольной точки $x \in D$ $F_x = f^{-1}f(x)$ есть (замкнутое в D) нульмерное множество: $\dim F_x = 0$; выберем в некоторой ε-окрестности точки $\underline{x}$ определенную открыто-компактную часть $Q^{(\varepsilon)} \subset \underline{F_x}$, содержащую $\underline{x}$, и построим открытый полиэдр $P^{(\varepsilon)}$, содержащий $P^{(\varepsilon)}$ и такой, что $\overline{P^{(\varepsilon)}} \bigcap F_x = Q^{(\varepsilon)}$. Коэффициент зацепления $\mathfrak{v}\{f(\partial\overline{P}^{\varepsilon}), f(x)\}$ мы будем для кратности называть (не совсем однозначно) ε-степенью отображения f в точке $x \in D$ и обозначим через

$$\gamma(Q_x^{(\varepsilon)}, f, f(x)) = \gamma(\overline{P}^{(\varepsilon)}, f, f(x)) = \gamma_\varepsilon(x).$$

Если при этом найдется такое $\varepsilon(x) > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon(x)$ ε-степень не зависит от $\varepsilon\colon \gamma_\varepsilon(x) = \gamma(x)$ (т. е. при любом выборе открыто-компактной порции $Q_x \subset F_x$ в $\varepsilon(x)$-окрестности $\underline{x}$), то $\gamma(x)$ назовем степенью отображения f в точке $\underline{x}$.

Приведем некоторые утверждения об этом понятии, часть из которых доказана в [3].

Лемма 1. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нульмерное отображение. Множество $E(\gamma_0) \subset D$ всех точек, в которых существует локальная степень $\gamma(x)$ и $\gamma(x) = \gamma_0$, есть множество типа F_σ.*

Доказательство. Обозначим через E_p $(p = 1, 2, \ldots)$ множество всех точек $x \in D$, в которых ε-степень $\gamma_\varepsilon(x)$ стабилизируется при $\varepsilon \leqslant 1/p$; покажем, что E_p замкнуто. Пусть $x_k \in E_p$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $x_k \to x_0 \in D$, а $U(x_k)$ и $U(x_0)$ — $1/p$-окрестности. Возьмем произвольную полиэдральную окрестность $P < U(x_0)$ точки x_0, отделяющую от $f^{-1}f(x_0)$ открыто-компактную порцию Q_{x_0}. В каждой из окрестностей $U(x_k)$ возьмем полиэдр P_k, полученный параллельным переносом из P и расположенный относительно x_k так же, как и P относительно x_0. Начиная с некоторого $\underline{k}$ множества $P_k \bigcap f^{-1}f(x_k)$ и $P \bigcap f^{-1}f(x_0)$ попадут внутрь пересечения $P_k \bigcap P$, а потому (для этих $\underline{k}$)

$$\gamma(P, f, f(x_0)) = \gamma(P_k, f, f(x_k)) = \gamma_0.$$

Итак, $x_0 \in E_p$. Очевидное равенство $E(\gamma_0) = \bigcup\limits_p E_p$ доказывает утверждение леммы.

Прямым следствием ее является следующая лемма:

Лемма 2. *Множество E всех точек, в которых существует локальная степень, есть множество типа F_σ. Более точно: E представимо в виде объединения $E = \bigcup\limits_m F_m$, где F_m замкнуто и $\gamma(x) = \gamma_m = \mathrm{const}$ в каждой точке $x \in F_m$.*

Отметим лишь, что для различных $\underline{m}$ значения γ_m могут совпадать.

Лемма 3. *Для того чтобы локальная степень $\gamma(x_0)$ существовала в точке $x_0 \in D$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой окрестности $U(x_0)$ в каждой точке $x' \in \in f^{-1}f(x_0) \bigcap (U \setminus x_0)$ степень $\gamma(x')$ существовала и равнялась нулю.*

Далее, имеет место очень важная теорема [3].

Теорема I. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нульмерное отображение. Тогда множество $\varepsilon(0)$ тех точек $x \in D$, в которых существует степень $\gamma(x)$, причем $\gamma(x) = 0$, всегда первой категории в D.*

Докажем следующее утверждение:

Теорема II. *Если в области $d \subset D$ в каждой точке $x \in d$ существует локальная степень $\gamma(x)$ и она постоянна: $\gamma(x) = \mathrm{const}$, то эта постоянная равна либо $+1$, либо -1 и отображение $f|_d$ есть локальный гомеоморфизм.*

Доказательство. Прежде всего, отображение $f|_d$ открыто [3].

Обозначим через C_p множество тех $x \in D$, для которых все точки x', удовлетворяющие равенству $f(x') = f(x)$, удалены не меньше чем на $1/p$: $|f(x') - f(x)| \geqslant 1/p$; легко видеть, что каждое C_p замкнуто.

Из условия нашей теоремы, а также в силу леммы 3, для любой точки $x \in d$ найдется окрестность $U_\varepsilon(x)$, которая не содержит точек с $\gamma = 0$, а это означает, что $x \in C_p$ при некотором $p \geqslant 1$. Другими словами, $d = \bigcup\limits_p C_p$. Значит, найдется подобласть $D' \subset D$, которая совпадает с некоторым C_p. В любой подобласти $d \subset D'$ диаметра $< 1/(2p)$ отображение $f|_d$ будет взаимно однозначным, т. е. гомеоморфизмом и, значит, всюду в d $\gamma(x) = \pm 1$. Но тогда, по условию теоремы о постоянстве $\gamma(x)$, и следует ее утверждение.

Основной для нас здесь является следующая теорема:

Теорема. *Пусть отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ непрерывно и нульмерно; если множество $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^n$ не первой категории и прообразы $f^{-1}(y)$ точек $y \in H$ не более чем счетны, то в области D найдется открытое множество точек локального гомеоморфизма.*

Доказательство. Возьмем замыкание $\overline{H}$ и его открытое ядро $\Delta = \operatorname{int} \overline{H}$. Рассмотрим те же множества C_p, что и выше, и докажем, что $(\bigcup\limits_p C_p) \bigcap f^{-1}(\Delta)$ всюду плотно в $f^{-1}(\Delta)$ и не первой категории.

Прежде всего, легко видеть, что все C_p не могут быть нигде не плотными в $f^{-1}(\Delta)$. Предположим противное. Каждое C_p можно покрыть конечным числом кругов радиуса $1/(2p)$; каждая порция C_p в таком круге отображается гомеоморфно в $\mathbb{R}^n$ и если все C_p нигде не плотны, то образ объединения $\bigcup\limits_p C_p$, содержащий множество H, был бы первой категории, чего нет по условию.

Отсюда следует, что множество $E \subset f^{-1}(\Delta)$ тех точек, где существует локальная степень, также не первой категории.

По лемме 2 имеем

$$E = \bigcup_m (F_m \bigcap f^{-1}(\Delta)).$$

Так как слева здесь — множество не первой категории, то на некотором шаре $d \subset \subset f^{-1}(\Delta)$ одно из множеств $F_m \bigcap f^{-1}(\Delta)$ будет всюду плотным; из замкнутости последнего получим: $(F_m \bigcap \overline{f^{-1}(\Delta)}) \supset d$, т. е. $\gamma(x) = \mathrm{const} \neq 0$ (последнее неравенство — в силу теоремы I).

А теорема II утверждает теперь, что $\gamma(x) = \pm 1$ и на открытом ядре из $F_m \bigcap \overline{f^{-1}(\Delta)}$ отображение f является локальным гомеоморфизмом.

Этим наша основная теорема и доказана. Конечно, из нее следует и приведенное выше утверждение с резидуальными подмножествами, но которое было доказано совершенно другим путем и основанной на знаковой, но полузабытой общей теореме Н. Н. Лузина о существовании неявных функций [4].

Приведем некоторые примеры.

Пусть E_1 и E_2, $E_1 \bigcup E_1 \equiv [0,1] = I$ всюду плотны в I и каждое — всюду положительной меры. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{на} \quad E_1, \\ -1 & \text{на} \quad E_2. \end{cases}$$

Тогда $f(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$ является липшицевой нигде не монотонной на I функцией. Из приведенных выше теорем следует, что для резидуального подмножества на $[m, M]$ (m — min, а M — max на I) уровни функции f несчетны; но это подмножество, кстати, самомеры нуль: в силу свойства T_1 Банаха для функций с ограниченной вариацией. Повернув оси координат Oxy на угол $\pi/4$, мы превратим график функции в график строго монотонной сингулярной функции (т. е. у которой производная равна нулю почти всюду); окончательно в результате получим такое утверждение:

Если $\varphi(x)$, $x \in I(\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1)$, есть строго возрастающая сингулярная функция, то семейство прямых $y = x + a$ для значений a из некоторого резидуального подмножества из $[\alpha, \beta]$ пересекает график $y = \varphi(x)$ по несчетному множеству.

Коснемся еще случая конечной кратности. Итак, пусть, как и ранее, $f \colon D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нульмерное отображение, множество $H \subset \mathbb{R}^n$ — не первой категории и такое, что прообразы $f^{-1}(y)$ точек $y \in H$ конечны. Мы докажем, что существует шар $V \subset \mathbb{R}^n$ такой, что полный прообраз его $f^{-1}(v)$ состоит из конечного числа компонент, в каждой из которых отображение f является гомеоморфизмом.

Обозначим через H_{mp} $(m, p = 1, 2, \ldots)$ полные прообразы точек $y \in H$, состоящие из не менее чем из $\underline{m}$ точек в D, попарные расстояния между которыми $\geqslant 1/p$; прообразы могут быть и бесконечными, но должны найтись $\underline{m}$ изолированных точек в $f^{-1}(y)$ с попарными расстояниями $\geqslant 1/p$. Легко видеть, что каждое H_{mp} замкнуто в D, а все семейство $\{H_{mp}\}$ полунепрерывно сверху.

Так как H не первой категории, то $\operatorname{int} \overline{H}$ есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$; по известной теореме [5] найдется точка $y_0 \in H$ полной непрерывности семейства замкнутых множеств

$f(H_{mp} \bigcap H) \subset H$. Прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа m_0 точек, поэтому для некоторой окрестности $V(y_0)$ полный прообраз $f^{-1}(v)$ также состоит из m_0 компонент.

Так как $\bigcup\limits_{m,p} f(H_{mp}) \bigcap H) = H$, то найдется окрестность $V_0(y_0) \subset V(y_0)$, в которой одно из $f(H_{mp})$ $(m \leqslant m_0)$ плотно. Взяв полный прообраз достаточно малой такой окрестности, чтобы каждая компонента его была диаметра, меньшего $1/(2p)$, мы и достигнем того, к чему стремились: ведь в каждой из компонент точки H_{mp} дают точки взаимной однозначности [3].

1. *Александров П. С.* О счетно-кратных открытых отображениях // Докл. АН СССР. – 1936. – № 4. – С. 283–288.
2. *Трохимчук Ю. Ю., Сафонов В. М.* О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 526–531.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 539 с.
4. *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях. – Москва, 1970. – 328 с.
5. *Куратовский К. К.* Топология. Т. 1. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 09.08.2013

Член-кореспондент НАН України **Ю. Ю. Трохимчук**

Зчисленна кратність і категорія

Доведено, що неперервне відображення скінченновимірних многовидів має точки локального гомеоморфізму, якщо для деякої множини його значень не першої категорії його кратність не більш, ніж зчисленна.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. Yu. Trokhimchuk**

Countable multiplicity and category

For a continuous mapping of finite-dimensional manifolds, it is proved that it has points of a local homeomorphism if, for some set of its image-points not of the first category, its multiplicity is at most countable.